原書第六版序

第二卷的這一版與以前的版本有很大的出入。以前的版本中講複數的理論、高等代數初步及函數的積分法的整個第一章放在第一卷中了。反之，關於向量代數基礎的材料由第一卷移到第二卷中來。這些材料與向量分析連合起來組成了第四章。

其餘各章也進行了重大的改變，特別是第三，六，七，章，同時在第三章中補充了特殊的一節，專門敍述度量的理論以及重積分的嚴格理論。在第六章中，有一些材料重新安排了，並且補充了關於封閉性方程的證明，這個證明根據的是維爾史特拉斯的關於用多項式來作連續函數的近似式的定理。在第七章中補充了球面波與柱面波的傳播問題以及關於波動方程的解的克希荷夫公式。常係數線性微分方程的敍述，開始時沒有應用記號方法。

每一章的第一節保存了以前的敍述的特徵。例題與補充的理論材料印成小字體。全部敍述是這樣作的，可以只學習印成大字體的基礎材料。

Г. М. 費赫金戈里茨教授看過這一版的全部原稿，並且在敍述方面給了我很多寶貴的意見，爲此，我對他表示深深的謝意。

B. 斯米爾諾夫

1937 年 6 月 13 日

原書第九版序

在這一版中講數學物理方程的一章作了重大的改變。這一章是數

學物理的引論，爲了使這一章的內容與第四卷的新版本取得一致，所以有改變的必要。

B. 斯米爾諾夫

第一分册目次

第一章　常微分方程

第二章　線性微分方程及微分方程論的補充知識

第二分册目次

第三章　重積分、曲線積分、反常積分及依賴於參變量的積分

第四章　向量分析及場論

第五章 微分幾何基礎

第六章 福里哀級數

§1. 調和分析

§2. 福哀級數理論中的補充知識

§3. 福里哀積分及重福里哀級數

高等數學教程

第二卷

第一章 常微分方程

§1 一級方程

1. 一般概念 除自變量及這些自變量的未知函數外，還含有未知函數的微商或微分的方程，叫做微分方程 [I, 51]。若在一個微分方程中出現的函數只依賴於一個自變量，則這方程叫做**常微分方程**。若在一個方程中出現有未知函數對幾個自變量的偏微商，則這方程叫做**偏微分方程**。在這一章中我們將只考慮常微分方程，並且大部分專講含有一個未知函數的一個方程的情形。

設 x 是自變量，y 是 x 的未知函數。微分方程的一般形狀是：

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$$

在方程中出現的各級微商的最高級數 n，叫做這**微分方程的級**。在這一節中我們考慮一級常微分方程。這種方程的一般形狀是：

$$\Phi(x, y, y')=0 \tag{1}$$

或者，寫成解出 y' 的形式：

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

若某一函數

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

適合一個微分方程，就是說，當用 $\varphi(x)$ 及 $\varphi'(x)$ 代入作 y 及 y' 時，這方程成爲恆等式，**則函數 $\varphi(x)$ 叫做這個微分方程的解**。

微分方程的解的求法有時叫做微分方程的積分法。

若把 x 與 y 看作平面上點的坐標，則微分方程 (1) [或(2)] 表示出某一曲線上點的坐標與這曲線在該點的切線的斜率之間的關係。微分方程的解 (3)，就對應於這樣一條曲線，這曲線上的點的坐標與切線的斜率適合該微分方程。這樣的曲線叫做**所給定的微分方程的積分曲線**。

最簡單的情形，是當方程 (2) 的右邊不含有 y 時，就得到下面形狀的微分方程。

$$y' = f(x).$$

這個方程的解的求法就是積分學中的基本問題 [I, 86]，於是公式

$$y = \int f(x)dx + C,$$

給出全部的解，其中 C 是任意常數。如此，在這最簡單的情形下，我們得到微分方程的解，它含有任意常數。我們將看到，一般的一級微分方程，也會有含有一個任意常數的解；這樣的解叫做**方程的一般積分**。給任意常數以不同的數值，就得到方程的不同的解——這樣的解叫做**方程的特殊解**。

以下幾段中，我們講幾種特殊型態的一級方程，它們的積分法可以化爲不定積分的計算，或者說，**它們的積分法可以化爲求面積法**。[1]

2. 可分離變量的方程 在微分方程 (2) 中，用 $\frac{dy}{dx}$ 替代 y'，兩邊用 dx 乘，再把所有的項都移到左邊來，就可以把它化爲下面的形狀：

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{4}$$

[1] 積分的計算與面積的計算有直接的連繫，由此引出"求面積法"這個名辭。

在某些情形下，寫成這樣是比較方便的。這時，兩個變量 x 與 y 在方程中具有同樣的地位，因爲方程（4）沒有規定出我們該選擇那一個作爲未知函數。於是我們可以取 y，也可以取 x，作爲未知函數。

設函數 $M(x, y)$ 與 $N(x, y)$ 中每一個都可以分解爲兩個因子之積，而這兩個因子中，一個只依賴於 x，另一個只依賴於 y:

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx+N_1(x)\,N_2(y)\,dy=0. \tag{5}$$

用 $M_2(y)\,N_1(x)$ 除這方程的兩邊，就化爲下面的形狀：

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy=0, \tag{6}$$

於是 dx 的係數只依賴於 x，dy 的係數只依賴於 y。方程(5)叫做可分離變量的方程 [I, 93]，化爲形狀（6）的方法叫做分離變量法。

方程（6）的左邊是表達式

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy$$

的微分，而這表達式的微分等於零就相當於這表達式等於任意一個常數

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy=C, \tag{7}$$

其中 C 是任意常數。這個公式給出了無窮多個解；就幾何意義來說，它表示出積分曲線族的隱式方程，若計算出方程（7）中的積分，再解出 y，就得到積分曲線族（微分方程的解）的顯示方程。

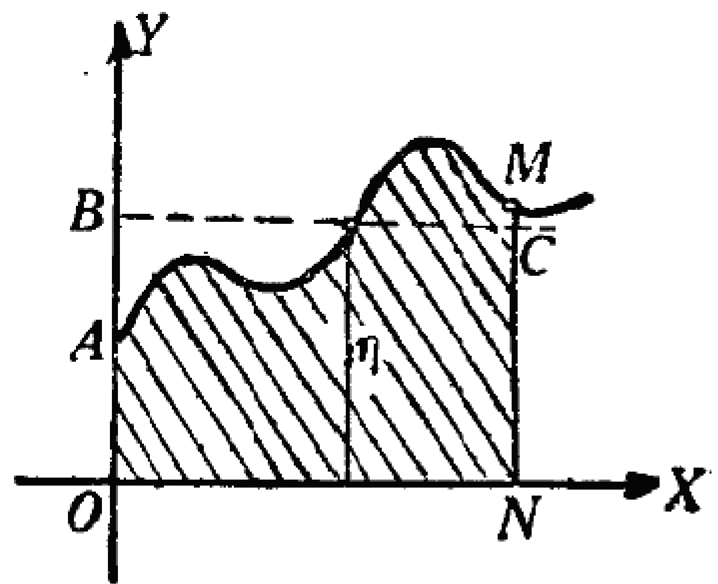


圖 1.

$$y=\varphi(x, C)$$

例　界於坐標軸，曲線弧 AM 以及縱坐標 MN 之間的面積 $OAMN$ （圖 1），與同底 $ON=x$，高爲 η 的矩形 $OBCN$ 的面積相等：

$$\int_0^x ydx = x\eta;\quad \eta = \frac{1}{x}\int_0^x ydx. \tag{8}$$

η 叫做曲線的縱坐標在區間 $(0,\ x)$ 上的平均値。

我們求些曲線，讓它們的縱坐標的平均值與極端坐標 NM 成正比。以公式(8)爲基礎，就有：

$$\int_0^x ydx = kxy, \tag{9}$$

其中 k 是比例係數。由方程(9)逐項求微商，就得到微分方程

$$y=ky+kxy',\ 或\ xy'=ay, \tag{10}$$

其中

$$a=\frac{1-k}{k}. \tag{11}$$

求微商時，我們可能引入一些外加的解；因爲由微商相等所推出的函數，可能差有常數項。不過在上述的情形下，並沒有外加的解。實際上，方程(10)是由方程(9)逐項求微商得到的，於是由方程(10)推出的結果，只可能使得方程(9)的兩邊差一個常數項。但是直接可以看出，當 $x=0$ 時，兩邊都等於零，於是所說的常數項也得等於零，就是說，方程(10)的任何一個解都是方程(9)的解。現在來求方程(10)的積分。它可以寫成

$$x\frac{dy}{dx}=ay,$$

再分離變量：

$$\frac{dy}{y}=a\frac{dx}{x}$$

求積分，得到：

$$\lg y = a\lg x + C_1\ 或\ y=Cx^a, \tag{12}$$

其中 $C=e^{C_1}$ 是任意常數。

依照公式(11)，當 k 由 0 增加到 $+\infty$ 時，a 就由 $+\infty$ 減小到 (-1)；因此，我們應當

算作 $a>-1$，以使得方程(9)左邊的積分總有意義。當 $k=1$ 時，$a=0$，於是方程(12)給出很明顯的解——平行於 OX 軸的直線族。當 $k=\frac{1}{3}$ 時，$a=2$，就得到拋物線族(圖2)：

$$y=Cx^2$$

對於這些拋物線，縱坐標的平均值等於其極端坐標的三分之一。當 $k=2$ 時，得到曲線族：

$$y=\frac{C}{\sqrt{x}},$$

這些曲線的縱坐標的平均值等於其極端坐標的二倍(圖3)。

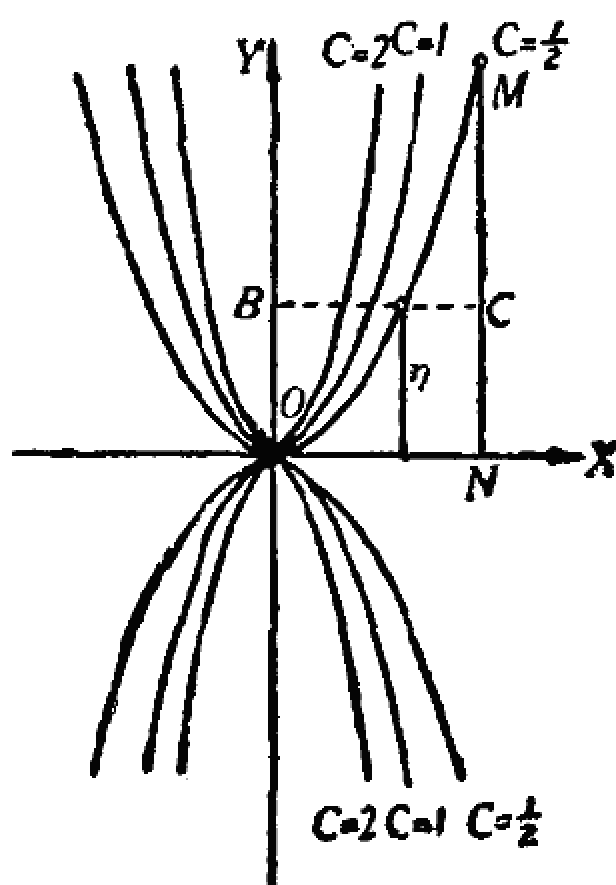


圖 2.

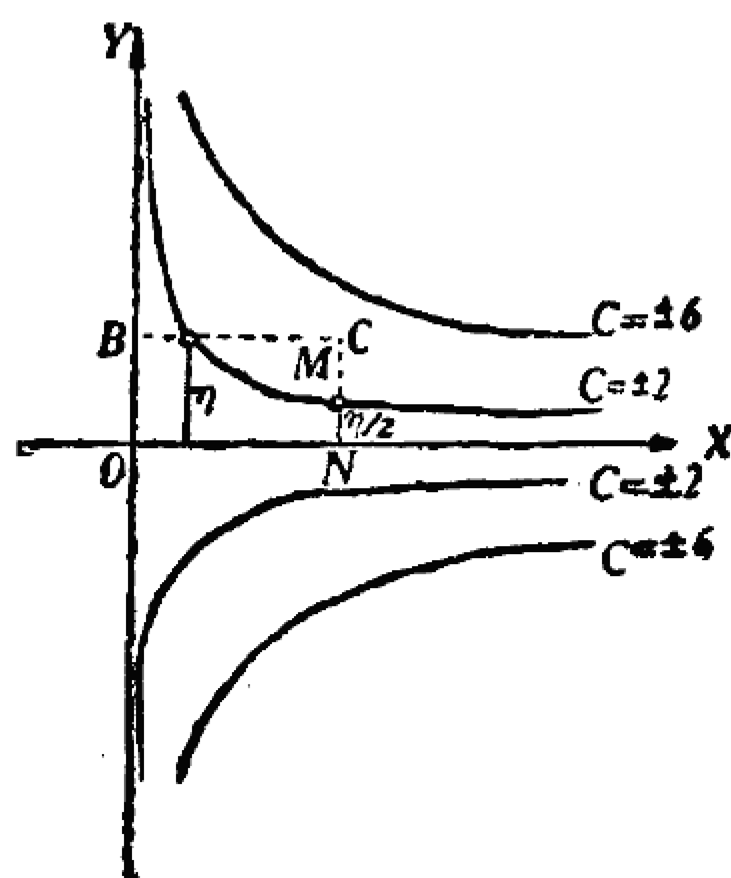


圖 3.

3. 齊次方程　下面形狀的方程叫做齊次方程

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)^{1)}. \tag{13}$$

---

1) 注意，二元函數 $\varphi(x, y)$ 若是只是比 $\frac{y}{x}$ 的函數，必須且僅須，當 x 與 y 同乘以任意乘數 t 時，函數 $\varphi(x, y)$ 的值不變，就是 $\varphi(tx, ty)=\varphi(x, y)$。這個條件相當於 $\varphi(x, y)$ 是 x 與 y 的零次齊次函數[I, 151]。

保留原來的自變量 x, 引入新的函數 u 以替代 y:

(14) $$y = xu,\ 由此\ y' = u + xu'.$$

變換方程 (13), 得到

$$u + xu' = f(u)\ 或\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

分離變量:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f(u)} = 0.$$

用 $\psi_1(u)$ 記 du 的係數, 就得到:

$$\lg x + \int \psi_1(u)\,du = C_1,$$

由此

$$x = Ce^{-\int\psi_1(u)\,du}\ 或\ x = C\psi(u),$$

其中 $C = e^{C_1}$ 是任意常數,

代回原來的變量 y, 積分曲線族的方程可以寫成:

(15) $$x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

考慮以坐標原點爲像似中心的像似變換。這樣的變換使得點 (x, y) 變到新的位置

(16) $$x_1 = kx;\quad y_1 = ky \qquad (k > 0),$$

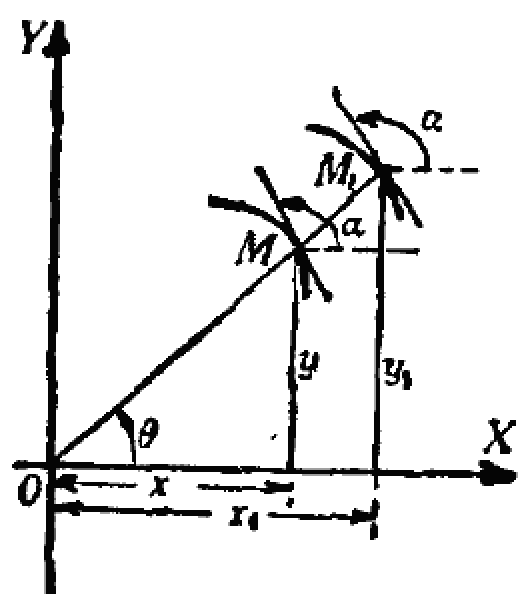


圖 4.

或者說, 它使得平面上點的向量半徑的長乘上 k 倍, 而方向不變。若一點原來的位置是 M, 經過變換後的位置是 M_1, 則(圖 4):

$$\overline{OM_1} : \overline{OM} = x_1 : x = y_1 : y = k.$$

把變換(16)施用於方程(15), 就得到:

(17) $$x_1 = kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

由於C是任意常數，這個方程與方程(15)並無區别，就是說，變換(16)並沒有改變了曲線族(15)的整體，只不過把曲線族(15)中的一條變到同一曲線族中的另一條而已。顯然，曲線族(15)中任何一條曲線，可以由這族中一條固定的曲線通過變換(16)得到，只須適當的選擇常數k就成了。所得到的結果可以寫成：**借助於以坐標原點爲像似中心的像似變換，齊次方程的所有的積分曲線，都可以由一條積分曲線得到。**

方程(13)又可以寫成：

$$\operatorname{tg} \alpha = f(\operatorname{tg} \theta),$$

其中$\operatorname{tg} \alpha$是切線的斜率，θ是由坐標原點作出的向量半徑與正向OX軸的交角，如此，方程(13)建立了α角與θ角之間的關係，所以，**沿着過原點的任何一條直線，齊次方程的各積分曲線的切線應當是互相平行的**(圖4)。

由於切線的這個性質，使得以原點爲中心的像似變換把一條積分曲線仍變到一條積分曲線這件事更明顯了；因爲，當曲線上的點的向量半徑以相同的比例伸長或縮短時，每一個向量半徑上的切線的方向不變(圖5)。

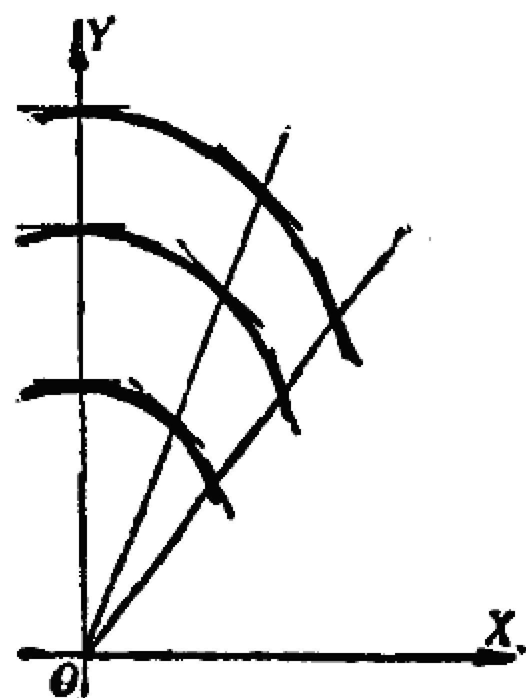


圖 5.

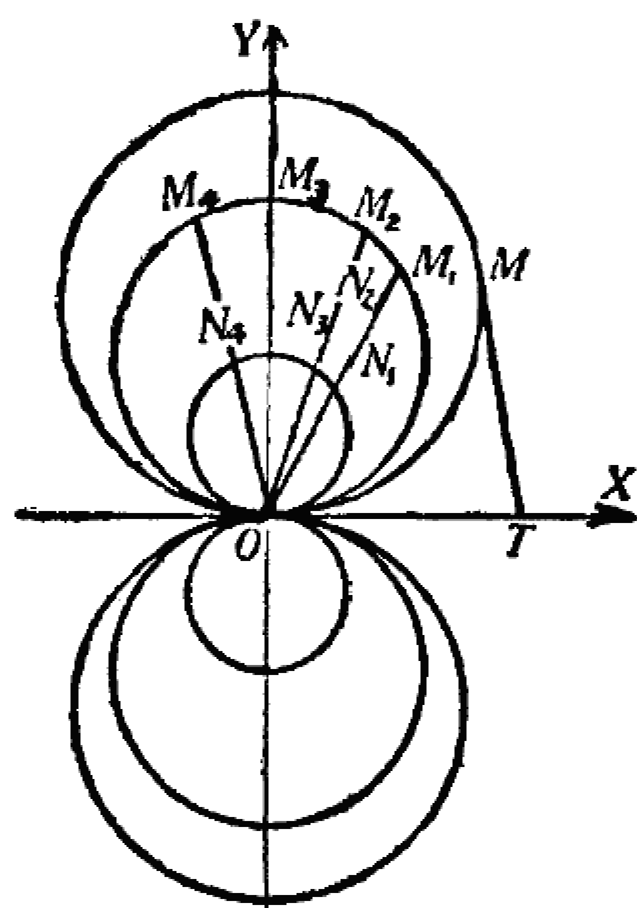


圖 6.

當積分曲線是通過坐標原點的直線時，若我們施用上述的像似變換，則變換後所得到的仍是原來的直線，所以，在這情形下，上述由一條積分曲線得到其他積分曲線的方法，是不適用的。

例 求曲線，使得：由切線與 OX 軸的交點 T 到切點 M 的線段 MT 等於 OX 軸上的截距 OT（圖6）。

切線的方程是

$$Y-y=y'(X-x),$$

其中(X, Y)是切線上動點的坐標，讓 $Y=0$，就得到切線在 OX 軸上的截距：

$$\overline{OT}=x-\frac{y}{y'},$$

再由條件 $\overline{MT}^2=\overline{OT}^2$，就得到[I,77]

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2,$$

由此得到微分方程：

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}, \tag{18}$$

這顯然是個齊次方程。

依照下面的公式，引入新函數 u 以替代 y：

$$y=xu;\quad y'=xu'+u,$$

代入到方程中，就有：

$$xu'+u=\frac{2u}{1-u^2},\quad 或\quad x\frac{du}{dx}-\frac{u+u^3}{1-u^2}=0, \tag{19}$$

再分離變量：

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-u^2}{u+u^3}du=0. \tag{20}$$

求積分，就得到：

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C.$$

再代回原來的變量 y：

(21) $$x^2+y^2-Cy=0,$$

就是說,未知曲線是通過坐標原點且在這點與 OX 軸相切的圓(圖6)。

由方程(19)變到方程(20)時,我們把方程的兩邊用 $(u+u^3)$ 除了,這可能失去一個解 $u=0$,也就是 $y=0$。把它代入到原方程(18)中,我們看出它確是這方程的一個解。不過公式(21)也包含有這個解。只須把公式(21)的兩邊用 C 除,再設 $C=\infty$,就得到它了。

利用以坐標原點爲像似中心的像似變換,圓族(21)中的每個圓可以由其中一個圓得到,所以(圖6):

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{ON_1}}=\frac{\overline{OM_2}}{\overline{ON_2}}=\frac{\overline{OM_3}}{\overline{ON_3}}=\cdots.$$

我們現在講,微分方程:

(22) $$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

可以化爲齊次方程。引用新變量 ξ 與 η 來替代 x 與 y:

(23) $$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta,$$

其中 α 與 β 是我們現在要確定的常數。

代入新變量到方程(22)中,就得到:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right).$$

我們由下面兩個條件來確定 α 與 β:

$$a\alpha+b\beta+c=0,\quad a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0.$$

這樣,方程就化爲齊次的了:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left[\frac{a+b\frac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}\right].$$

變換(23)相當於坐標軸的平移,這時,坐標原點變到下面兩條直線的交點:

(24) $$ax+by+c=0 \text{ 與 } a_1x+b_1y+c_1=0.$$

如此，以前所得到的結果也適用於方程(22)，所不同的，只是點(α, β)起了坐標原點的作用。

若直線(24)互相平行，則上述的變換就做不成了。但是在這情形下，由解析幾何學知道，方程(24)的係數應當成比例：

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda \text{ 於是 } a_1x+b_1y=\lambda(ax+by);$$

引用新變量 u 以替代 y：

$$u=ax+by,$$

不難看出，這樣就得到可分離變量的方程。

以後我們要講齊次方程在流體力學中的重要應用。

4. 線性方程及白諾利方程 下面形狀的方程叫做一級線性方程.

(25) $$y'+P(x)y+Q(x)=0.$$

先考慮對應的沒有自由項 $Q(x)$ 的方程

$$z'+P(x)z=0.$$

分離變量：

$$\frac{dz}{z}+P(x)\,dx=0,$$

就得到：

(26) $$z=Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

為要解給定的線性方程(25)，我們應用改變任意常數法，就是設這方程的解具有類似於(26)中的 z 的形式：

(27) $$y=ue^{-\int P(x)dx}.$$

其中 u 不是常數，而是 x 的一個未知函數。求微商，就引出：

$$y'=u'e^{-\int P(x)dx}-P(x)\,ue^{-\int P(x)\,dx}.$$

代入到方程(25)中,得到:

$$u'e^{-\int P(x)dx}+Q(x)=0$$

$$u'=-Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

由此

$$u=C-\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

最後,依照等式(27),就得到:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C-\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]. \tag{28}$$

由這個公式確定 y 時,對於不定積分

$$\int P(x)\,dx \text{ 與 } \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

只須任取一個值就成了,因爲它們加上任意常數,只不過改變 C 的值而已。

用上限爲變量的定積分 [I, 96],來替代上面兩個不定積分,公式(28)就可以寫成:

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\left[C-\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}dx\right], \tag{29}$$

其中 x_0 是任意選定的一個數。當變上限代入以值 $x=x_0$ 時,上式右邊就等於 C,因爲上下限相同的積分等於零,就是說公式(29)中的常數 C,是當 $x=x_0$ 時函數 y 的值。我們把這個值記作 y_0,叫做**解的初值**。

爲了表示這種情況,我們寫成:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0. \tag{30}$$

如此,若給定了當 $x=x_0$ 時未知解的初值,則公式(29)給出方程的完全

確定的解：

$$(31)\qquad y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\left[y_0-\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}dx\right].$$

條件(30)叫做初始條件，從幾何觀點來看，這就相當於所求的積分曲線要通過給定的點 (x_0, y_0)。

若設 $Q(x)\equiv 0$, 就得到齊次方程

$$y'+P(x)y=0$$

的適合於條件(30)的解：

$$(31_1)\qquad y=y_0e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}$$

由公式(29)推知，線性微分方程的解有下面的形狀：

$$(32)\qquad y=\varphi_1(x)C+\varphi_2(x),$$

就是說，y 是任意常數的線性函數。

設 y_1 是方程(25)的解，讓

$$y=y_1+z,$$

就得到關於 z 的方程：

$$z'+P(x)z+[y_1'+P(x)y_1+Q(x)]=0.$$

因爲假設了 y_1 是方程(25)的解，所以方括號以內的和等於零。於是推知，z 是對應的沒有自由項的方程的解，它是由公式(26)所確定的，所以：

$$(33)\qquad y=y_1+Ce^{-\int P(x)dx}$$

現在設已知方程(25)的另一個解 y_2, 並設它是當 $C=a$ 時由公式(33)得到的：

(34) $$y_2 = y_1 + ae^{-\int P(x)dx}.$$

由等式(33)與(34)消去 $e^{-\int P(x)dx}$，就得到通過兩個解 y_1 與 y_2 來表達這個線性方程的解的公式：

(35) $$y = y_1 + C_1(y_2 - y_1)$$

其中 C_1 是任意常數，它替代了以上的 $\frac{C}{a}$。由方程(35)推出下面的關係式：

(36) $$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{1 - C_1}{C_1} = C_2,$$

這表明了，比 $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ 是個常量，就是說，**線性方程的積分曲線族是這樣一個曲線族，其中任何一條曲線，把界於這族中任意兩條曲線之間的縱坐標線段分爲定比。**

如此，若已知線性方程的兩個積分曲線 L_1 與 L_2，則任何一條其他的積分曲線，可以利用比（圖 7）

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_1C}} = \frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_1D}} = \cdots$$

的常數值確定出來。

根據上面的等式，弦 A_1B_1, AB 與 A_2B_2 應當是，或者交於一點，或者互相平行，當縱坐標線段 $\overline{B_1B_2}$ 無限逼近於線段 $\overline{A_1A_2}$ 時，這些弦的方向變向各曲線在 A_1, A, A_2 點的切線方向，於是我們得到下面關於線性方程的積分曲線的切線的性質：**在線性方程的積分曲線與一條平行於 OY 軸的直線的交點處，各曲線的切線或者互相平行，或者交於一點。**

例 1. 考慮有自感的電路中，變動電流的暫態過程。設 i 記電流強度，v 記電壓，R 記電路的電阻，L 記自感係數。

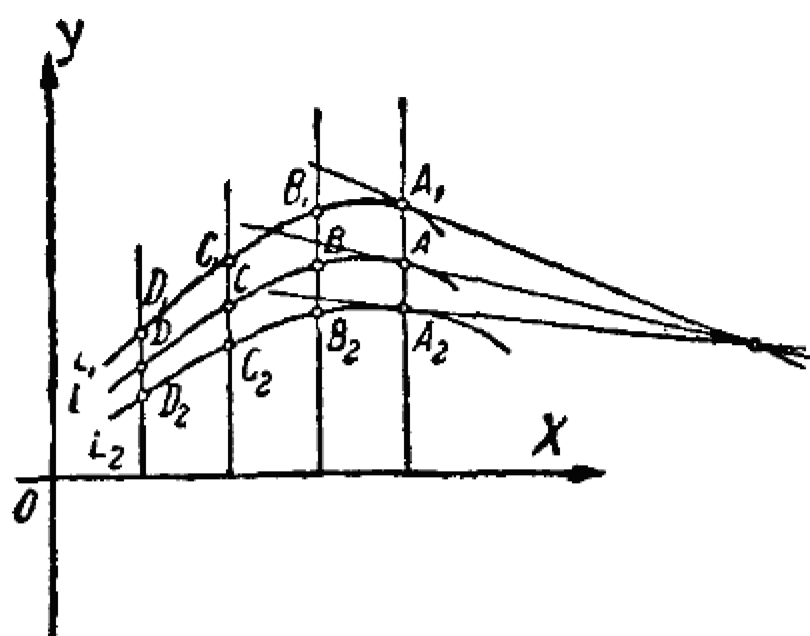


圖 7.

我們有關係式:

$$v = Ri + L\frac{di}{dt},$$

由此得到關於 i 的線性方程

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i-\frac{v}{L}=0.$$

算作 R 與 L 是常量，v 是時間 t 的已知函數,計算公式(31)中出現的積分:

$$\int_0^t Pdt=\int_0^t \frac{R}{L}\,dt=\frac{R}{L}t;\quad \int_0^t Qe^{\int_0^t Pdt}\,dt=-\frac{1}{L}\int_0^t ve^{\frac{R}{L}t}\,dt.$$

用 i_0 記 i 的初值，就是當 $t=0$ 時電流強度的值，依照 (31)，我們得到在任何時刻確定 i 的公式:

$$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left(i_0+\frac{1}{L}\int_0^t ve^{\frac{R}{L}t}\,dt\right).$$

當電壓 V 是常量時,就有:

$$i=\left(i_0-\frac{v}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{v}{R}.$$

當 t 增加時,因子 $e^{-\frac{R}{L}t}$ 很快的減小,實際上，經過很短的時間後，可以算作入於穩定過程,而電流強度就由歐姆定律 $i=\frac{v}{R}$ 來確定。

特別是,當 $i_0=0$ 時,得到公式:

$$i=\frac{v}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{37}$$

它表示接通電路時的電流強度。讓 $v=0$,就得到斷開電路時電流消失的公式。

$$i=i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

常量 $\frac{L}{R}$ 叫做所考慮的電路的時間常量。

考慮電壓 v 是正弦性的情形，$v=A\sin\omega t$. 依照公式(31),得到:

$$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left[i_0+\frac{A}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt\right].$$

不難看出 [I, 201],

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt=e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t-\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right]$$

於是推知

$$\int_0^t e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt=e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t-\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right]+\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}.$$

代入到 i 的表達式中,得到:

$$(38)\quad i=\left(i_0+\frac{\omega LA}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{RA}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t-\frac{\omega LA}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t.$$

第一項含有因子 $e^{-\frac{R}{L}t}$,它很快就消失了,實際上，$t=0$ 之後經過很短的時間，電流強度就可以由公式(38)中其餘兩項來確定。這個和表示一個正弦量，它的頻率與電壓 v 的相同,只是振幅與相不同。還要注意，由這個和所給出的穩定過程的電流強度，不依賴於電流的初值 i_0.

2. 在電路斷開時,有火花發生,這時不能算作電阻 R 是常量。它由初值 R_0 增加到無窮大(對斷路的一霎時間 τ 來講)。

有時我們設 R 依賴於 t 的關係由公式

$$R=\frac{R_0}{1-\frac{t}{\tau}}=\frac{R_0\tau}{\tau-t}.$$

來表達。

這就引出方程：

$$\frac{di}{dt}+\frac{R_0\tau}{L(\tau-t)}i-\frac{v}{L}=0.$$

為了把 t 表示成 τ 的一部分，我們由公式

$$t=\tau x,$$

引入新變量 x 以替代 t，其中 x 由 0（斷路開始的時刻）變到 1（火花熄滅的時刻）。方程就成為：

$$\frac{di}{dx}+\frac{R_0\tau}{L(1-x)}i-\frac{v\tau}{L}=0 \tag{39}$$

附有條件

$$i\Big|_{x=0}=i_0 \qquad \left(i_0=\frac{v}{R_0}\right)$$

應用公式(28)，不難得到這方程的一般解：

$$i=(1-x)^{\frac{R_0\tau}{L}}\left[\frac{v\tau}{L}\int(1-x)^{-\frac{R_0\tau}{L}}dx+C\right],$$

我們分為兩種情形來討論：

$$1)\ \frac{L}{R_0}\neq\tau;\quad 2)\ \frac{L}{R_0}=\tau.$$

在第一種情形下，求得：

$$i=\frac{v\tau}{R_0\tau-L}(1-x)+C(1-x)^{\frac{R_0\tau}{L}}$$

再讓 $x=0$，確定出任意常數 C：

$$i_0=\frac{v\tau}{R_0\tau-L}+C;\quad C=i_0-\frac{v\tau}{R_0\tau-L},$$

最後得到：

$$(40_1)\qquad i=\frac{v\tau}{R_0\tau-L}(1-x)+\left(i_0-\frac{v\tau}{R_0\tau-L}\right)(1-x)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

在第二種情形下，用類似的方法可以求得：

$$(40_2)\qquad i=(1-x)\left[i_0-\frac{v\tau}{L}\lg(1-x)\right].$$

白諾利方程

$$(41)\qquad y'+P(x)y+Q(x)y^m=0$$

是線性方程的一種推廣的形式，其中指數m可以算作不是零或一，因爲在這兩種情形，這方程就是線性的了。用 y^m 除上式兩邊：

$$y^{-m}y'+P(x)y^{1-m}+Q(x)=0,$$

再引用新變量 u 以替代 y:

$$u=y^{1-m},\quad u'=(1-m)y^{-m}y'.$$

這時方程化爲：

$$u'+P_1(x)u+Q_1(x)=0$$

其中

$$P_1(x)=(1-m)P(x) \text{ 而 } Q_1(x)=(1-m)Q(x),$$

就是說，利用替換 $u=y^{1-m}$，可以把白諾利方程(41)化爲線性方程，然後就可以求積分了。

注意，微分方程

$$(41_1)\qquad y'+P(x)y+Q(x)y^2+R(x)=0$$

叫做利卡迪方程，當係數是任意的時，它不能化爲積分的形式。不過若知道了它的任何一個特殊解，就可以把它化爲線性方程。實際上，設 y_1 是方程(41_1)的一個解，就是

$$(*)\qquad y_1'+P(x)y_1+Q(x)y_1^2+R(x)=0.$$

在方程(41_1)中，依公式

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

引入新的未知函數 u 以替代 y，代入到(41_1)中，並注意等式(*)，就得到關於 u 的線性方程：

$$u' - [P(x) + 2Q(x)y_1]u - Q(x) = 0.$$

這方程的一般積分有如：$u = C\varphi(x) + \psi(x)$. 把這個 u 的表達式代入到上面關於 y 的等式中，就得到利卡迪方程的一般積分：

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C\varphi_2(x) + \psi_2(x)}$$

5. 依照初始條件確定微分方程的解 我們以前講過，一級微分方程

$$y' = f(x, y) \tag{42}$$

表示出點的坐標 (x, y) 與過這點的切線的斜率之間的關係。設 $f(x, y)$ 是 (x, y) 的單値連續函數。這時，對於平面上 $f(x, y)$ 有定値的任何一點，根據方程(42)，都有一個確定的方向與之對應，它的斜率等於 $f(x, y)$。通過對應的點作一根短矢來表示這個方向，我們就在平面上得到一個**方向場**，這場中任何一個方向都連繫於平面上某一個點。方程(42)的積分曲線就是以上述的方向爲切線方向的曲線：這些曲線可以叫做**給定的方向場的積分曲線**。

我們可以舉出地球表面上的磁場作爲一個例子。把某一部分地面考慮作平面，在每一點就有一個確定的方向，就是在這點磁針所指的方向。

現在來研究確定方程(42)的積分曲線的問題。爲要完全確定積分曲線的位置，還應當先給定這積分曲線需要通過的某一個點，例如這積

分曲線與平行於 OY 軸的直線 $x=x_0$ 的交點，或者，同樣的意思，給出當 x 取指定的值 x_0 時，未知函數 y 應當取的初值 y_0:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0.$$

為要作出通過指定的點(x_0, y_0)的近似積分曲線，可以應用下面講的尤拉的方法。

在坐標平面上，用平行於坐標軸的直線，畫出相等的小方格網，再從坐標原點，在OX軸的負方向，作一個等於單位長的線段 $\overline{OP}$（圖 8）。用 $x=x_0$ 與 $y=y_0$ 代入到方程(42)的右邊，計算出$f(x_0, y_0)$，並在 OY 軸上截一段 $\overline{OA_0}$，使等於 $f(x_0, y_0)$。顯然，線段PA_0的斜率就等於 $f(x_0, y_0)$，於是它平行於積分曲線在點（x_0, y_0）的切線。現在開始作這積分曲線的折線形狀的近似曲線。

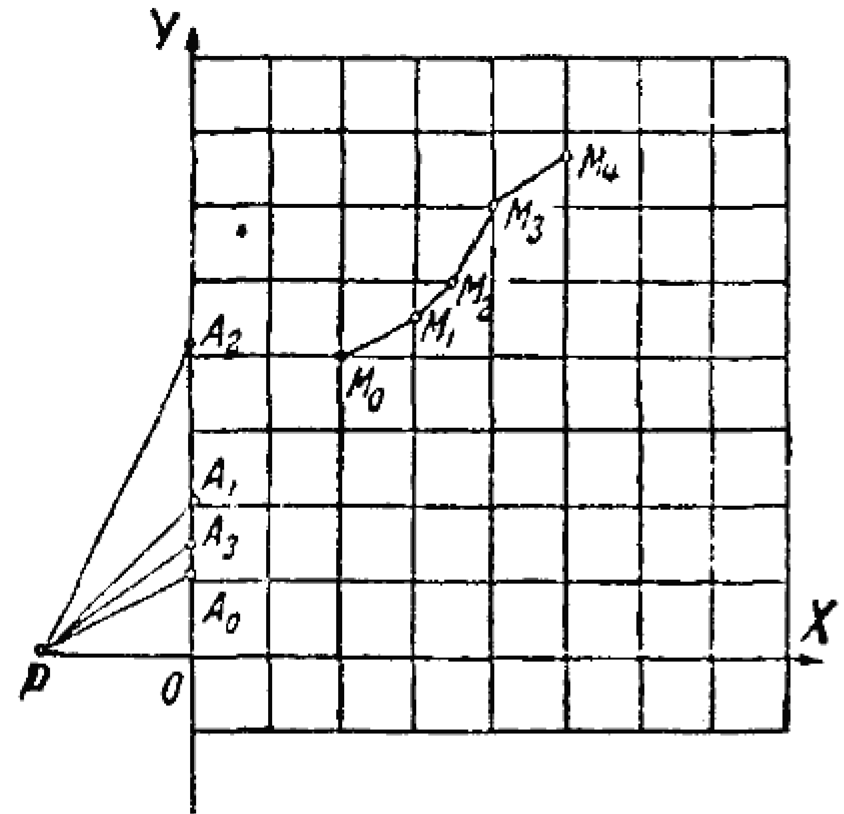


圖 8

由點(x_0, y_0)引半線M_0M_1，平行於 PA_0，於是它的斜率是 $y_0'=f(x_0, y_0)$。設 M_1 (x_1, y_1)是這半線與所作的方格網的邊的第一個交點。在 OY 軸上再截一段 OA_1 等於$f(x_1, y_1)$，再引半線 M_1M_2 平行於 PA_1，於是它的斜率是 $y_1'=f(x_1, y_1)$。設 M_2 (x_2, y_2)是這個半線與方格網的邊的第一個交點，就再這樣作下去。這個作法可以用於橫坐標增加的方向。也同樣可以用於橫坐標減小的方向。這樣作出的折線，就是未知積分曲線的近似曲線。

注意，在作線段 $\overline{OP}$ 與 $\overline{OA_0}$, $\overline{OA_1}$…時，可以用與坐標 x 及 y 不同的尺度，因為線段 $\overline{PA_0}$, $\overline{PA_1}$ …的方向不依賴於對上述線段所選擇

的尺度。

由上述作法，顯而易見，方程(42)的通過給定的點(x_0, y_0)的積分曲線必有一條，且僅有一條。這個肯定是正確的，並且可以嚴格證明，但須$f(x, y)$除連續性外，還具有其他的性質。例如，**若在點(x_0, y_0)的近傍，函數$f(x, y)$是(x, y)的連續函數，且有對y的連續微商，則通過點(x_0, y_0)的方程(42)的積分曲線，必有一條且僅有一條。**

這個定理我們現在不證，它通常叫做**當給定初始條件時，微分方程的存在及唯一定理**。在本章的最後我們再證明這個定理。

關於這個定理，除上述的幾何解釋外，我們再就一種重要的特殊情形，給以分析的解釋。這種情形就是：方程(42)的右邊可以展開成$(x-x_0)$與$(y-y_0)$的正整冪級數[I, 161]：

$$f(x, y)=\sum_{p, q=0}^{\infty} a_{pq}(x-x_0)^p(y-y_0)^q,$$

並且當$(x-x_0)$與$(y-y_0)$的絕對值足夠小時，這級數收斂。

在這情形下，滿足初始條件

$$y|_{x=x_0}=y_0 \tag{43}$$

的，方程(42)的解，可以表示成泰勒級數的形狀，也就是可以展成$(x-x_0)$的正整冪級數，並且這個級數的係數可以由方程(42)完全確定出來。實際上，用$x=x_0$與$y=y_0$代入到方程(42)的右邊，就得到當$x=x_0$時，一級微商y'的值y_0'。再求方程(42)對x的微商，就得到

$$y''=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}y';$$

用$x=x_0, y=y_0, y'=y_0'$代入到上式的右邊，就得到當$x=x_0$時，二級微商y''的值y_0''。再求上式對x的微商，就得到關於y'''的方程，照樣

作下去。如此就確定出一個泰勒級數

$$y=y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\cdots, \tag{44}$$

它就是當 x 與 x_0 足够近時，方程(42)的滿足初始條件(43)的解。

除去所講的依次確定當 $x=x_0$ 時各級微商的值這方法外，也可以用另一個方法，就是待定係數法。用具有待定係數的冪級數

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots \tag{45}$$

代入到方程(42)中以替代 y. 將右邊依 $(x-x_0)$ 的方冪整理好，再讓兩邊同次冪的係數相等，就可以確定出常係數 $a_1, a_2, \cdots$。不難驗證，級數(44)與(45)應當是全同的。

例 求方程

$$y'=\frac{xy}{2}, \tag{46}$$

滿足初始條件

$$y|_{x=0}=1 \tag{47}$$

的解，並寫成冪級數

$$y=1+\sum_{s=1}^{\infty}a_s x^s,$$

的形狀，其中根據初始條件(47)，我們取常數項等於1。

求這冪級數的微商：

$$y'=\sum_{s=1}^{\infty}sa_sx^{s-1}.$$

把得到的 y 及 y' 的表達式代入到方程(46)中：

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}x(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots).$$

讓左邊與右邊的 x 的同次冪的係數相等，就得到下表中的關係式。由此顯然，

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{2!4^2},\ \cdots,\ a_{2n} = \frac{1}{n!4^n},\ \cdots$$

最後得到 [1, 126]

$$y = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n + \cdots = e^{\frac{x^2}{4}}.$$

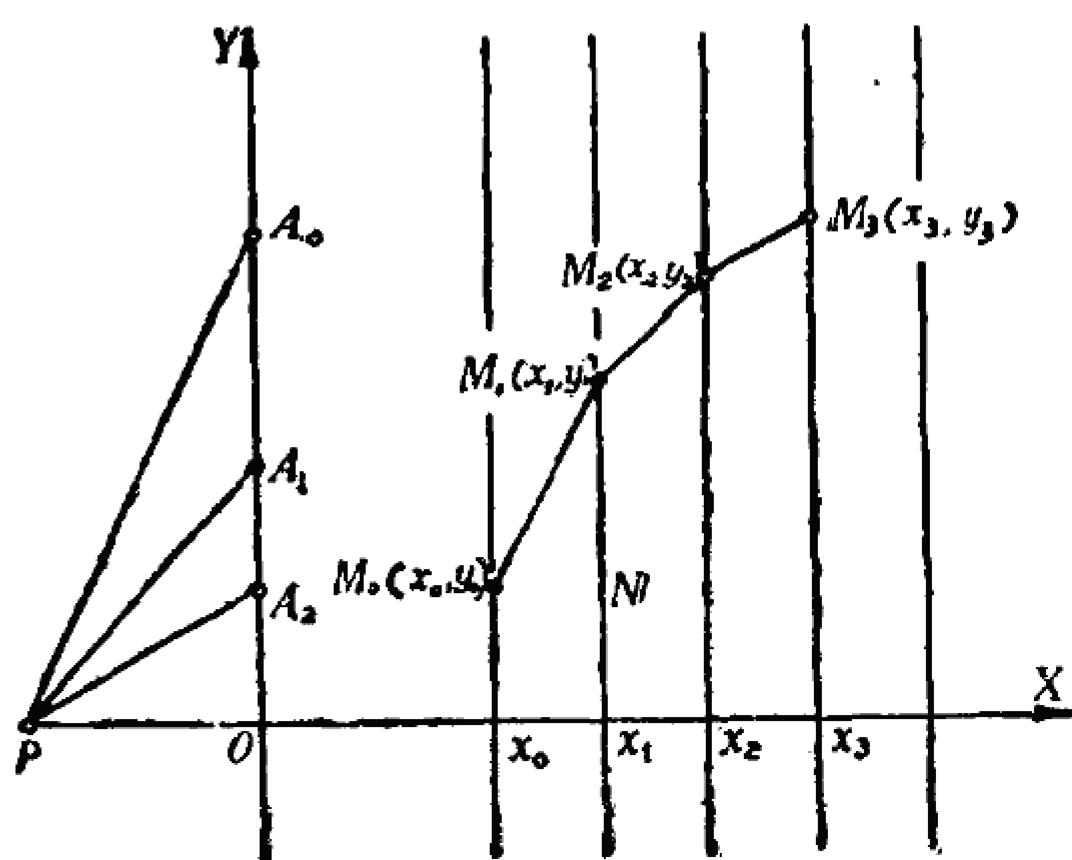


圖 9.

x^0	$a_1 = 0$
x^1	$2a_2 = \frac{1}{2}$
x^2	$3a_3 = \frac{1}{2}a_1$
x^3	$4a_4 = \frac{1}{2}a_2$
…	…………
x^n	$(n+1)a_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n-1}$
…	…………

6. 尤拉——勾犀方法 上一段中所講的作方程(42)的近似積分曲線的方法可以簡化，我們用平行於 OY 的直線來替代方格網。當預先給定橫坐標 x，要計算積分曲線的縱坐標時，這個改善了的尤拉方法比較簡單而且實用。

設 $M_0(x_0, y_0)$ 是積分曲線的起點（圖 9 ）。由這點引斜率是 $f(x_0,y_0)$ 的直線，與平行於 OY 軸的直線 $x=x_1$ 交於一點 M_1. 設 M_1 的縱坐標是 y_1. 顯然，它由關係式

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

確定，因爲線段 $\overline{M_0N}$ 與 $\overline{NM_1}$ 之長各爲 $x_1 - x_0$ 與 $y_1 - y_0$, 而且

$\angle NM_0\ M_1$ 的正切等於 $f(x_0, y_0)$。

由點 (x_1, y_1) 再引斜率是 $f(x_1, y_1)$ 的半線 M_1M_2，與平行與 OY 軸的下一條直線 $x=x_2$ 交於一點 M_2. 像上面一樣，這個交點的縱坐標由關係式

$$y_2-y_1=f(x_1, y_1)(x_2-x_1)$$

確定。

完全一樣，由點 $M_2(x_2, y_2)$ 可以作出下一個點 $M_3(x_3, y_3)$ 來，如此作下去。圖 9 上的線段 $PA_0, PA_1\cdots$ 與圖 8 中的作用相同。

現在設當給定 x 的值時，我們要確定滿足初始條件 (43) 的方程 (42) 的解的值。根據以上所述，我們就有下面的作法：先把區間 (x_0, x) 分爲小區間：

$$x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x \tag{48}$$

再由下列公式依次確定縱坐標 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$：

$$\left\{\begin{aligned} y_1-y_0&=f(x_0, y_0)(x_1-x_0)\\ y_2-y_1&=f(x_1, y_1)(x_2-x_1)\\ y_3-y_2&=f(x_2, y_2)(x_3-x_2)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_{n-1}-y_{n-2}&=f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})\\ Y-y_{n-1}&=f(x_{n-1}, y_{n-1})(x-x_{n-1}). \end{aligned}\right. \tag{49}$$

當 [5] 中所述關於函數 $f(x, y)$ 的性質的條件成立時，假若給定的 x 的值與初值 x_0 足够近，則當所分的小區間的數目增加，而每一個小區間都趨向零時，由公式(49)所得到的 Y 的值，將趨向未知積分曲線的縱坐標 y 的眞正的值。

由等式(49)逐項相加，不難得求：

$$\begin{aligned} y\sim Y=y_0&+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)+f(x_1, y_1)(x_2-x_1)+\cdots+\\ &+f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-2})+f(x_{n-1}, y_{n-1})(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{50}$$

在簡單的情形下，對於方程

$$y' = f(x),$$

上式就可以寫成：

$$y_0+\sum_{s=0}^{n-}f(x_s)(x_{s+1}-x_s),$$

我們知道，這是積分 $y_0+\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx$ 的近似表達式 [I, 87]，而這個積分也就是所給的方程的解。

由公式(49)計算時，要按照以下的次序。首先由公式(49)算出差 y_1-y_0。把它與 y_0 相加，就得到第二個縱坐標 y_1，再利用(49)中第二個公式求出差 y_2-y_1. 再把它與 y_1 相加，就得到第三個縱坐標 y_2，再利用(49)中第三個公式求出差 y_3-y_2. 如此作下去。最後把所有這些差與 y_0 相加，就求出 Y 來了。

例 用上述方法求方程(46)的解，初始條件是(47)。把小區間 (x_0, x_1), (x_1, x_2),……之長都取作 0.1。

計算的結果列在附表中。第一行是 x 的值，第二行是對應於它們的 y 的值，第三行是 $f(x, y)$ 的值，就是 $\frac{xy}{2}$ 的值，第四行是差分 $\Delta y = y_{s+1}-y_s$，最後一行是準確的積分曲線 $y=e^{\frac{x^2}{4}}$ 的縱坐標的值。

當 $x=0.9$ 時，由表看出，差誤小於 0.031，就是差誤的百分比約爲 2.5%。

x	y	$\frac{xy}{2}$	$\Delta y=\frac{xy}{2}\cdot 0.1$	$e^{\frac{x^2}{4}}$
0	1	0	0	1
0.1	1	0.05	0.005	1.0025
0.2	1.005	0.1005	0.0101	1.0100
0.3	1.0151	0.1523	0.0152	1.0227
0.4	1.0303	0.2061	0.0206	1.0408
0.5	1.0509	0.2627	0.0263	1.0645
0.6	1.0772	0.3232	0.0323	1.0942
0.7	1.1095	0.3883	0.0388	1.1303
0.8	1.1483	0.4593	0.0459	1.1735
0.9	1.1942	0.5374	0.0537	1.2244

7. **一般積分** 改變初始條件

$$y|_{x=x_0}=y_0$$

中的 y_0 的值，就得到方程(42)的無窮多個解；或者，用幾何的解釋來說，就是得到一個依賴於任意常數 y_0 的**積分曲線族**，其中 y_0 是積分曲線與直線 $x=x_0$ 的交點的縱坐標。也有時在方程的解中出現的任意常數，不是代表 y 的初值，而是具有一般的形式的：

$$y=\varphi(x, C). \tag{51}$$

我們在[1]中已經講過，方程(42)的這種具有任意常數的解叫做這方程的一般積分，一般積分也可以寫成隱示式：

$$\psi(x, y, C)=0. \tag{52}$$

給常數 C 以一定的數值，就得到方程(42)的一個確定的解；這樣的解叫做**方程的特殊解**。爲要由一般積分(52)所對應的曲線族中，找出一條通過點 (x_0, y_0) 的曲線，只要由條件

$$\psi(x_0, y_0, C)=0 \tag{53}$$

確定出 C 的數值就成了。

求一級微分方程的積分的反面問題就是：**給定依賴於一個參數 C 的曲線族(52)，要作出一個微分方程，使它的一般積分所對應的曲線族就是所給的曲線族。**

求所給的方程(52)對 x 的微商，得到：

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y}y'=0 \tag{54}$$

由(52)及(54)兩個方程中消去 C，就得到曲線族(52)的未知微分方程

$$\Phi(x, y, y')=0.$$

一般積分(52)可以寫成解出任意常數 C 的形式：

(55) $$\omega(x, y)=C.$$

對於可分離變量的方程，我們得到的一般積分，就是這樣的形狀。方程(55)左邊的函數 $\omega(x, y)$ 叫做微分方程(42)的積分。

把這個函數中的 y, 用方程(42)的任何一個解來替代，我們應當得到一個常數。就是說：**方程(42)的積分是 x 與 y 的這樣的一個函數，它對 x 的全微商等於零〔根據方程(42)〕。**

取方程(55)兩邊對 x 的全微商，得到 [I, 69]:

$$\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial y}y'=0$$

或者，根據假設，y 是方程(42)的解，可以用 $f(x, y)$ 來替代 y'，就得到：

(56) $$\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial y}f(x, y)=0.$$

不論我們把方程(42)的那個解代入到函數 $\omega(x, y)$ 中，$\omega(x, y)$ 應當總滿足這個方程。再根據存在與唯一定理中初始條件的任意性，如果我們取方程(42)的所有的解，則 x 與 y 的值可能是隨意地。就是說，**對 x 與 y 來講，函數 $\omega(x, y)$ 恆滿足方程 (56)。**最後我們講，當方程(42)的解由穩示式

(57_1) $$\omega_1(x, y)=0$$

給出時，如何來驗證。

像上面一樣，得到方程

(57_2) $$\frac{\partial\omega_1(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1(x, y)}{\partial y}f(x, y)=0,$$

對於曲線(57_1)上所有的點，這個關係式總應當成立，就是說，只是根據等式(57_1)，可以斷定，對 x 與 y 來講，等式(57_2)應當恆成立，換句話說，就是由(57_1)應當推出(57_2)。

例 考慮方程

$$y'=\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}.$$

不難看出,圓周

$$x^2+y^2-1=0$$

是這方程的一個解。實際上,在所給的情形下,$f(x,y)=\frac{1-3x^2-y^2}{2xy,}$,而$\omega_1(x,y)=x^2+y^2-1$. 等式($57_2$)就成爲:

$$2x+2y\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}=0 \text{ 就是 } \frac{1-x^2-y^2}{x}=0,$$

根據圓周的方程,這等式顯然成立。再證所給微分方程的一般積分是:

$$x^3+xy^2-x=C$$

把 $\omega(x,y)=x^3+xy^2-x$ 代入到(56)中,就得到:

$$3x^2+y^2-1+2xy\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}=0$$

直接看出,當 x 與 y 取任何值時,這個等式恆成立。

設所給的微分方程是關於 y' 的隱示式:

(58) $$\Phi(x,y,y')=0.$$

解出 y',就可以化爲(42)的形狀,不過函數 $f(x,y)$ 可能是多値函數。假設它有 m 個不同的值,於是對應於指定的 x 與 y, y' 就有 m 個不同的值,這時在一個指定的點,就對應的有不只一個方向,而有 m 個不同的方向。如此,在平面上就不只規定了一個方向場,而是 m 個不同的方向場。對於每一個場說來,通過一個指定的點,就有一條積分曲線;於是總計起來,通過一個指定的點,方程(58)就有 m 條積分曲線。這個方程的一般積分含有一個,且只有一個任意常數,就是有(52)的形狀;但是,一般來講,方程(53)應該不僅給出 C 一個值,而是 m 個不同的值。

對於最後講的這一點，我們舉一個人造的例子，在這個例中，有含有任意常數的解，但嚴格來講，它不是一般積分。考慮微分方程：

(59) $$y'^2 - xy' = 0.$$

把左邊分解因子 $y'(y'-x)=0$，這裏實際有兩個各別的微分方程：

$$y'=0 \text{ 與 } y'-x=0$$

它們的一般積分各為：

(59_1) $$y-C=0$$

與

(59_2) $$y-\frac{1}{2}x^2-C=0.$$

我們可以把這兩個方程合寫為一個：

$$(y-C)(y-\frac{1}{2}x^2-C)=0,$$

它就給出了方程（59）的一般積分。這時，通過平面上任何一點有兩條積分曲線：一條直線 (59_1) 與一條拋物線 (59_2)。顯然，公式 (59_1) 給出方程（59）的含有任意常數的解，但是這個解不是方程（59）的一般積分，而只是方程 $y'=0$ 的一般積分。

方程(42)或(58)可能有些解不包含在一般積分族中，就是說，無論常數 C 取什麼特殊值，這些解不能由公式(52)得出來。這樣的解叫做方程的**奇異解**。在 [10] 中我們將討論關於這樣的解的求法與幾何解釋的問題。

嚴格說來，叫做一般積分的應該是這樣的解，它含有任意常數，而代表了在任何初始條件下由存在與唯一定理所確定的全部解的族。叫做奇異解的應該是這樣的解，在它的所有的點，都不能滿足存在與唯一定理的條件。當對於方程(42)[或 58] 中函數 $f(x,y)$ [或 $\Phi(x,y,y')$] 有一定的假定時，所有這些定義就完全準確了。

在微分方程(42)[或方程(58)] 中，用任意常數 C 來替代 y'，就得到曲線族：

$$f(x,y)=C_1, \text{ 或 } \Phi(x,y,C_1)=0.$$

這個族中的每一條曲線，代表了一個平面上具有同一切線方向的點的軌跡；所以，這個曲線族叫做所給的微分方程的等傾斜線族。特別是在地球表面的磁場中，等傾斜線是這樣的曲線，沿着它磁針的方向是保持不變的。

對於齊次方程 [3]，等傾斜線是通過坐標原點的直線。

現在我們討論，在什麼情形下，等傾斜線是方程的積分曲線，也就是說，它是方程的解。取任何一條等傾斜線

$$\Phi(x, y, b)=0,$$

對應於 $C_1=b$。對於這等傾斜線上的點，微分方程給出同一的切線方向，就是 $y'=b$。為要這等傾斜線是方程的解，必須且僅須這等傾斜線在所有的點的切線斜率都等於 b；由此直接推知，這等傾斜線應當是斜率為 b 的直線，因為由 $y'=b$ 推出 $y=bx+c$，其中 c 是某一常數。所以，**只有在一種情形下，等傾斜線是方程的解，這種情形就是：等傾斜線是一條直線，而且對於這直線上的點由微分方程所確定的不變的切線方向與這直線的方向相同。**

例 求曲線，使得它的法線長為常量 a（圖 10）。利用法線長的表達式 [I ,77]，就有微分方程

$$\pm y\sqrt{1+y'^2}=a. \tag{60}$$

把這方程的兩邊乘二次方，再解出 y'，就得到：

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}. \tag{61}$$

這方程的右邊當 $|y|\leqslant a$ 時有意義，也就是在兩條直線

$$y=a \text{ 與 } y=-a \tag{62}$$

之間的寬帶中有意義，因為否則根號下的表達式是負的；並且在這寬帶內每個點，y' 有兩個不同的值。

由方程(61)分離變量,得到:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm dx. \tag{63}$$

求積分,不難得到:

$$(x-C)^2+y^2=a^2, \tag{64}$$

就是說,它是圓心在 OX 軸上半徑等於 a 的圓族(圖 10)。所有這些圓,在界於直線(62)的寬帶中,並且通過這寬帶中每一個點,這圓族中有兩個圓。

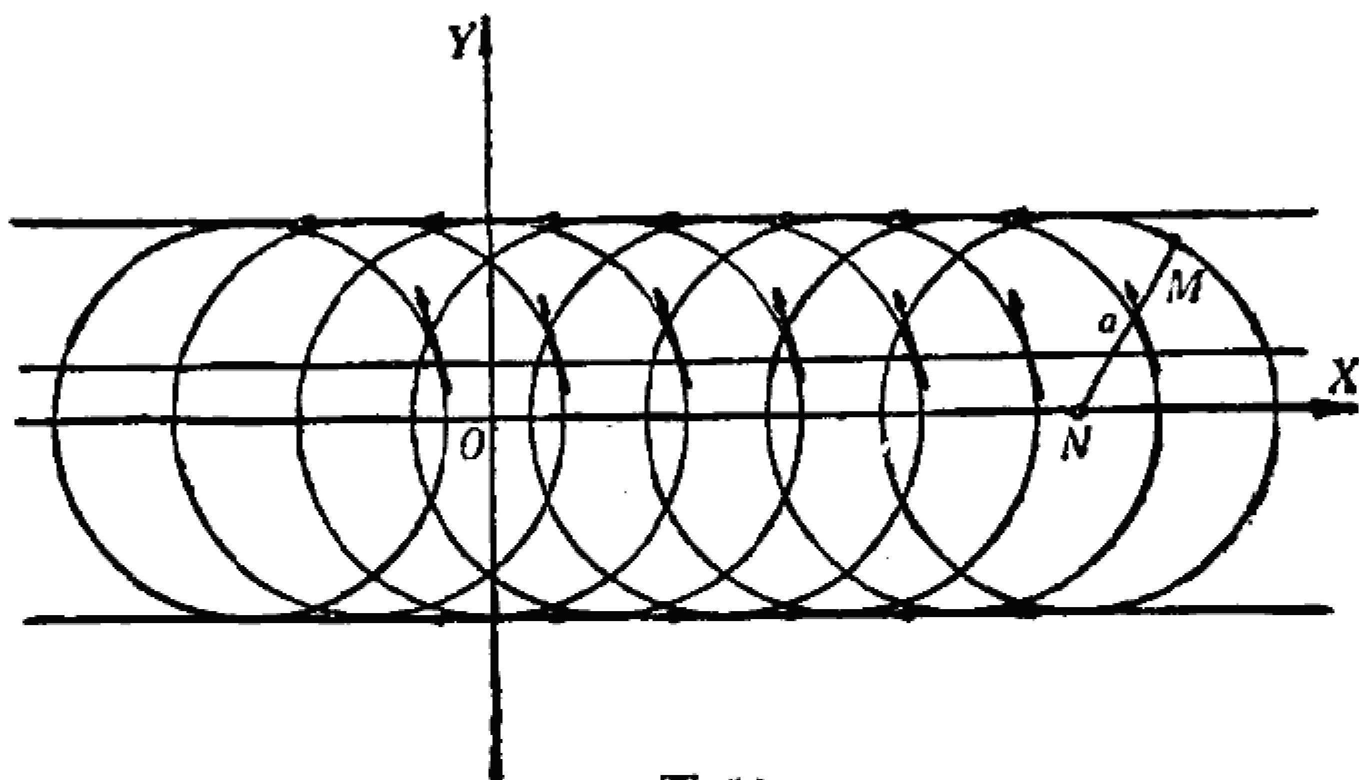


圖 10.

由方程(61)化爲方程(63)時,我們用 $\sqrt{a^2-y^2}$ 除了,於是可能因此丟掉兩個解 $y=\pm a$。直接代入,不難看出,實際上它們是方程(61)的解。這兩個解的幾何圖形是直線,它們不包含在一般積分族(64)中,換句話說,無論任意常數 C 取什麼值,由公式(64)不能得到這兩個解,就是說,它們是這方程的奇異解。

用常數 C_1 替代方程(60)中的 y',得到等傾斜線族:

$$\pm y\sqrt{1+C_1^2}=a.$$

這是平行於 OX 軸的直線。沿這些直線,圓(64)的切線方向保持不變。

特別是,直線(62)也是等傾斜線,沿這直線,y' 保持常值零,與這兩條直線的斜率相同,因此,這兩條直線同時又是方程(61)的解。

8. 克列羅方程 下面形狀的方程叫做克列羅方程:

$$y=xy'+\varphi(y'). \tag{65}$$

用任意常數C來替代 y, 就得到這方程的等傾斜線族:

(66) $$y = xC + \varphi(C).$$

我們看出,所有的等傾斜線都是直線,而且其中每條直線的斜率就是用以替代 y' 的常數 C, 就是說,直線(66)中每一條的方向,與對於這直線上的點由這微分方程所確定的不變的切線方向相同。回憶上一段中所述,可以肯定,(66)中每條直線都是方程(65)的解,就是說,等傾斜線族(66)同時是方程(65)的一般積分族。

現在我們講,求方程(65)的解的另一個方法,由這個方法,我們不僅得到方程(65)的一般積分,並且得到它的奇異解。記作 $y'=p$, 把方程(65)寫成:

(67) $$y = xp + \varphi(p).$$

問題就化爲求 x 的函數 p: $p=\psi(x)$, 使得當用 $p=\psi(x)$ 代入到(67)的右邊時,得到 x 的函數 y, 它的微商 y' 要等於: $y' = p = \psi'(x)$ 取(67)兩邊的微分,並讓左邊的 $dy = y'dx = pdx$, 就得到一個關於 p 的微分方程:

$$pdx = pdx + xdp + \varphi'(p)dp \text{ 或 } [x+\varphi'(p)]dp = 0.$$

讓每一個因子等於零,我們得到兩種情形。$dp=0$ 的情形給出了 $p=C$, 其中 C 是任意常數;把 $p=C$ 代入到方程(67)中,得到一般積分(66)。在第二個情形下,我們有:

(68) $$x + \varphi'(p) = 0.$$

由方程(67)與(68),就是由方程

(69) $$y = xp + \varphi(p) \text{ 與 } x + \varphi'(p) = 0$$

消去 p, 就又得到方程(67)的一個解,它不含有任意常數。通常這個解是方程的奇異解。

下面這個幾何問題可以引到克列羅方程:設要求切線具有指定性

質的一條曲線，而這性質只與切線有關與切點無關。實際上，切線的方程具有下面的形狀：

$$Y-y=y'(X-x), \text{ 或 } Y=y'X+(y-xy')$$

於是切線的任何性質可以用 $(y-xy')$ 與 y' 的關係式來表達：

$$\Phi(y-xy', y') = 0.$$

解出 $y-xy'$，就得到有如(65)式的方程。顯然，克列羅方程的一般積分所對應的直線不是這問題所要求的答案，而方程的奇異解才是所要求的答案。

例 求一曲線，使得它的切線被兩坐標軸截下的線段 T_1T_2 具有定長，等於常量 a (圖 11)。

由切線的方程求出切線在兩坐標軸上的截距 OT_1 與 OT_2，就不難作出未知曲線的微分方程。

$$\frac{(y-xy')^2}{y'^2}+(y-xy')^2=a^2 \text{ 或 } y=xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

它的一般積分

$$(70)\quad y=xC\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$$

是一個直線族，其中每條直線在兩坐標軸之間的線段長爲 a，爲要求奇異解，我們由下面兩個方程消去 p，一個方程是：

$$(71)\quad y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

另一個是：

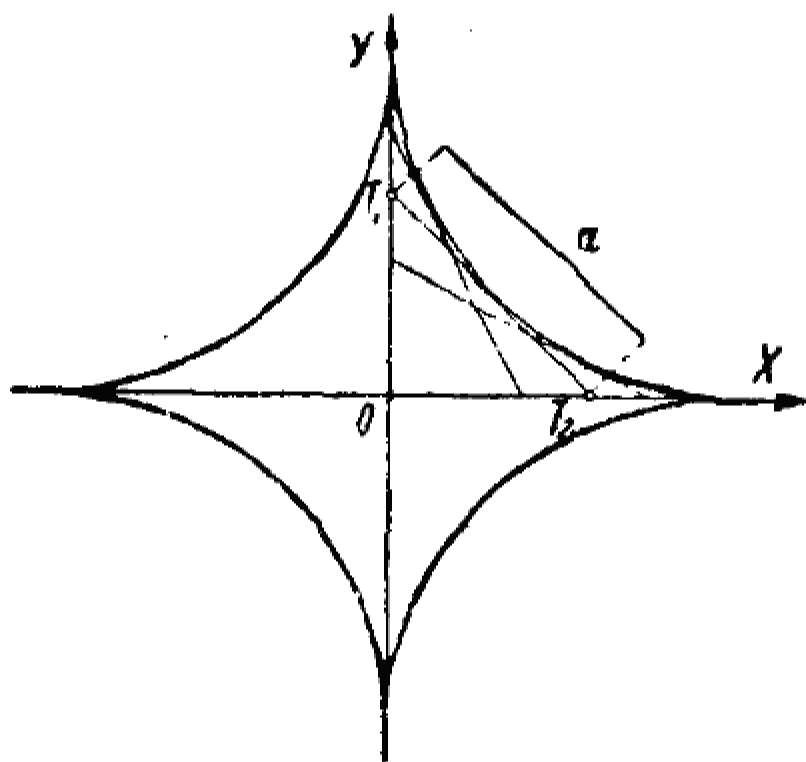


圖 11.

$$x\pm a\frac{\sqrt{1+p^2}-\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2}=0,$$

它可以化為：

$$x \pm \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} = 0.$$

讓 $p=\text{tg}\,\varphi$，就得到：

$$x = \mp a \cos^3 \varphi$$

再由方程（71）求得

$$y = \mp a \cos^3 \varphi \tan\varphi \pm a \sin\varphi = \pm a \sin^3 \varphi.$$

把這兩個等式各乘 $\frac{2}{3}$ 次方，然後相加，就消去了 φ：

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

就是，未知曲線是星形線，我們在［I, 80］中曾經講過這個曲線。直線族（70）形成了它的切線族（圖 11）。

9. 拉格朗日方程 下面形狀的方程叫做拉格朗日方程：

$$y = x\varphi_1(y') + \varphi_2(y'), \tag{72}$$

其中 $\varphi_1(y')$ 應該算作不是 y'，因為當 $\varphi_1(y')=y'$ 時，就成為克列羅方程了。

像對克列羅方程一樣，對於方程(72)，我們也用求微分的方法。記作 $y'=p$，把這方程寫成：

$$y = x\varphi_1(p) + \varphi_2(p). \tag{73}$$

取兩邊的微分，就得到關於 p 的一級微分方程：

$$p\,dx = \varphi_1(p)\,dx + x\varphi_1'(p)\,dp + \varphi_2'(p)\,dp. \tag{73_1}$$

用 dp 除，得到方程：

$$[\varphi_1(p) - p]\frac{dx}{dp} + \varphi_1'(p)x + \varphi_2'(p) = 0,$$

若算作 x 是 p 的函數，這就是個線性微分方程。兩邊用係數 $[\varphi_1(p)-p]$ 除，就化為(25)的形狀，於是得到它的一般積分有如下面的形狀：

(74) $$x=\psi_1(p)C+\psi_2(p).$$

把這個 x 的表達式代入到方程(72)中，得一個關於 y 的方程：

(75) $$y=\psi_3(p)C+\psi_4(p).$$

公式(74)與(75)給出 x 與 y 的通過任意常數 C 與參變量 p 的表達式，就是說，它們是拉格朗日方程的一般積分的參變方程。若由方程(74)與(75)中消去參變量 p，就得到一般積分的普通方程。

當用 dp 除這方程時，我們可能丟掉對應於 $dp=0$ 的解，就是對應於 p 或 y' 是常數的解。但是 y' 是常數使得 y 是 x 的一次多項式，所以如果它是解的話，這個解應當是直線。還要注意，當 $p=a$ 時，方程(73_1)化為 $adx=\varphi_1(a)dx$，就是說，這個常數 a 應當是由方程 $\varphi_1(a)-a=0$ 所確定的。

現在我們講這個事實的幾何解釋。用常數 C_1 來替代方程(72)中的 y'，就得到等傾斜線的方程：

(76) $$y=x\varphi_1(C_1)+\varphi_2(C_1),$$

就是說，拉格朗日方程的等傾斜線是直線。在這些等傾斜線中也應當找一找這方程的直線解，為此，需要等傾斜線的斜率 $\varphi_1(C_1)$ 與沿這等傾斜線的切線斜率 C_1 相同：

$$\varphi_1(C_1)-C_1=0.$$

解這個方程，再把求得的 C_1 的值代入到方程(76)中，就得到所要求的解，其中應當包含有上述的奇異解。

10. 曲線族的包絡及奇異解　我們已經講過兩個例，在這兩個例中，除去一般積分外，還得到有奇異解。在[7]的例中，一般積分是圓族：

(77) $$(x-C)^2+y^2=a^2$$

其圓心在 OX 軸上，定半徑等於 a。

奇異解是兩條平行於 OX 軸的直線 $y=\pm a$。這兩條直線在每一點與圓族(77)中一個圓相切(圖 10)。在[8]的例中，一般積分是一個直線族，其中每條直線被兩坐標軸所截的線段之長等於常量 a；奇異解是一個星形線，它在每一點與這直線族的一條直線相切，就是說，這直線族是這星形線的切線族。

這兩個例很自然的引導出曲線族的包絡的概念。設給定曲線族

$$\psi(x, y, C)=0, \tag{78}$$

其中 C 是任意常數。**所謂曲線族的包絡是這樣一條曲線，在這曲線上所有的各個點，它與曲線族中各個不同的曲線相切，就是說，在這曲線上每一點，這曲線與曲線族中通過這點的曲線有公切線。**

現在我們講包絡的求法。首先要確定曲線族(78)的切線的斜率。由等式(78)求微商，並注意 y 是 x 的函數，而 C 是任意常數，就得到：

$$\frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial x}+\frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial y} \frac{d y}{d x}=0,$$

由此[I, 69]:

$$\frac{d y}{d x}=-\frac{\frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial x}}{\frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial y}}. \tag{79}$$

設包絡的未知方程是

$$R(x, y)=0. \tag{80}$$

我們可以算作這方程左邊的未知函數 $R(x, y)$ 具有 $\psi(x, y, C)$ 的形狀，其中只不過 C 並非常數，而是 x 與 y 的未知函數。實際上，對於任何函數 $R(x, y)$，我們可以寫成等式

$$R(x, y)=\psi(x, y, C),$$

由此就確定出 C 是 x 與 y 的什麼函數，於是我們可以找像(78)的形狀

的包絡的方程，只不過算作 C 不是常數，而是 x 與 y 的未知函數。求方程(78)兩邊的微分，注意 C 已經不是常數，就得到：

$$(81)\qquad \frac{\partial\psi(x,y,C)}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi(x,y,C)}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi(x,y,C)}{\partial C}dC=0.$$

由條件，未知包絡的切線的斜率 $\frac{dy}{dx}$，應當與曲線族(78)中過這切點的曲線的切線斜率相同，就是說，由等式(81)給出的 $\frac{dy}{dx}$ 應當與(79)中的表達式相同，而只有在公式(81)的左邊的第三項等於零時，也就是 $\frac{\partial\psi(x,y,C)}{\partial C}dC=0$ 時，這才能成立。但是 $dC=0$ 給出 C 是常數，就是說仍然給出了族中的曲線，而不是包絡；於是推知，爲要得到包絡，我們應當設

$$\frac{\partial\psi(x,y,C)}{\partial C}=0$$

由這方程確定出 C 是 (x,y) 的一個函數。把這個用 x 與 y 來表達的 C 的表達式代入到等式(78)中，就得到所要求的包絡的方程(80)，就是說，**族(78)的包絡的方程，可以由兩個方程：**

$$(82)\qquad \psi(x,y,C)=0;\quad \frac{\partial\psi(x,y,C)}{\partial C}=0$$

中消去 C 求得。沿着包絡移動時，它與族中各個不同的曲線相切，而每一條曲線是由常數 C 的一個值所確定的，如此就建立了，求包絡的方程時，也用(78)的形狀，而把 C 算作變量的概念。

現在再回到微分方程的奇異解的問題。設(78)是微分方程：

$$(83)\qquad \Phi(x,y,y')=0$$

的一般積分族，就是說，在族(78)中任何一條曲線上，點的坐標 (x,y) 與切線的斜率滿足方程(83)。在包絡上每一個點，x,y 與 y' 的值與族(78)

中某一條曲線在這點的這些數值全同，就是說，包絡的 x, y，與 y' 也滿足(83)。**所以，方程的一般積分族的包絡也是這方程的積分曲線。**

如此，若 $\psi(x, y, C)$ 是方程(83)的一般積分，則在某些情形下，由方程(82)消去 C 就得到奇異解。我們在這裏說某些情形，而不說所有的情形，是有下面的理由的。由方程(82)消去 C，我們可以得到的，不僅是包絡，而除包絡外，可以得到族(78)中所有的曲線的奇異點的集合，也就是，(78)中曲線的這種點的軌跡，在這些點，這些曲線沒有確定的切線[I, 76]。此外，也有時包絡就是曲線族(78)中的一條。我們現在不嚴格來討論包絡與奇異解的理論。這一部分理論應當與我們在[5]中所講的存在與唯一定理有密切的連繫。我們只限於用下面幾個例子來說明這個問題。

最後我們提出，假若由微分方程導出它的一般積分時，每一步運算都沒有破壞方程的相當性，則不可能有奇異解。反過來說，顯然，像我們在[7]中所作的，奇異解應當在丢掉的解中去尋找。

1．求圓族(77)：

$$(x-C)^2+y^2=a^2$$

的包絡。

在這情形下，方程(82)有下面的形狀：

$$(x-C)^2+y^2=a^2,\quad -2(x-C)=0$$

第二個方程給出 $C=x$，代入到第一個方程中，就得到 $y^2=a^2$，就是兩條直線 $y=\pm a$，我們以前已經得到這結果。

2．克列羅方程 $y=xy'+\varphi(y')$ 的一般積分是

$$y=xC+\varphi(C).$$

爲要求包絡，應由兩個方程：

$$y=xC+\varphi(C);\quad 0=x+\varphi'(C)$$

中消去 C。這兩個方程與[5]中方程(69)全同，只是 p 換成了 C 而已，就是說，這是以前求

克列羅方程的奇異解的法則。

3. 曲線 $y^2 = x^3$ 是所謂半立方抛物線(圖 12)。把它沿着 OY 軸平行移動就得到半立方抛物線族:

$$(y + C)^2 = x^3.$$

其中每一條曲線在 OY 軸上有一個尖點,在這點,這曲線有平行於 OX 軸的切線, 在所給的情形下,方程(82)有下面的形狀。

$$(y + C)^2 = x^3;\quad 2(y+C) = 0.$$

消去 C, 得到 $x=0$, 就是 OY 軸。在這情形下, OY 軸不是這族的包絡,而是族中曲線的奇異點的軌跡。

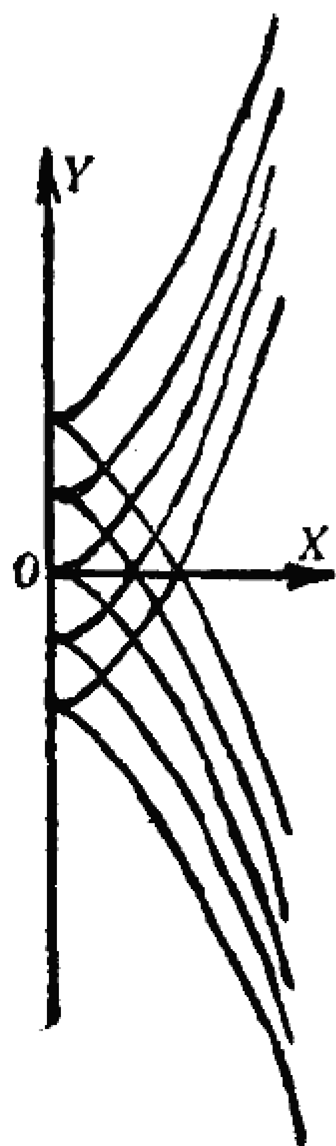


圖 12.

4. 考慮曲線族:

$$y = C(x - C)^2.$$

當 $C \neq 0$ 時,這是抛物線,而當 $C = 0$ 時是 OX 軸,這時方程(82)有下面的形狀:

$$y = C(x - C)^2,\quad (x-C)(x - 3C) = 0.$$

由第二個方程給出 $C = x$ 或 $C = \frac{1}{3}x$。代入到第一個方程中,得到或者 $y = 0$, 或者 $y = \frac{4}{27}x^3$。第一個曲線 $y = 0$ 是 OX 軸,它包含在這曲線族中,而立方抛物線 $y = \frac{4}{27}x^3$ 是這族的包絡。

5. 設有圓心在坐標原點,半徑長爲 1 的一個圓, 取出這個圓的垂直於 OX 軸的弦, 以每一個這樣的弦爲直徑作一個圓。如此就得到一個圓族。若 $x = C$ 是所說的弦與 OX 軸交點的橫坐標, 則對應的圓的半徑的平方就是 $1 - C^2$ (圖 13), 而這族的方程就是:

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 - C^2.$$

對 C 求微商,得到方程

$$-2(x - C) = -2C;$$

由這兩個方程消去 C, 就得到一個方程

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

就是得到一個以坐標軸爲對稱軸,半軸長各爲 $\sqrt{2}$ 與 1 的橢圓。由圖看出, 這個橢圓不是與

族中所有的圓都相切的。

11. y' 的二次方程　現在我們從奇異解的觀點更仔細的來考慮 y' 的二次微分方程：

(84) $$\Phi(x, y, y') = y'^2 + 2P(x, y)\, y' + Q(x, y) = 0,$$

其中 $P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$ 在全部平面上都是單值的，連續的，並且有對 y 的連續微商，例如，它們都是 x 與 y 的多項式。解出 y'，就得到：

(85) $$y' = -P(x,y) \pm \sqrt{R(x, y)},$$

其中我們記作 $R(x, y) = [P(x, y)]^2 - Q(x, y)$。在 $R(x,y) > 0$ 的一部分平面中，方程 (85) 相當於兩個微分方程，並且依照存在與唯一定理，通過這一部分平面的每一個點，應當有兩條，而且只有兩條積分曲線。在這一部分平面中，

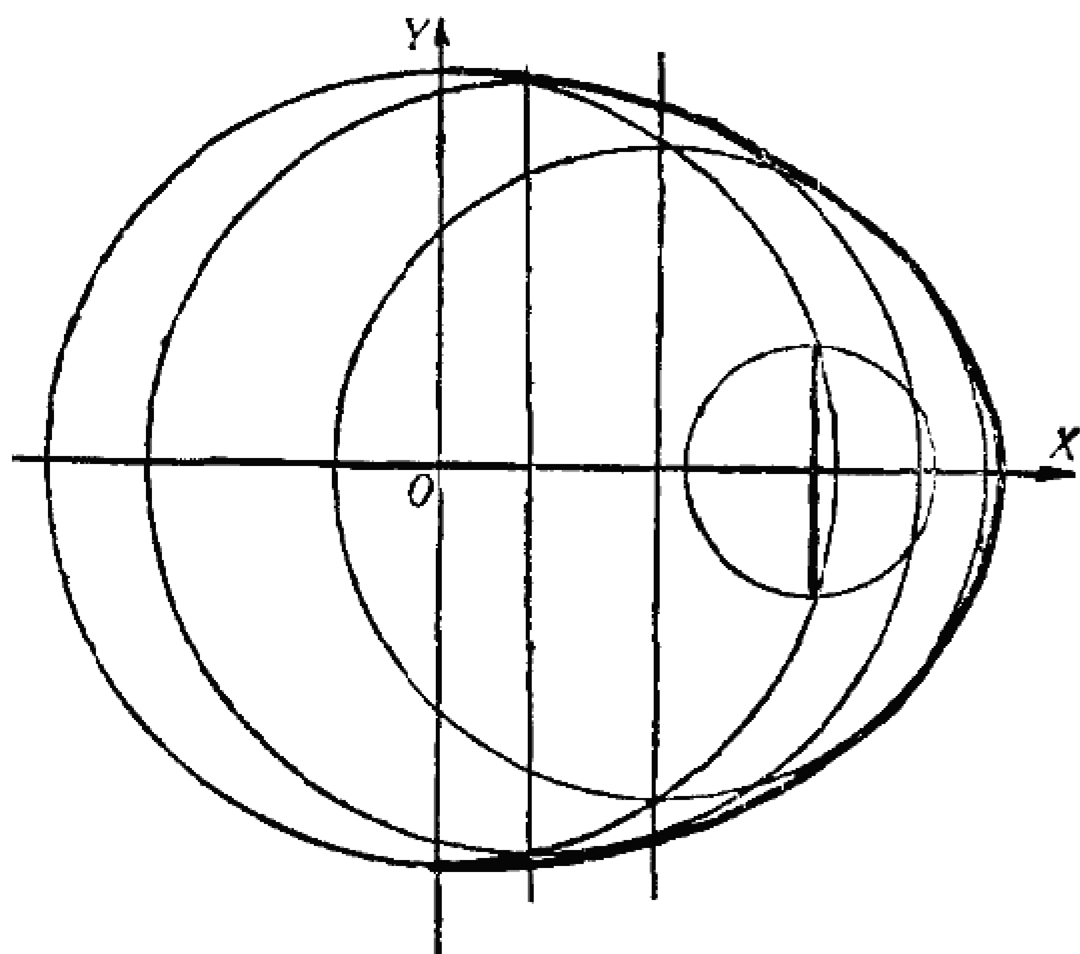


圖 13.

沒有微分方程(84)的任何的奇異解，在 $R(x,y) < 0$ 的一部分平面中，方程 (85) 給不出 y' 的實值，於是在這一部分平面中，沒有積分曲線。最後，我們考慮方程

(86) $$R(x,y) = 0,$$

它可能確定出平面上一條或幾條曲線。只有在這些曲線中，可能有微分方程 (84) 的奇異解。注意，方程 (86) 可以由方程 (84) 以及方程：

$$\frac{\partial\Phi(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \quad 就是 \quad y' + P(x, y) = 0$$

中消去 y' 而得到。後面這個方程表示出，對 y' 來講，方程 (84) 有重根。

1. 對於方程：

$$y = xy' + y'^2 \quad 就是 \quad y'^2 + xy' - y = 0,$$

公式 (86) 成為 $\frac{x^2}{4} + y = 0$，而拋物線 $y = -\frac{x^2}{4}$ 是這克列羅方程的奇異解。

2. 對於方程

$$y'^2+2xy'+y=0,$$

公式(86)成為 $y=x^2$。這個拋物線不滿足所給的微分方程,所以這個方程沒有奇異解。

12. 等角軌線 與曲線族

(87) $$\psi(x, y, C)=0$$

中每條曲線交成定角的曲線族,叫做所給的曲線族的**等角軌線**。

若這定角是直角,則這等角軌線叫做**正交軌線**,求等角軌線的問題可以化為解一級微分方程的問題。

由方程

$$\psi(x, y, C)=0; \quad \frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y}y'=0$$

中消去 C,就得到所給族(87)的微分方程[7]

(88) $$\Phi(x,y,y')=0.$$

我們先確定它的正交軌線。由於正交性的條件,在未知曲線與族中任何一條曲線的交點,它們的切線的斜率互為負倒數;於是推知,**為要得到正交軌線的微分方程,只須在所給族的微分方程中,用 $-\frac{1}{y'}$ 來替代 y' 就成了。**

如此,求正交軌線的問題,就化為求方程:

$$\Phi\left(x, y_1, -\frac{1}{y_1'}\right)=0$$

的積分的問題,其中 y_1 是 x 的未知函數。

現在回到等角軌線的一般問題,設未知曲線應當與族(87)中的曲線交成定角 φ。像以上一樣,我們用 y_1 來記未知曲線的縱坐標,並注意二角差的正切的表達式

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\psi_1-\psi)=\frac{\operatorname{tg}\psi_1-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\psi_1},$$

其中 $\operatorname{tg}\psi=y'$ 是(87)中曲線的切線的斜率，而 $\operatorname{tg}\psi_1=y_1'$ 是未知曲線的斜率，於是可以寫成

$$\frac{y_1'-y'}{1+y'y_1'}=\operatorname{tg}\varphi, \tag{89}$$

其中 φ 是由曲線(87)算到未知曲線的角度。由方程(89)與(88)消去 y' 就得到等角軌線的微分方程，然後應該再求積分。

在考慮流體的平面流動時，我們會遇到正交軌線。設有流體在平面上流動，於是在平面上每個點 (x, y) 有一個速度向量 $\mathbf{v}$—— 流動的速度。若這速度向量只依賴於平面上點的位置，而與時間無關，則這流動叫做駐立的或穩定的。我們將只考慮這樣的流動。此外，我們還設存在有速度的勢量，換句話說，就是向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 在兩坐標軸的投影是某一函數 $u(x, y)$ 的偏微商 $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$。在這情形下，曲線族

$$u(x, y)=C \tag{90}$$

叫做等勢線。

在所有的點切線方向與向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 的方向一致的曲線叫做流線，它給出流體粒子運動的路線。我們可以證明，流線是等勢線族的正交軌線。

設將速度向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 與 OX 軸的交角記作 φ，這向量的長記作 $|\mathbf{v}|$，依照條件 $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ 各爲 $\mathbf{v}(x, y)$ 在兩坐標軸上的投影，就有：

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=|\mathbf{v}|\cdot\cos\varphi, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=|\mathbf{v}|\cdot\sin\varphi,$$

由此得到流線的切線斜率的表達式：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \tag{91}$$

方程(90)對 x 求微商，就得到等勢線的切線斜率：

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}y'=0, \quad \text{由此} \quad y'=-\frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial x(x, y)}{\partial y}},$$

這裏得到的斜率是(91)中斜率的負倒數，由此推出，等勢線與流線是互相正交的。

如此，若某一曲線族是等勢線族，則它的正交軌線是流線族，反之亦然。在平面電場的情形下，等勢線族的正交軌線是這個場的電力線。

例 求曲線族

$$y = Cx^m \tag{92}$$

的等角軌線。

由方程

$$y = Cx^m, \quad y' = Cmx^{m-1}$$

消去 C，就得到族(92)的微分方程：

$$y' = m\frac{y}{x}.$$

把這個 y' 的表達式代入到公式(89)中，就得到未知族的微分方程：

$$\frac{y' - m\frac{y}{x}}{1+m\frac{yy'}{x}} = \frac{1}{k},$$

其中我們把常數 $\operatorname{tg}\varphi$ 記作了 $\frac{1}{k}$，而且把 y_1 簡寫成 y 了。這個方程可以化爲下面的形狀：

$$y' = \frac{km\frac{y}{x} + 1}{k - m\frac{y}{x}} \tag{93}$$

於是它是一個齊次方程。

若 $m = 1$，則族(92)是通過坐標原點的直線族，而與它們交成定角的未知曲線就應當是對數螺線 [I, 83] 或圓。

若 $m = -1$ 而 $k = 0$，這問題就成爲求等軸雙曲線

$$xy = C \tag{94}$$

的正交軌線。

在這情形下，方程(93)化爲可分離變量的方程：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \text{ 或 } xdx - ydy = 0.$$

求積分，就又得到一個等軸雙曲線族，只是對稱軸換了：

$$x^2 - y^2 = C.$$

不難驗證，若是把所給的族(94)繞原點轉45°，就得到這個曲線族。一般說來，當 $k=0$ 時，方程(93)化為下面的形狀：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{my},$$

而它的一般積分是：

$$my^2+x^2=C,$$

就是說，當 $m>0$ 時，曲線族(92)的正交軌線是橢圓，而當 $m<0$ 時是雙曲線。圖14上表示出拋物線族 $y=Cx^2$ 的正交軌線。

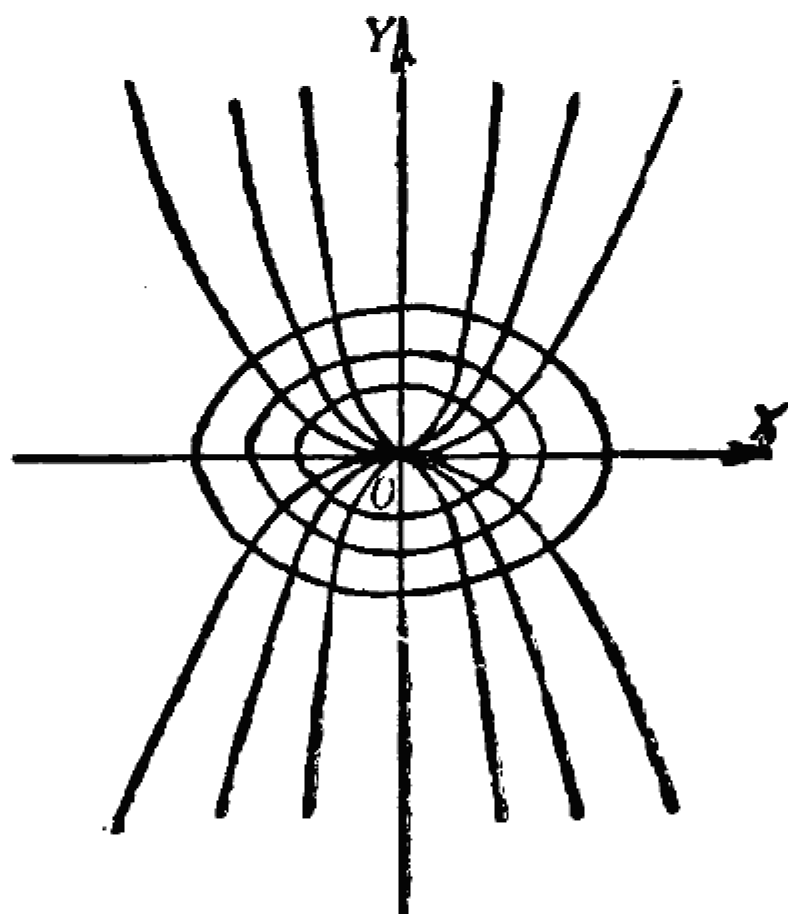


圖 14.

§2 高級微分方程及方程組

13. 一般概念 n 級常微分方程具有下面的形狀：

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0, \tag{1}$$

或者寫成解出 $y^{(n)}$ 的形狀：

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

自變量 x 的任何函數，若滿足方程(1)或(2)，就叫做這方程的解；而微分方程的求解問題也叫做**求微分方程的積分問題**。作為特例，我們考慮受有力 F 作用的質點 m 所作的直線運動；並設力 F 依賴於時間 t，點的位置及其速度。取這個點運動所沿的直線作 OX 軸，可以算作力 F 是 t, x 與 $\frac{dx}{dt}$ 的已知函數。依照牛頓定律，質點的質量與它的加速度的乘積應當等於作用力。於是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{3}$$

求這個二級方程的積分，就確定出 x 對於 t 的關係，也就是，在給定的

力的影響下，這點的運動。爲要得到這問題的確定的解，我們應當再給出初始條件，就是在某一初始時刻，這點的位置與它的速度，例如：當 $t=0$ 時，

$$x\Big|_{t=0}=x_0;\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=x_0'. \tag{4}$$

對於 n 級微分方程（1）或（2）來講，初始條件由下述條件組成：當 x 取某確定的值 $x=x_0$ 時，函數 y 與它的一直到$(n-1)$級微商應取的值：

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0;\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0';\ \ldots;\quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \tag{5}$$

在這些條件中，$y_0, y_0', \cdots, y^{(n-1)}$ 都是確定的已知數。

像一級微分方程一樣，對於 n 級微分方程，也有存在與唯一定理，可以敍述如下：若函數 $f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 是$(x, y, y', \cdots y^{(n-1)})$的單值函數，當 x 與 x_0 足夠近，且 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 與(5)的值足夠近時，它是連續的，而且有對 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 的一級連續偏微商，則初始條件(5)對應於方程(2)的一個確定的解。

改變初始條件中的常數 $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$，就可以得到無窮多個解，嚴格來講，就是得到依賴於 n 個任意常數的一族解。這些任意常數可能不以初始條件的形式在解中出現，而以一般的形式出現：

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n). \tag{6}$$

方程(2)的這樣的含有 n 個任意常數的解，叫做方程(2)的一般積分。一般積分的方程可以寫成隱示式：

$$\psi(x, y, C_1, C_2 \cdots, C_n)=0. \tag{7}$$

給常數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 以確定的值，就得到方程的一個特殊解。

由方程(6)或(7)對 x 求微商，直到$(n-1)$級，再用 $x=x_0$ 與初始條

件(5)代入，就得到 n 個方程，由這 n 個方程，可以確定出，對應於滿足初始條件(5)的解的任意常數的值。

若方程(2)的右邊展成各個差:

$$(x-x_0),(y-y_0),(y'-y'_0),\cdots,(y^{(n-1)}-y_0{}^{(n-1)})$$

的正整冪級數，則滿足初始條件(5)的解也可以寫成級數的形狀:

$$y=y_0+\frac{y'_0}{1!}(x-x_0)+\frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2+\cdots, \tag{8}$$

並且，像一級方程的情形一樣，由方程(2)可以求出這級數所有的係數的確定值。實際上，把 $x=x_0$ 與初始條件(5)代入到這方程中，就確定出 $y_0^{(n)}$。然後由方程(2)對 x 求微商，再代入以 $x=x_0$，初始條件(5)以及 $y^{(n)}|_{x=x_0}=y_0^{(n)}$，就確定出 $y_0^{(n+1)}$，以下類推。

這級數的係數也可以由另一個方法來確定，就是把帶有待定係數 $a_n, a_{n+1},\cdots$ 的冪級數

$$y=y_0+\frac{y'_0}{1!}(x-x_0)+\frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{y_0{}^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+a_n(x-x_0)^n+a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\cdots$$

代入到方程(2)兩邊作為其中的 y。依照 $(x-x_0)$ 的方冪把右邊整理好，再比較所得到的恆等式兩邊同次冪的係數，就可以逐步確定出上述的係數 [5]。

若方程(2)的右邊是所述各變量的多值函數，則給定的初始條件(5)，不只對應於方程的一個解，而是幾個解[7]。不包含於一般積分族中的解，就是無論常數 C_s 取任何值時，都不能由公式(6)得出來的解，叫做**方程的奇異解**。

例 現在來研究一下質點 m 在使其回至平衡位置的彈性力作用之下所作的直線運動，並設這個力的大小與質點所在位置到平衡點的距離成正比。此外，還假設這運動是在一種介

質中進行的，這種介質的阻力由兩項的和來表示，其中一項與速度成正比，另一項與速度的三次方冪成正比。用 x 來記這質點到平衡點的距離，就得到微分方程：

$$mx''=-k_1x-k_2x'-k_3x'^3,$$

其中 k_1, k_2, k_3 是正的比例係數。

我們考慮一個數字的例

$$x''=-x-0.1x'-0.1x'^3, \tag{9}$$

要求它的滿足初始條件

$$x|_{t=0}=x_0=1;\quad x'|_{t=0}=x_0'=1, \tag{10}$$

的展成 t 的冪級數形狀的解。方程(9)對 t 求微商，就得到：

$$\begin{cases} x''' = -x'-0.1x''-0.3x'^2x'' \\ x^{(IV)}=-x''-0.1x'''-0.3(x'^2x'''+2x'x''^2) \\ x^{(V)}=-x'''-0.1x^{(IV)}-0.3(6x'x''x'''+x'^2x^{(IV)}+2x''^3) \\ x^{(VI)}=-x^{(IV)}-0.1x^{(V)}-0.3(12x''^2x'''+6x'x'''^2+8x'x''x^{(IV)}+x'^2x^{(V)}) \end{cases} \tag{11}$$

把初始值(10)代入到方程(9)與方程(11)中，就逐步算出各級微商的初值：

$$x_0=1;\ x_0'=1;\ x_0''=-1.2;\ x_0'''=-0.52;$$
$$x_0^{(IV)}=0.544;\ x_0^{(V)}=0.2160;\ x_0^{(VI)}=3.1453.$$

利用泰勒公式，可以得到未知解的一個近似表達式 x_1：[1]

$$x_1=1+t-0{,}6t^2-0{,}0867t^3+0{,}0227t^4+0{,}0018t^5+0{,}0044t^6,$$

$$x_1'=1-1{,}2t-0{,}26t^2+0{,}907t^3+0{,}0090t^4+0{,}0262t^5,$$

$$x_1''=-1{,}2-0{,}52t+0{,}272t^2+0{,}036t^3+0{,}1311t^4.$$

下列表中算出了，當 t 由 0 改變到 1 時，每隔 0.1 的區間長，對應的 x_1, x_1' 與 x_1'' 的值。

---

[1] 注意，x_1' 與 x_1'' 的級數，並不是由 x 的級數求微商得到的，而是就 x_1' 與 x_1'' 應用泰勒公式得到的：

$$x_1'=x_0'+\frac{x_0''}{1!}t+\frac{x_0'''}{2!}t^2+\frac{x_0^{(IV)}}{3!}t^3+\frac{x_0^{(V)}}{4!}t^4+\frac{x_0^{(VI)}}{5!}t^5,$$

$$x_1''=x_0''+\frac{x_0'''}{1!}t+\frac{x_0^{(IV)}}{2!}t^2+\frac{x_0^{(V)}}{3!}t^3+\frac{x_0^{(VI)}}{4!}t^4.$$

t	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,04	0,008	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000
0,3	0,09	0,027	0,0081	0,0024	0,0007	0,0002
0,4	0,16	0,064	0,0256	0,0102	0,0041	0,0016
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078
0,6	0,36	0,216	0,1296	0,0778	0,0467	0,0280
0,7	0,49	0,343	0,2401	0,1681	0,1176	0,0823
0,8	0,64	0,512	0,4096	0,3277	0,2621	0,2097
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,5905	0,5314	0,4783
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

計算 x_1

t	$1+t$	$-0,6t^2$	$-0,0867t^3$	$0,0227t^4$	$0,0018t^5$	$0,0044t^6$	x_1	$\Delta x_1 = -0,0007t^7$	x_2
0,1	1,1000	—0,0060	—0,0001	0	0	0	1,0939	0	1,094
0,2	1,2000	—0,0240	—0,0007	0	0	0	1,1753	0	1,175
0,3	1,3000	—0,0540	—0,0023	0,0002	0	0	1,2439	0	1,244
0,4	1,4000	—0,0960	—0,0055	0,0006	0	0	1,2991	0	1,299
0,5	1,5000	—0,1500	—0,0108	0,0014	0,0001	0,0001	1,3408	0	1,341
0,6	1,6000	—0,2160	—0,0187	0,0029	0,0001	0,0002	1,3685	0	1,368
0,7	1,7000	—0,2940	—0,0297	0,0055	0,0003	0,0005	1,3826	—0,0001	1,382
0,8	1,8000	—0,3840	—0,0444	0,0093	0,0006	0,0012	1,3827	—0,0001	1,380
0,9	1,9000	—0,4860	—0,0632	0,0149	0,0011	0,0023	1,3691	—0,0003	1,369
1,0	2,0000	—0,6000	—0,0867	0,0227	0,0018	0,0044	1,3422	—0,0007	1,342

計算 x

t	$1-1,2t$	$-0,26t^2$	$0,0907t^3$	$0,0090t^4$	$0,0262t^5$	x_1'	$\Delta x_1' = 0,0049t^6$	x_2'
0,0	1,0000	0	0	0	0	1,0000	0	1,000
0,1	0,8800	— 0,0026	0,0001	0	0	0,8775	0	0,878
0,2	0,7600	— 0,0104	0,0007	0	0	0,7503	0	0,750
0,3	0,6400	— 0,0234	0,0024	0,0001	0,0001	0,6192	0	0,619
0,4	0,5200	— 0,0416	0,0058	0,0002	0,0003	0,4847	0	0,485
0,5	0,4000	— 0,0650	0,0113	0,0006	0,0008	0,3477	— 0,0001	0,348
0,6	0,2800	— 0,0936	0,0196	0,0012	0,0020	0,2092	— 0,0002	0,209
0,7	0,1600	— 0,1274	0,0311	0,0022	0,0044	0,0703	— 0,0006	0,070
0,8	0,0400	— 0,1664	0,0464	0,0038	0,0086	— 0,0677	— 0,0013	— 0,069
0,9	— 0,0800	— 0,2106	0,0661	0,0059	0,0155	— 0,2031	— 0,0025	— 0,206
1,0	— 0,2000	— 0,2600	0,0907	0,0090	0,0262	— 0,3341	— 0,0049	— 0,339

計算 x_1''

t	$-1,2-0,52t$	$0,272t^2$	$0,036t^3$	$0,1311t^4$	x_1''	$\Delta x_1''=$ $=-0,0294t^5$	x_2''
0,0	−1,2000	0	0	0	−1,2000	0	−1,200
0,1	−1,2520	0,0027	0	0	−1,2493	0	−1,249
0,2	−1,3040	0,0109	0,0003	0,0002	−1,2926	0	−1,293
0,3	−1,3560	0,0245	0,0010	0,0011	−1,3294	−0,0001	−1,329
0,4	−1,4080	0,0435	0,0023	0,0034	−1,3588	−0,0003	−1,359
0,5	−1,4600	0,0680	0,0045	0,0082	−1,3793	−0,0009	−1,380
0,6	−1,5120	0,0979	0,0078	0,0170	−1,3893	−0,0023	−1,392
0,7	−1,5640	0,1333	0,0123	0,0315	−1,3869	−0,0049	−1,392
0,8	−1,6160	0,1741	0,0184	0,0537	−1,3698	−0,0096	−1,379
0,9	−1,6680	0,2203	0,0262	0,0860	−1,3355	−0,0174	−1,353
1,0	−1,7200	0,2720	0,0360	0,1311	−1,2809	−0,0294	−1,310

若將算出來的 x_1 與 x_1' 的值代入到方程(9)的右邊，則得到的不是 x_1''，而是另一個量 x''，因爲 x_1 只是方程(9)的近似解。下表中確定出 $x''-x_1''$ 之差。

t	x_1	$0,1x_1'$	$0,1x_1'^3$	x''	x_1''	$x''-x_1''$
0,0	1,000	0,100	0,100	−1,200	−1,200	−0,000
0,1	1,094	0,088	0,068	−1,250	−1,249	−0,001
0,2	1,175	0,075	0,042	−1,292	−1,293	−0,001
0,3	1,244	0,062	0,024	−1,330	−1,329	−0,001
0,4	1,299	0,048	0,011	−1,358	−1,359	−0,001
0,5	1,341	0,035	0,004	−1,380	−1,379	−0,001
0,6	1,368	0,021	0,001	−1,390	−1,389	+0,001
0,7	1,383	0,007	0,000	−1,390	−1,387	−0,003
0,8	1,383	0,007	0,000	−1,376	−1,370	+0,006
0,9	1,369	0,020	0,001	−1,350	−1,336	−0,014
1,0	1,342	0,033	0,004	−1,313	−1,281	0,032

在 x_1 的表達式中補充一項 at^7，使得當 $t=1$ 時，差 $(-x_1-0.1x_1'-0.1x_1'^3)-x_1''$ 更逼近於零；由表中所列，當 $t=1$ 時，這個差是 0.032。這樣作，當 $t=1$ 時，x_1 的矯正量是 a，x_1' 的矯正量是 $7at^6$，就是 $7a$。展開 $(x_1'+7a)^3$，只取 a 的一次項，就得到 $x_1'^3$ 的矯正量 $3x_1'^2\cdot 7a$，再由表中 x_1' 的值，用 $(-0.33)^2$ 來替代 $x_1'^2$，最後得到 $x_1'^3$ 的矯正量 $2a$；而 x_1'' 的矯正量該是 $7\cdot 6at^5$，當 $t=1$ 時，它是 $42a$。

所以係數 a 應由下面這方程確定：

$$-a-0.7a-0.2a-42a=0.032;\quad a=-0.0007.$$

在x_1, x_1', x_1''的計算中應引入這個矯正量。最後我們得到一個近似表達式：

$$x_2=1+t-0.6t^2-0.0867t^3+0.0227t^4+0.0018t^5+0.0044t^6-0.0007t^7,$$

當t與0相當近時，這個表達式具有高度的準確性。

14. 二級微分方程的圖解法 像一級微分方程的情形一樣，n 級微分方程的任何一個解，對應於某一條曲線，它叫做這方程的積分曲線。對於一級微分方程來講，對應的有一個方向場。

現在講二級微分方程

$$y''=f(x, y, y') \tag{12}$$

的幾何意義。

設s是積分曲線的弧長，a是正向切線與正向OX軸的交角。我們就有[I, 70]：

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}a,$$

$$\frac{dx}{ds}=\cos a,$$

對x求微商，就得到：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\cos^2 a}\cdot\frac{da}{dx}=\frac{1}{\cos^2 a}\frac{da}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{1}{\cos^3 a}\cdot\frac{da}{ds}.$$

但是我們知道[I, 71]，$\frac{da}{ds}$是曲線的曲率

$$\frac{da}{ds}=\frac{1}{R} \tag{13}$$

於是由上面的等式給出：

$$\frac{1}{R}=\cos^3 a\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{14}$$

現在我們算作，當a隨s而增加時R是正的，當s增加而a減小時，R是負的。

例如，設OX軸向右，OY軸向上（圖15）。若$R>0$，則s增加時，由右向左彎（逆鐘針方向），而當$R<0$時則向相反的方向彎曲。

依照公式(14)，微分方程(12)可以化爲：

$$\frac{1}{R}=f(x, y, \operatorname{tg}a)\cos^3 a. \tag{15}$$

由此看出，若給定了點的位置與切線方向，則二級微分方程給出在這點的曲率半徑的值。

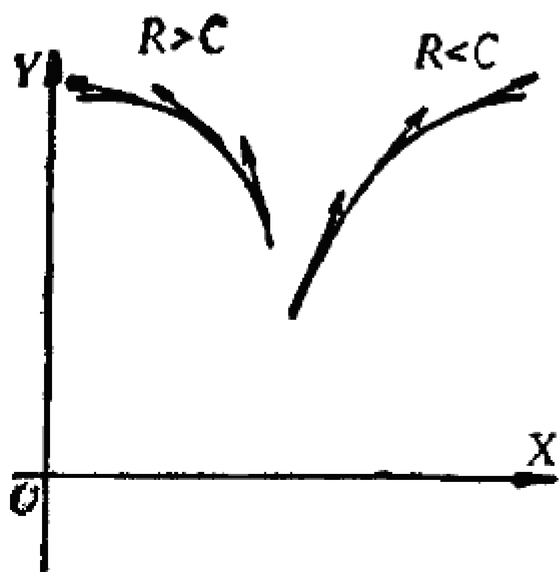


圖 15.

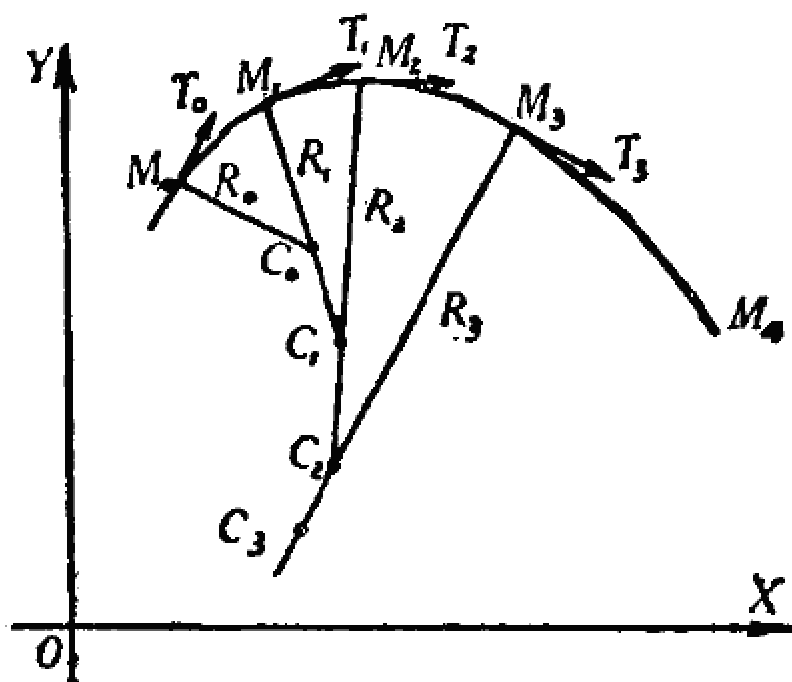


圖 16.

由這個情况推出一個求二級微分方程的近似積分曲線的方法，利用由圓弧組成的具有連續改變的切線的曲線。這個方法與利用折線求一級微分方程的近似積分曲線法相類似。設未知積分曲線具有初始條件：

$$y\Big|_{x=0}=y_0,$$

$$y'\Big|_{x=0}=y_0'.$$

標記出坐標是 (x_0, y_0) 的點 M_0，再過這點引出一個方向 M_0T_0，使它的斜率是 $y'=\operatorname{tg}\alpha=y_0'$（圖 16）。

由方程(15)給出對應的值 $R=R_0$。作線段 M_0C_0，垂直於方向 M_0T_0，而使其長等於 R_0；再以點 C_0 爲圓心，R_0 爲半徑，作一個不大的圓弧 M_0M_1。

這裏要注意，根據以上所述，線段 M_0C_0 的方向要由 R_0 的符號來確定。例如，若 $R_0<0$，則沿圓弧由 M_0 移動到 M_1 時，應當是順鐘針方向（圖 16）。設點 M_1 的坐標是 (x_1, y_1)，所作圓周在點 M_1 的切線 M_1T_1 的斜率是 $\operatorname{tg}\alpha_1$。由方程（15）又給出對應的值 $R=R_1$。作線段 M_1C_1 使其長等於 R_1，而垂直於 M_1T_1，也就是在直線 M_1C_0 上，而 M_1C_1 的方向由 R_1 的符號來確定。再以點 C_1 爲圓心，R_1 爲半徑，作不大的圓弧 M_1M_2。像對 M_1 一樣，對於點 M_2，由方程(15)可以得到值 $R=R_2$，再作線段 M_2C_2 等於 R_2，照樣一直作下去。

爲了用上述方法作圖，我們用一根直尺，它的一端有個插鉛筆的洞。由這小洞沿直尺有一條作好分度的直線，用以量出 R 的值，還有一個不大的三脚器，它的一個脚放在這直線上對應於 R 的值的點，其餘兩個在畫圖紙上。把這三脚器沿上述直線依賴於 R 的值的改變移動過 M_1, M_2 等點，我們不改變在這些點的切線方向，如此就得到所要求的曲線。

現在再講方程(12)的另一個圖解法,用折線的形狀給出積分曲線的近似表示。這個方法是以前圖9上所用的方法的推廣。除去 y 以外,我們還引入一個未知函數 $z=y'$。這時,替代了二級方程(12),我們得到兩個未知函數 y 與 z 的兩個一級方程的方程組;

$$(16)\qquad \frac{dy}{dx}=z$$

$$\frac{dz}{dx}=f(x,y,z).$$

我們討論應用於任意的兩個一級方程的方程組;

$$(17)\qquad \frac{dy}{dx}=g(x,y,z),$$

$$\frac{dz}{dx}=f(x,y,z).$$

的一般情形的方法。

考慮 x 作橫坐標,y 與 z 作爲在同一坐標系中的縱坐標,於是方程(17)的任何解就對應於兩條積分曲線。

在 OX 軸上取線段 $\overline{OP}$,等於單位長,而在這個軸的負方向上(圖17)。此外,在縱坐標軸上取值 $f(x,y,z)$ 與 $g(x,y,z)$。對於這些值所用的尺度可以與對於 x, y, z 的尺度不同,而線段 $\overline{OP}$ 的長度應當是對於 $f(x,y,z)$ 與 $g(x,y,z)$ 的尺度的單位長。

設要求的方程組(17)的解,須滿足初始條件

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,$$

$$z\big|_{x=x_0}=z_0.$$

在平面上作出平行於 OY 軸的一串直線:

$$x=x_0,$$

$$x=x_1,$$

$$x=x_2,\cdots$$

標記出坐標各爲 (x_0,y_0) 與 (x_0,z_0) 的點 M_0 與 N_0。在縱坐標軸上取線段 $\overline{OA}_0$ 與 $\overline{OB}_0$ 各等於 $g(x_0,y_0,z_0)$ 與 $f(x_0,y_0,z_0)$,$\overline{PA}_0$ 與 $\overline{PB}_0$ 方向的斜率就各爲

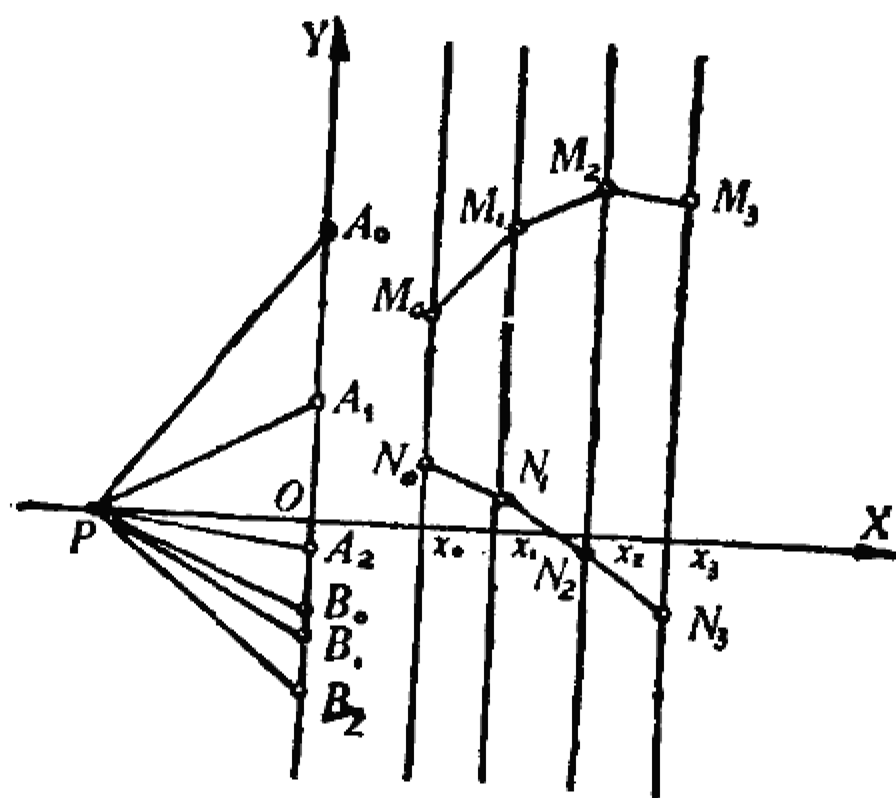


圖 17,

$g(x_0, y_0, z_0)$ 與 $f(x_0, y_0, z_0)$，於是推出未知積分曲線在初始點 M_0 與 N_0 的方向。

由這兩個點引線段 $\overline{M_0M_1}$ 與 $\overline{N_0N_1}$ 各平行於 $\overline{PA_0}$ 與 $\overline{PB_0}$，而與直線 $x=x_0$ 交於 M_1 與 N_1。設點 M_1 與 N_1 的坐標各為 (x_1, y_1) 與 (x_1, z_1)。再在縱坐標軸上取線段 $\overline{OA_1}$ 與 $\overline{OB_1}$ 各等於 $g(x_1, y_1, z_1)$ 與 $f(x_1, y_1, z_1)$。

由點 M_1 與 N_1 引線段 $\overline{M_1M_2}$ 與 $\overline{N_1N_2}$，各平行於 $\overline{PA_1}$ 與 $\overline{PB_1}$，而與直線 $x=x_2$ 交於點 M_2 與 N_2。如此作下去，就得到兩個折線 $M_0M_1M_2\cdots$ 與 $N_0N_1N_2\cdots$，它們給出未知積分曲線的近似表示。

在方程組(16)的情形下，$g(x, y, z)$就是第二個折線的縱坐標 z，於是作圖的方法就簡單了。在這情形下，第二條曲線給出一級微商 y' 的圖形的近似表示。

若微分方程的形狀如

$$y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y')$$

則作圖就特別簡單，在考慮質系的一度自由的振動時，常出現這樣的方程。

寫出與這方程相當的方程組：

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z).$$

有了縱坐標尺度相同的，函數 f_1, f_2 與 f_3 的圖形，我們只要把對應於適當選擇的橫坐標 x, y, z 的值，這三條曲線應有的縱坐標相加，就確定出 $f(x, y, z)$ 的值。

上述的方法也可以應用於具有 n 個未知函數的 n 個一級方程的方程組。注意，有時為了方便，我們記作 $\overline{OP}$ 的線段以及函數 $g(x, y, z)$ 與 $f(x, y, z)$ 的值，不由坐標原點起取，而由 OY 軸上另一點 O_1 起取。這樣作是為了避免給出折線方向的線段 $PA_0, PB_0\cdots$ 與這折線相交。

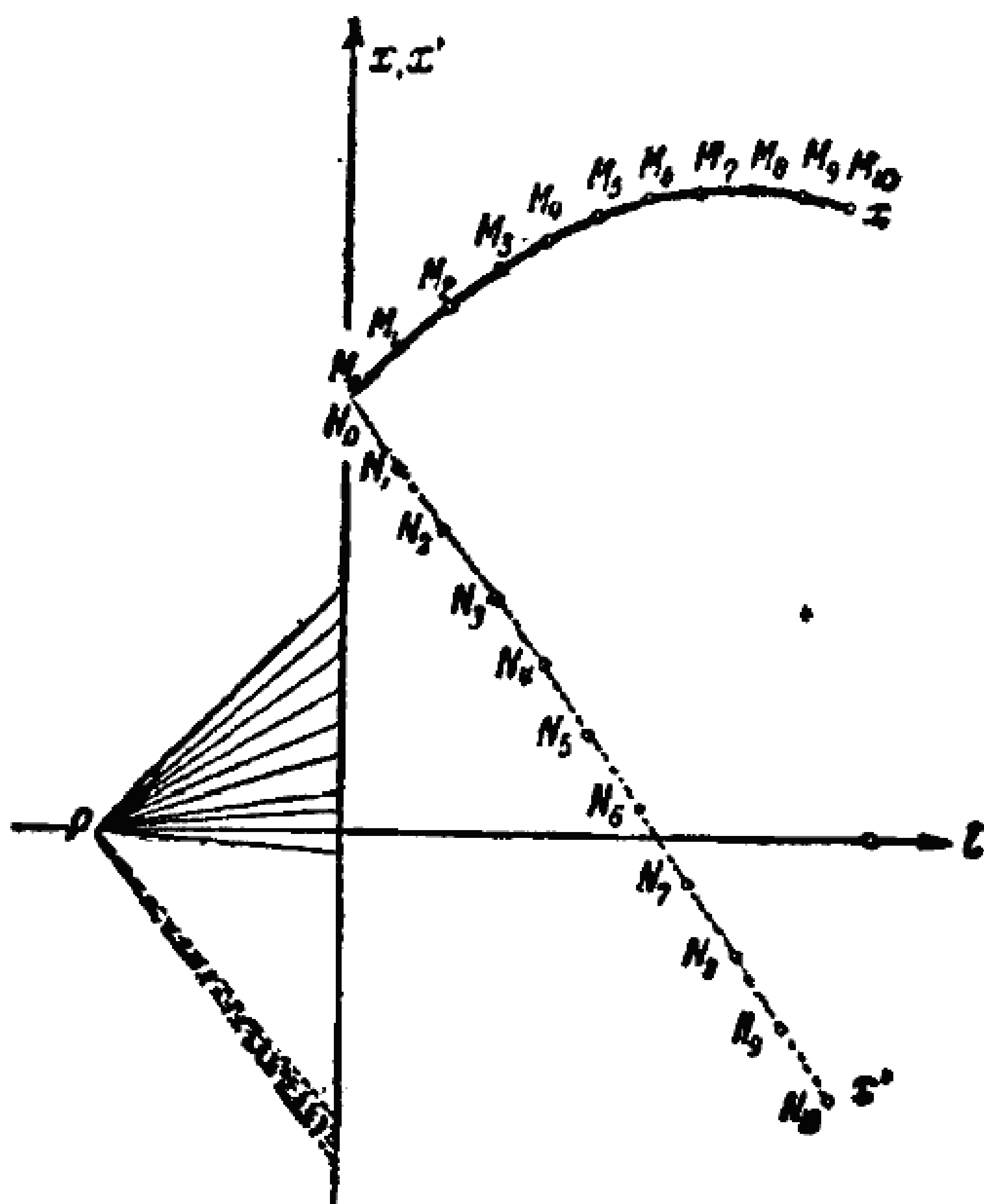


圖 18.

圖 18 上表示出方程(9)的滿足初始條件(10)的解的作法。

15. 方程 $y^{(n)}=f(x)$ 由方程 $y'=f(x)$ 直接推廣，就有方程

$$y^{(n)}(x)=f(x). \tag{18}$$

我們先求方程(18)的一般積分的公式。設 $y_1(x)$ 是方程(18)的任何一個解，就是

$$y_1^{(n)}(x)=f(x). \tag{19}$$

依照下式引用新的未知函數 z 以替代 y:

$$y=y_1(x)+z. \tag{20}$$

代入到方程(18)中，就得到一個關於 z 的方程

$$y_1^{(n)}+z^{(n)}=f(x),$$

根據恆等式(19)

$$z^{(n)}=0.$$

函數 z 的 n 級微商應當等於零，所以函數 z 是具有任意常係數的 $(n-1)$次多項式

$$z=C_1+C_2x+\cdots+C_nx^{n-1},$$

於是公式(20)給出方程(18)的一般積分

$$y=y_1(x)+C_1+C_2x+\cdots+C_nx^{n-1},$$

就是說，**方程(18)的一般積分是這方程的任何一個特殊解與一個具有任意常係數的 n 次多項式之和。**

如此，就只剩下要求方程(18)的任何一個特殊解。我們找滿足下列零初始條件的解

$$\begin{aligned} y\,|_{x=x_0}&=0; \\ y'\,|_{x=x_0}&=0; \\ \cdots\quad y^{(n-1)}\,|_{x=x_0}&=0. \end{aligned} \tag{21}$$

由方程(18)逐項求由 x_0 到變值 x 的積分，就得到:

$$y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

其中 $y_0^{(n-1)}$ 是當 $x=x_0$ 時 $y^{(n-1)}$ 的值。

根據條件(21)中最後一個 $y_0^{(n-1)}=0$, 我們就有:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

上式右邊再對 x 求積分,由下限 x_0 到上限 x, 就得到 $y^{(n-2)}$; 如此作下去,直到求 n 次積分, 就得到未知函數 y. 這個逐次積分普通寫作:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\ \cdot\ \int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{22}$$

我們以下說明,這個 n 次積分可以用一個一次積分來替代。

寫出餘項具有積分形式的泰勒公式 [I, 126]:

$$y(x)=y_0+(x-x_0)\frac{y_0'}{1!}+(x-x_0)^2\frac{y_0''}{2!}+\cdots+$$
$$+(x-x_0)^{n-1}\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}y^{(n)}(t)\,dt,$$

其中 $y_0, y_0', y_0'', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 各爲當 $x=x_0$ 時 y 及其各級微商的值,而用字母 t 記積分變量。根據初始條件(21)

$$y_0=y_0'=y_0''=\cdots=y_0^{(n-1)}=0,$$

再根據微分方程 (18) $y^{(n)}(t)=f(t)$, 所以上述泰勒公式給出

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt. \tag{23}$$

於是, 公式(23)給出了方程(18)的滿足零初始條件(21)的解,或者說,

它給出了 n 次積分(22)的一次積分形式的表達式。

由解 (23) 加上具有任意常係數的 $(n-1)$ 次多項式，就得到方程(18)的一般積分。注意，在公式(23)的右邊，x 出現作積分上限，而又出現在積分號下。作積分時是對 t 作的，所以這時 x 算作常量。顯然，當 $n=1$ 時公式(23)是正確的，只須算作 $0!=1$。

16. 梁的彎曲 考慮在連續分佈的外力(重力、負載)以及集中的外力作用下，彈性稜形梁彎曲的情形。

取未經形變的狀態下這個梁的中央軸線作 OX 軸，OY 軸鉛直向下(圖19)。梁上的作用力方向向下時算作正的。我們取這個梁的橫坐標爲 x 的斷面 N。

用 y 記中央軸線上點的位移，R 記形變後軸線的曲率半徑。材料力學中證明了，在關於形變的特性以及梁對於 OX, OY 軸的位置的某些假定下，爲要得到平衡方程，應當截取梁的一部分，或是 N 左邊的一部分，或是 N 右邊的一部分，計算出彎曲矩 $M(x)$ 來，這彎曲矩等於所有作用在截取的一部分上的外力對於斷面 N 的中央軸線的力矩之和，而且，當截取左邊時，使它逆鐘針轉的力矩算作正的，截取右邊時，使它順鐘針轉的力矩算作正的。這樣就有梁的彎曲軸線的微分方程

$$\frac{EI}{R}=M(x), \tag{24}$$

其中 E 是彈性係數，I 是所考慮的斷面對於它的中央軸線的轉動慣量。

假設形變一般是很小的，而且當形變時梁的軸線與 OX 軸差的很少，就可以把 R 的表達式 [I, 71] 中的 y' 的二次項略去

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\sim\frac{1}{y''},$$

代入到方程(24)中，就得到

$$y''=\frac{M(x)}{EI} \tag{25}$$

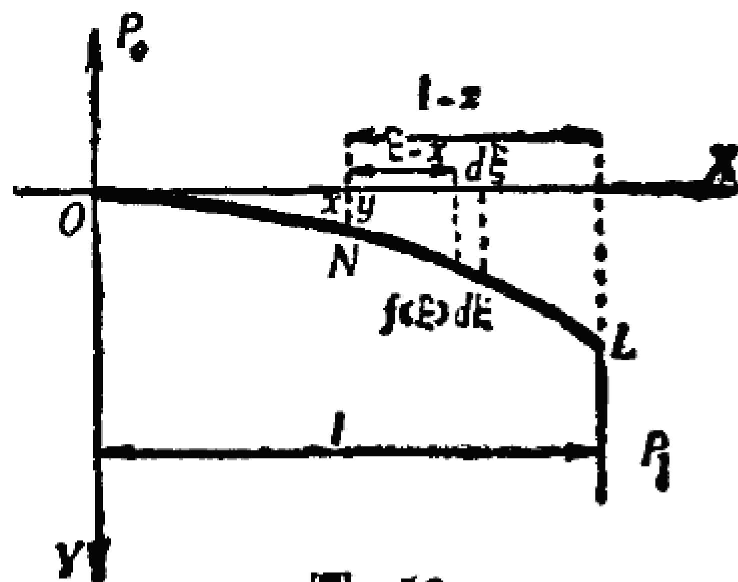


圖 19.

現在假定只在梁的兩端有集中的力，各等於 P_0 與 P_l (圖 19 上的情形，P_0 是負的)；並且在兩端有彎曲力偶矩，其力矩我們記作 M_0 與 M_l. 對於梁的單位長度來講，連續分佈的負載記作

$f(x)$.

我們計算作用在梁的 NL 這一部分上的外力的力矩和。取出橫坐標爲 ξ 的任何一個單元 $d\xi$，這單元上的負載就是 $f(\xi)d\xi$，它對 N 的力矩就是：

$$(\xi-x)\,f(\xi)d\xi,$$

而這一部分上的所有的負載的全部力矩就是：

$$\int_x^l (\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi.$$

加上力 P_l 的力矩 $(l-x)P_l$ 及力偶矩的力矩 M_l，就得到：

$$M(x)=\int_x^l (\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi+(l-x)P_l+M_l. \tag{26}$$

在上述關於符號的條件下，再計算作用在梁的 ON 一部分的所有的外力的力矩之和，就得到：

$$M(x)=\int_0^x (x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi+xP_0+M_0. \tag{27}$$

不難直接驗證，這兩個表達式是彼此相等的。實際上，等式

$$\int_x^l (\xi-x)\,f(\xi)\,d\xi+(l-x)\,P_l+M_l=\int_0^x (x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi+xP_0+M_0,$$

可以化爲：

$$x\left[\int_0^l f(\xi)\,d\xi+P_0+P_l\right]-\left[\int_0^l \xi f(\xi)\,d\xi+lP_l-M_0+M_l\right]=0,$$

但是這個等式可以由下列等式直接推出來：

$$\int_0^l f(\xi)\,d\xi+P_0+P_l=0, \tag{28}$$

$$\int_0^l \xi f(\xi)\,d\xi+lP_l+M_l-M_0=0, \tag{29}$$

其中第一個表示所有作用在梁上的外力之和等於零，第二個表示所有的外力對於點 O 的力矩之和等於零，這就是平衡的條件。

回憶用一次積分形式表達逐次積分的公式[15]，根據(27)，可以寫成，

$$M(x)=\int_0^x dx\int_0^x f(x)\,dx+xP_0+M_0, \tag{30}$$

由此

$$\frac{dM(x)}{dx}=S(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi+P_0, \tag{31}$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=f(x). \tag{32}$$

$S(x)$這個量等於所有作用在點 N 之左的外力之和，它叫做在點 N 的總切力。方程(31)說明，這個總切力等於彎曲矩的微商。

在方程(32)中，若用y來替代 $M(x)$，在右邊用 $\frac{M(x)}{EI}$ 來替代 $f(x)$，它就與方程(25)具有相同的形狀。這一點對於圖解靜力學的各種構圖都是很重要的。

例1. 考慮一個梁，它的一端 O 緊緊的固定住，在另一端 L 受有集中的鉛直的力 P（圖20)；這個梁的重量可以忽略不計。在這情形下，我們有：

$$f(x)=0;\quad P_l=P;$$

$$M_l=0;\quad M(x)=(l-x)P_l,$$

平衡方程(25)就是：

$$y''=\frac{P}{EI}(l-x).$$

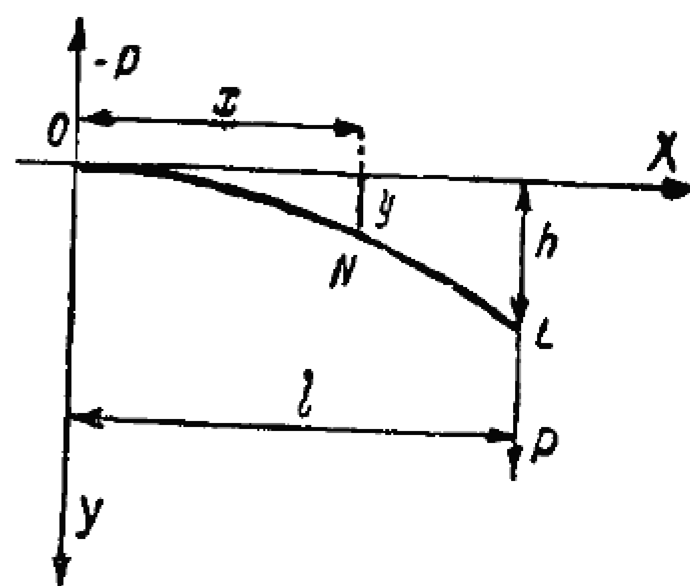


圖 20.

在固定的一端 $x=0$，弛垂度等於零，而在這點彎曲軸線的切線應當與 OX 軸重合，就是說，具有初始條件：

$$y\big|_{x=0}=0 \text{ 與 } y'\big|_{x=0}=0,$$

由此求出[15]：

$$y=\int_0^x (x-\xi)\frac{P}{EI}(l-\xi)\,d\xi=\frac{P}{2EI}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right).$$

梁的另一端 L 的弛垂度由公式

$$h=y\Big|_{x=l}=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

給出。

只在端點 O 具有支點的反作用。注意，在所給的情形下，沒有連續分佈的負載，而且 $M_l=0$,由等式(28)與(29)就有

$$R_0=P_0=-P\ (\text{反作用力});\quad M_0=lP_l\ (\text{反作用力偶矩})$$

2.設有一個梶,一邊在兩個支點 A 與 B 支持住,另一邊受有液體的壓力,液面與上邊的支點相齊(蘭),求這個彎曲梶形成的曲線(圖21)。這時,作用在梶上的力計有: 1) 連續分佈的液體壓力，2) 在支點的反作用力。

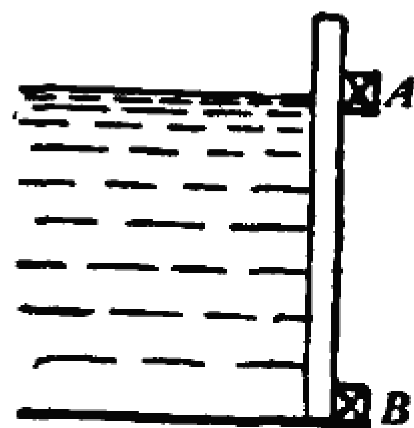


圖 21.

設 b 是梶的寬度，ρ 是單位體積的液體的重量。在液面下深度爲 x 處取梶的一小段，長爲 dx, 液體在這一小段上的作用力等於一個液柱的重量,這個液柱的底等於這小段梶的底,而其高等於這小段梶的深度,就是

$$\rho\cdot b\cdot dx\cdot x=kx\,dx \qquad (k=\rho b).$$

所以,在這情形下,$f(x)=kx$。

於是所給的問題就化爲討論一個梁的彎曲情形,這個梁被兩個點支住，且受有連續分佈的負載 $f(x)=k\,x$的作用。

先計算支點的所有的反作用力 P_0 與 P_l。全部負載是

$$P=\int_0^l k\xi\,d\xi=\frac{kl^2}{2}.$$

依照槓桿的普通原理,由小單元的負載 $k\xi\,d\xi$ 可以得到在支點 O 與 L 的反作用力:

$$-\frac{k\xi(l-\xi)}{l}d\xi \quad 與 \quad -\frac{k\xi^2}{l}d\xi,$$

由此顯然

$$P_0=-\int_0^l\frac{k\xi(l-\xi)}{l}\,d\xi=-\frac{kl^2}{6}=-\frac{1}{3}P,\ P_l=-P-P_0=-\frac{2}{3}P.$$

由公式(26),就有

$$M(x)=\int_x^l(\xi-x)k\xi\,d\xi+(l-x)P_l=k\int_x^l(\xi-x)\xi\,d\xi-\frac{2}{3}P(l-x)=$$

$$=\frac{k}{6}(x^3-l^2x).$$

於是彎曲軸線的微分方程(25)就是

(33) $$y''=\frac{k}{6EI}(x^3-l^2x),$$

具有初始條件

(34) $$y|_{x=0}=0;\ y|_{x=l}=0.$$

一般解就是

$$y=\frac{k}{6EI}\left(\frac{x^5}{20}-\frac{l^2x^3}{6}+C_1x+C_2\right).$$

由條件(34)確定出常數 C_1 與 C_2:

$$C_2=0;\quad C_1=\frac{7}{60}l^4,$$

最後得到:

$$y=\frac{k}{360\,EI}(3x^5-10l^2x^3+7l^4x).$$

爲要找出彎曲度最大的點以及最大的彎曲度,讓 $x=lt$, 並把上面 y 的表達式寫成:

$$y=\frac{kl^5}{360\,EI}(3t^5-10t^3+7t).\qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

在區間(0,1)內,圓括號中的多項式的微商

$$15t^4-30t^2+7$$

只有一個根:

$$t_0=\sqrt{1-2\sqrt{\frac{2}{15}}}\approx 0,519\ldots,$$

它對應於 y 的極大值。

如此,最大的彎曲度不在中點,而是靠近 L 一端。最大彎曲度就是

$$h=y\Big|_{x=lt_0}=\frac{kl^5}{360\,EI}(3t_0^5-10t_0^3+7t_0)\approx\frac{kl^5}{360\,EI}\cdot 2{,}348=\frac{Pl^3}{180\,EI}\,2{,}348.$$

17. 微分方程的降級法 我們再講幾種微分方程可以降級的情形。

1. 設方程中不含有函數 y 以及它的某一串微商 $y', y'', \cdots, y^{(k-1)}$，就是說，方程具有下面這形狀：

$$\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)})=0.$$

引用新函數 $z=y^{(k)}$，則方程可以降低 k 級：

$$\Phi(x, z, z', \cdots, z^{(n-k)})=0.$$

若求出後面這方程的一般積分：

$$z=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}),$$

則 y 由方程

$$y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k})$$

確定，這個方程我們在[15]中已經考慮過了。

2. 若方程中不含有自變量 x，就是說，方程具有下面這形狀：

$$\Phi(y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0,$$

則取 y 作自變量，而引用新函數 $p=y'$。

算作 p 是 y 的函數，而通過 y 依賴於 x，應用求複合函數的微商的法則，就得到下列 y 對 x 的各級微商的表達式：

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}p,$$
$$y'''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)p=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p,$$

由此看出，對於新變量來講，就成為$(n-1)$級的方程了。

若解出這個變換後的方程：

$$p=\varphi(y, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}),$$

則求所給的方程的一般積分就化為求

$$dy=pdx=\varphi(y, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})dx,$$

的積分，由此

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1,C_2,\cdots,C_{n-1})}=x+C_n.$$

上式中，任意常數之一 C_n, 是加到 x 上的，所以任何積分曲線可以平行於 OX 軸移動。

3. 若方程

$$\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

的左邊是變量 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的齊次方程，則依照公式

$$y=e^{\int udx}$$

用新函數 $u(x)$ 來替代 y, 就可以得到一個關於 u 的$(n-1)$級方程。這是由於

$$y'=e^{\int udx}u;\quad y''=e^{\int udx}(u'+u^2);\cdots$$

而把這些代入到方程的左邊後，可以提出指數函數 $e^{\int udx}$ 的若干次冪，再用這因子除方程的兩邊就成了。在 e 的指數的積分中出現的常數是 y 的任意乘數。

例 1. 具有形狀

$$y''=f(y) \tag{35}$$

的方程是屬於第二種情形的。也可以直接求它的積分。兩邊乘以 $2y'dx=2dy$:

$$2y'y''dx=2f(y)dy.$$

顯然，左邊是 y'^2 的微分，求積分就得到：

$$y'^2=\int_{y_0}^{y}2f(y)dy+C_1=f_1(y)+C_1,\quad 由此\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{f_1(y)+C_1}; \tag{36}$$

分離變量，再求積分，就得到：

$$x+C_2=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{f_1(y)+C_1}}. \tag{37}$$

若具有初始條件

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0;\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0',$$

則把 $x=x_0$, $y=y_0$與$y'=y_0'$ 代入到(36)與(37)中,就得到:

$$C_1=y_0'^2\quad C_2=-x_0,$$

於是未知解就是

$$x-x_0=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{\int_{y_0}^{y}2f(y)\,dy+y_0'^2}}.$$

設沿 OX 軸運動的點,受有力 $F(x)$ 的作用,而這個力只依賴於這點的位置。運動的微分方程就是[13]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x).$$

設當 $t=0$ 時,這點的初始坐標與初始速度是 x_0 與 v_0

$$x\Big|_{t=0}=x_0;\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=v_0.$$

用$\frac{dx}{dt}dt$ 乘方程的兩邊,再求積分,就得到:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx \text{ 或 } \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx=\frac{1}{2}mv_0^2. \tag{38}$$

左邊的第一項$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ 代表運動點的動能,而第二項 $\left[-\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx\right]$ 代表它的勢能,由(38)推知,在運動時動能與勢能的和保持一個常量。由等式(38)中解出 dt,再求積分,就得到 t 與 x 之間的關係。

2. 若當梁彎曲時弛垂度相當大,就不能用二級微商 y'' 來作曲率了[16],於是,替代了

近似方程(25),我們應當考慮準確的方程(24)。如此,我們就遇到下面這個問題:求曲線,其曲率爲橫坐標的已知函數

$$\frac{1}{R}=\varphi(x). \tag{39}$$

這個方程是一個二級微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\varphi(x).$$

引用 $p=y'$,就得到一個可分離變量的一級微分方程。

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}=\varphi(x)\,dx,$$

求積分,就得到:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1,$$

由此

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1}{\sqrt{1-\left[\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1\right]^2}}=\psi(x), \tag{40}$$

於是最後得到:

$$y=\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+C_2.$$

若梁的一端 $x=0$ 緊緊的固定住,而另一端 $x=l$ 具有集中的負載,我們就有[16]:

$$M(x)=(l-x)P;\quad \varphi(x)=\frac{(l-x)P}{EI}=2k(l-x)\qquad \left(k=\frac{P}{2EI}\right).$$

方程就是

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=2k(l-x).$$

具有初始條件：

$$y|_{x=0}=0;\quad y'|_{x=0}=0.$$

在公式(40)中，讓 $x_0=0$，根據初始條件中的第二個條件，我們就應當算作 $C_1=0$. 於是在所考慮的情形下，我們得到：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\int\limits_0^x 2k(l-x)\,dx}{\sqrt{1-\left[\int\limits_0^x 2k(l-x)\,dx\right]^2}}=k\frac{l^2-(l-x)^2}{\sqrt{1-k^2[l^2-(l-x)^2]^2}}=$$

$$=k\frac{x(2l-x)}{\sqrt{1-k^2x^2(2l-x)^2}}.$$

再求一次積分並利用條件 $y|_{x=0}=0$，就求出 y：

$$y=k\int\limits_0^x\frac{x(2l-x)}{\sqrt{1-k^2x^2(2l-x)^2}}\,dx. \tag{41}$$

上面寫的這個積分不能用初等函數來表達。對應於方程(41)的曲線叫做**彈性曲線**。

3. 考慮方程：

$$x^2yy''=(y-xy')^2,$$

它的兩邊是 y, y', y'' 的同次齊次函數。引用替換

$$y=e^{\int u\,dx},$$

就得到

$$x^2(u'+u^2)=(1-xu)^2,$$

由此得到關於 u 的線性方程：

$$u'+\frac{2}{x}u-\frac{1}{x^2}=0,$$

求積分，就得到：

$$u=x^{-2}(C_1+x)=C_1x^{-2}+x^{-1}.$$

代入到 y 的通過 u 的表達式中：

$$y=e^{-C_1x^{-1}}+\lg x+C$$

或

$$y=C_2xe^{C_1x^{-1}},$$

其中我們用 C_1 代替了$(-C_1)$並且 $C_2=e^C$。

18. **常微分方程組** 具有 n 個未知函數的 n 個一級方程的方程組，寫成解出微商的形狀就是：

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ \frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n).\end{aligned}\tag{42}$$

像一個方程的情形一樣，也有存在與唯一定理：**若函數**

$$f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

當 $x=x_0$, $y_i=y_i^{(0)}$ **時，以及在這些值的近傍，都是連續的，且有對** y_i **的連續偏微商，則組**(42)**的滿足初始條件**

$$y_1|_{x=x_0}=y_1^{(0)};\ y_2|_{x=x_0}=y_2^{(0)};\ \cdots;\ y_n|_{x=x_0}=y_n^{(0)}.\tag{43}$$

的解

$$y_i=\omega_i(x)$$

必有一個而且僅有一個存在。

我們可以改變初始條件中 $y_i^{(0)}$ 的值，所以組(42)的一般解含有 n 個任意常數。這些任意常數也可能不是作爲初值 $y_i^{(0)}$ 在解中出現，而是以一般的形式出現：

$$y_i=\psi_i(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n).\tag{44}$$

給常數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 以確定的數值，就得到組(42)的特殊解。爲要由這一族中挑出滿足初始條件(43)的解，就需要由方程

$$(44_1)\qquad y_i^{(0)}=\psi_i(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n)\qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

求出任意常數的值，再把這些值代入到公式(44)中。

由等式(44)中解出任意常數，就得到方程組的一般解的下面形狀的公式：

$$(45)\qquad \varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)=C_i\qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

這裏重要的是要由方程(45)可以解出 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 來。方程(45)中的每一個叫做組(42)的一個積分，於是，爲要作成組(42)的一般積分，需要求出這個組的 n 個這樣的積分，才能由等式(45)解出 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 來。

我們可以把組(42)寫成下面連比的形狀

$$(46)\qquad dx=\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)}=\cdots$$
$$\cdots=\frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)}.$$

把所有的分母都乘上一個相同的因子，於是第一個比的分母就不是一了，而是變量 $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一個函數了。爲對稱起見，我們用字母 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 來記這些變量，微分方程組(42)就可以寫成下面的形狀

$$(47)\qquad \frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}},$$

其中 $X_1, X_2, \cdots X_n, X_{n+1}$ 是變量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的函數。把方程組(42)寫成(47)的形狀，根據這對稱性，就使得以後的討論方便了。特別是，當方程組寫成(47)的形狀時，並沒有固定出，這 $(n+1)$ 個變量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 中，那一個算作自變量。在新的記號下，方程組(45)的積分是：

$$(48)\qquad \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C_i\qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

合計解(44)中任意常數的數目時，要緊的是要使得任意常數的數目不可能減少。例如，在公式

$$y_1=(C_1+C_2)x+C_3;\ y_2=C_3x^2;\ y_3=x^2+C_3x+C_1+C_2$$

中，三個任意常數可以減少到兩個，只須讓 $C_1+C_2=C$ 就成。公式(44)就不可能是這樣的，而它確是方程組的一般積分；這是因爲，我們可以適當的選擇任意常數以滿足任何初始條件；就是說，對於任何選定的未知函數的初始值，可以解出 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 來。這裏我們算作方程(42)的右邊滿足以上所講的初始條件。

現在我們再更仔細的來考慮方程組的積分。設有方程(47)的 k 個積分

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C_i \qquad (i=1, 2, \cdots, k). \tag{49}$$

有時我們說方程組的積分，不是指的等式 (49)，而是指的函數 $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$,就是說，**若把方程組的任何解代入到函數 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 中，它成爲常數，則這函數叫做這方程組的積分**。這裏當然算作 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 不是常數。因爲解的初始條件是隨意的，這個常數的值也能够是隨意的(任意常數)。若由等式(49)左邊的 φ_i 作成一個任意的函數 $F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k)$，則當用方程組的任何解代入到所有的 φ_i 中時，這新函數成爲常數，就是說，由積分(49)可以得到方程組的積分:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k)=C, \tag{50}$$

其中 F 是 φ_i 的任意的函數。換句話說就是: **方程組的一些積分的任意函數也是這方程組的積分**。積分(50)是由積分(49)推得的，並非什麼新的結果。

設有方程組 (47) 的 n 個積分 (48)。若由等式 (48) 可以解出變量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 中的 n 個來，則這 n 個積分叫做**無關的**。這樣的解給出

一個自變量的 n 個函數，也就是類似公式(44)的公式，並且由這些公式解出任意常數來就是(48)的形狀，這就是說；方程組的 n 個無關的積分(48)相當於這方程組的一般積分。可以證明，上述的積分(48)無關的條件，相當於積分(48)中沒有一個可以像以上所講的，由其他的推得，或者說，對於等式(48)左邊諸 φ_i 來講，沒有任何的關係式

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)=0$$

存在，使得它是關於 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 的恆等式。

以前我們沒有講過任何的判別法，用以判定積分(48)是無關的積分。考慮 $n=2$ 的情形：

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=C_1;\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3)=C_2. \tag{51}$$

回憶關於隱函數的定理 [I, 159]，可以肯定，爲要由方程(51)可以解出 x_2 與 x_3，只須表達式

$$\Delta_{x_2,x_3}(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}$$

不是零。對於變量 x_3, x_1 與 x_1, x_2 也有同樣的結果。假設 φ_1 與 φ_2 及其一級微商是連續的，可以證明，積分(51)無關的必要且充分條件爲：表達式：

$$\Delta_{x_2,x_3}(\varphi_1,\varphi_2),\ \Delta_{x_3,x_1}(\varphi_1,\varphi_2),\ \Delta_{x_1,x_2}(\varphi_1,\varphi_2)$$

中至少有一個不恆等於零。在第三卷中我們再講，關於任何多個變量的函數組無關的問題。

19. 例 1. 考慮方程組：

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}. \tag{52}$$

由方程

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$$

中消去 z，得到一個分離變量的方程，求積分，就得到：

$$\lg x=\lg y-C,\ \text{就是}\ \lg\frac{y}{x}=C,$$

這相當於

$$\frac{y}{x}=C_1.$$

再看這組中的第二個方程

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)},$$

利用已經求得的積分 $y=C_1x$, 代入到上式中，消去$\frac{1}{x}$，就得到:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-(1+C_1^2)x}; \quad 就是 \ (1+C_1^2)xdx+zdz=0.$$

求積分，就有

$$(1+C_1^2)x^2+z^2=C_2$$

或代入以 $C_1=\frac{y}{x}$，就得到這方程組的第二個積分:

$$x^2+y^2+z^2=C_2.$$

於是，我們就有這方程組的兩個積分

$$\frac{y}{x}=C_1; \quad x^2+y^2+z^2=C_2. \tag{53}$$

2. 在已知力的作用下，質量爲 m 的質點，運動的微分方程組有如:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{54}$$

其中 X, Y, Z 爲力在各坐標軸上的投影，它們依賴於時間，質點的位置以及它的速度，就是依賴於 t, x, y, z, x', y', z'。

引入新的未知函數——x, y 與 z 對 t 的微商 x', y', z'——方程組(54)就化爲六個一級方程的方程組:

$$\frac{dx}{dt}=x'; \quad \frac{dy}{dt}=y'; \quad \frac{dz}{dt}=z'; \quad m\frac{dx'}{dt}=X; \quad m\frac{dy'}{dt}=Y; \quad m\frac{dz'}{dt}=Z.$$

這個組的一般解含有六個任意常數，爲要確定它們，應當給出在起始的時刻質點的位置及其速度。

由等式(54)推出下面三個等式:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=yZ-zY$$
$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=zX-xZ$$
$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=xY-yX,$$

不難看出，它們可以寫成：

$$(55)\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=yZ-zY\\ \dfrac{d}{dt}m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=zX-xZ\\ \dfrac{d}{dt}m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=xY-yX.\end{cases}$$

設這力是有心的，就是說它的方向總指向某一定點，這個點叫做中心，我們取它作坐標原點。因爲向量的投影與它的方向餘弦成正比，而在所給的情形下，向量的方向通過坐標原點以及點 (x,y,z)，於是就有：

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z};$$

於是等式(55)的右邊成爲零，我們就得到(54)的三個積分組：

$$(56)\quad m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=C_1;\ m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=C_2;\ m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C_3.$$

由力學知道，它們表達出運動點在坐標面上的投影的常扇面速度。

由等式(56)推出：

$$C_1x+C_2y+C_3z=0,$$

由此看出，軌跡應爲平面曲線。顯然，這軌跡所在的平面，由力的中心以及在起始時刻的速度向量確定。

現在設 X, Y, Z 是某一個依賴於 x, y, z 的函數 U 的偏微商。這個函數 U 叫做這個力的勢量，而$(-U)$叫做點的勢能：

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

把方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x};\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y};\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}$$

各乘以 dx/dt, dy/dt, dz/dt, 再相加就得到:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{dU}{dt},$$

或

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{dU}{dt},$$

由此得到積分

(57) $$T-U=C,$$

其中

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}mv^2$$

是點的動能。

等式(57)表達出,在運動的全部時間中,動能與勢能之和是常量。

3. 設有 n 個質點的質點系,這 n 個點是彼此相連繫着的,其中任何一點的位置可以由無關的參變量 $q_1, q_2, \cdots q_k$ 以及時間 t 來確定:

(58) $$\begin{aligned} x_i&=\varphi_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t);\\ y_i&=\psi_i(q_1,q_2,\cdots,b_k,t);\\ z_i&=\omega_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t). \end{aligned}\qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

設作用在系中各點的力具有勢量 U,它只依賴於點的坐標,於是作用在第 i 個點上的力在坐標軸上的投影 X_i, Y_i, Z_i 就各爲 U 對 x_i, y_i, z_i 的偏微商。設 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是這 n 個點的質量。利用等式(58),我們可以通過參變量 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 來表達動能

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right],$$

以及函數 U,並且由力學知道,這個系的運動由下面的拉格朗日方程來確定:

(59) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}\qquad (s=1, 2, \ldots, k).$$

顯然,函數 T 是各參變量對 t 的微商 $q_1', q_2', \cdots, q_k'$ 的二次多項式,方程(59)由 k 個二

級方程組成，它相當於 $2k$ 個一級方程；求方程 (59) 的積分，就得到 q_k 的表達式，它們是時間 t 以及 $2k$ 個任意常數的函數。

設方程(58)中不含有 t. 那時 T 與 U 也就不含有 t. 方程(59)對應乘以 $q'_1, q'_2, \cdots, q'_k$ 再相加，就得到：

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{dU}{dt} \tag{60}$$

注意，下面這等式顯然成立：

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{k} q_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \sum_{s=1}^{k} q''_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q_s}$$

考慮 T 是 q'_s 的齊次多項式的情形，根據關於齊次函數的尤拉定理 [I, 154]：

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{\partial q'_s} = 2T$$

由此

$$\sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \sum_{s=1}^{k} q'_s \frac{\partial T}{dq_s} = 2\frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

於是公式(60)給出：

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

由此得到方程組(59)的積分(**活力的積分**)：

$$T - U = C.$$

4. 在某些情形下，質點系運動的微分方程的積分，可用以解決，關於在平衡位置附近，質點系的小振動的平衡性問題。我們把這問題用數學的方式敘述如下，爲簡短起見，只限於考慮滿足下列微分方程組的三個未知函數 x, y, z 的情形 [1]：

$$\frac{dx}{dt} = X; \quad \frac{dy}{dt} = Y; \quad \frac{dz}{dt} = Z, \tag{61}$$

[1] 在一個質點的運動情形中，有六個未知函數。

其中 X, Y, Z 是 x, y, z, t 的已知函數，當

$$x=y=z=0 \tag{62}$$

時，它們都等於零。

這時，方程組(61)有很明顯的解(62)，它對應於平衡位置。如果對於任意給定的正數 ϵ，有這樣一個 η 存在，使得只要

$$|x_0|,\ |y_0| \text{ 與 } |z_0|<\eta, \tag{63}$$

則滿足初始條件

$$x|_{t=0}=x_0,\ y|_{t=0}=y_0,\ z|_{t=0}=z_0$$

的方程組(61)的解當 $t>0$ 時總有

$$|x|,\ |y| \text{ 與 } |z|<\epsilon, \tag{64}$$

這個平衡位置〔或簡稱解(62)〕就叫做穩定的。

設方程組(61)具有積分

$$\varphi(x, y, z)=C, \tag{65}$$

它不含有 t，並且當 $x=y=z=0$ 時，函數 $\varphi(x, y, z)$ 有極大值或極小值。我們證明，這時這平衡位置是穩定的。只果需要的話，可以改變 φ 的符號，我們就可以算作 φ 有極小值；並可以加到 φ 上一個常數，就可以算作這個極小值等於零。

如此，在點 $x=y=z=0$，函數 φ 等於零；而在與(0, 0, 0)足夠近的所有的點(x, y, z)，這函數是正的。在坐標原點附近，作一個立方體 δ_ϵ，以原點為中心，邊長為 2ϵ。在這立方體的表面上，連續函數 φ 是正的，於是它達到一個正的最小值 m，所以在整個這表面上

$$\varphi \geqslant m>0. \tag{66}$$

現在在坐標原點附近，再作一個同心的立方體 δ_η，邊長為 2η，使得在這立方體內，不等式

$$\varphi<m \tag{67}$$

成立；這是可能的，因為 $\varphi(0, 0, 0)=0$。設在起始的時刻，點(x, y, z) 出現在立方體 δ_η 內，就是說，滿足條件(63)。不等式(67)就不僅是在起始的時刻成立，而是在運動的全部時間中總成立。實際上，根據(65)，當運動時，φ 保持常數值 C. 據此，在運動的全部時間中，點(x, y, z) 不能越出立方體 δ_ϵ 的表面；因為在這表面上不等式(66)成立，而與不等式(67)相反；如此對於所有的 $t>0$，條件(64)被滿足，於是證完。

函數 x, y, z 可能具有任何幾何的或力學的意義，只是為了證明容易懂，我們把它們考

慮作點的坐標。例如，設方程(59)中 T 與 U 不含有時間 t，於是活力的積分成立。設當 $q_s=0(s=1,2,\cdots,k)$時，等式

$$\frac{\partial U}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial q_2}=\cdots=\frac{\partial U}{\partial q_k}=0$$

成立。

這時，方程(59)就有很明顯的解：

(68) $$q_s=q_s'=0,$$

這對應於質點系的平衡位置。此外，若當設 $q_s=0$ 時，勢能 $(-U)$ 具有極小值，則可以肯定，對於(68)的值，差 $T-U$ 也具有極小值，因爲這時 T 等於零，而它不可能是負的，就是說 T 也具有極小值。如此，我們看出，在勢能取極小值的情形下，對應的平衡位置，對於量 q_s 及 q_s' 來講，是穩定的(拉格朗日——狄義赫利定理)。

20. 方程組與高級方程 現在我們講一級微分方程組與一個高級方程之間的連繫。例如，若有一個三級微分方程：

$$y'''=f(x,y,y',y''),$$

則讓 $y=y_1$；$y'=y_2$；$y''=y_3$，我們可以用三個一級方程的方程組

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2;\quad \frac{dy_2}{dx}=y_3;\quad \frac{dy_3}{dx}=f(x,y_1,y_2,y_3)$$

來替代這個三級方程。

在[14]中我們已經介紹過類似於這樣的替換。完全一樣的，若有兩個二級方程的方程組：

$$y''=f_1(x,y,y',z,z');\quad z''=f_2(x,y,y',z,z'),$$

其中 y 與 z 是 x 的未知函數，我們就可以用四個一級方程的方程組來替代它。爲此需要引用四個未知函數：$y=y_1$；$y'=y_2$；$z=y_3$；$z'=y_4$。

上面這方程組就可以寫成下面的形狀：

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2;\quad \frac{dy_2}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,y_3,y_4);$$

$$\frac{dy_3}{dx}=y_4;\quad \frac{dy_4}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,y_3,y_4).$$

我們反過來證明，一般說來，求方程組的積分可以化爲求一個高級方程的積分。我們只考慮三個一級方程的方程組，解出微商

$$y_1'=f_1(x, y_1, y_2, y_3);$$
(69) $$y_2'=f_2(x, y_1, y_2, y_3);$$
$$y_3'=f_3(x, y_1, y_2, y_3)。$$

設第一個方程含有 y_2。解出它來，就得到：

(70) $$y_2=\omega_1(x, y_1, y_1', y_3).$$

代入到其他兩個方程中，就有：

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}y'_1+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_3}y'_3+\frac{\partial\omega_1}{\partial y'_1}y_1''=\psi_2(x, y_1, y'_1, y_3);$$

$$y_3'=\psi_3(x, y_1, y_1', y_3).$$

把第二個方程中 y_3' 的表達式代入到第一個方程中，再解出 y_1''，就得到兩個未知函數 y_1 與 y_3 的兩個方程的方程組：

(71) $$y_1''=\varphi(x, y_1, y_1', y_3); \quad y_3'=\psi(x, y_1, y_1', y_3).$$

設第一個方程中含有 y_3，解出它來

(72) $$y_3=\omega_3(x, y_1, y_1', y_1'')$$

再代入到(71)第二個方程中，就得到一個 y_1 的三級方程，它可以寫成.

(73) $$y_1'''=F(x, y_1, y_1', y_1'').$$

假設我們能够求出這個方程的積分：

$$y_1=\Phi(x, C_1, C_2, C_3).$$

代入到方程(72)中，就得到 y_3，再代入到方程(70)中，就得到 y_2，無須再求任何積分。若(71)的第一個方程不含有 y_3，則它就是 y_1 的一個二級方程。它的一般積分應含有兩個任意常數。代入這個一般積分到(71)的第二個方程中，就得到 y_3 的一級方程。求它的積分就引出三個任意常數。最後再由公式(70)確定 y_2，就無須乎求任何積分了。

21. 線性偏微分方程 到現在為止，我們考慮的微分方程，只含有函數對一個自變量的微商。我們講過，這樣的方程叫做常微分方程。現在我們考慮幾種偏微分方程，因為這些方程與常微分方程組的理論有直接的連繫。

回到我們考慮過的微分方程組(47)

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\cdots=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}} \tag{74}$$

我們記得，等式

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C$$

或非恆等於常數的函數 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$，如果把方程組(74)的任何解代入其中都得到常數，它就叫做這方程組的積分。

例如，設 x_1 是自變量，而 $x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ 是 x_1 的函數，它們是方程組(74)的解。代入這些函數到表達式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 中，我們應當得到常數，就是說，代入後的結果中，應當消去了自變量 x_1，於是對 x_1 的全微商應當等於零 [I, 69]：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1}=0,$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}=0. \tag{75}$$

無論把方程組(74)的那個解代入，微分 dx_s 應當與 X_s 的大小成比例，在公式(75)中用成比例的量 X_s 來替代 dx_s，就得到下面的關於 φ 的方程：

$$X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\quad+X_{n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}=0. \tag{76}$$

函數 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 應當滿足這個方程,而與用組(74)的那個解代入到這函數中無關。但是根據存在與唯一定理中初始條件的任意性,若我們取組(74)的所有的解,變量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 就可能取隨意的值,就是說,對於 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 來講,函數 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 應當是恆滿足方程(76)。如此我們得到下面這定理。

定理 若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C$ **是方程組(74)的積分,則函數** $\varphi(x_1 x_2, \cdots, x_{n+1})$ **應當滿足偏微分方程(76)。**

不難證明它的逆命題。

定理 若 $\varphi(x_1 x_2, \cdots, x_{n+1})$ **是方程(76)的任何一個解,則** $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C$ **是方程組(74)的積分。**

實際上,在函數 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 中,代入以方程組(74)的任何一個解,再求全微分

$$d\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n+1})=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}.$$

因爲我們代入了方程組的解,根據(74),可以用成比例的量 X_s 來替代 dx_s,就是 $dx_s=\lambda X_s$,其中 λ 是某一比例係數,由此

$$d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})=\lambda\left(X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+X_{n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\right).$$

但是由定理的條件,對於 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 來講,φ 恆滿足方程(76),我們就有 $d\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=0$。一級微分的表達式,是與諸變量是否爲自變量無關的 [I, 153]。在我們的情形下,當代入以方程組的解時,φ 就是一個自變量的函數,例如是 x_1 的函數;我們說過,這個函數 φ 的微分等於零,就是對 x_1 的微商(代入以後)恆等於零;換句話說,就是代入以後,φ 不依賴於 x_1,而是常數。這就證明了 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 是方程組的積分,於是證完。

以上證明的兩個定理，建立了方程組 (74) 的積分與偏微分方程(76)的解這兩個概念的相抵性。若

$$\varphi_1=C_1\ ;\varphi_2=C_2;\ \cdots;\ \varphi_k=C_k$$

是方程組的 k 個積分，則我們知道，任意函數 $F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots\varphi_k)$ 也是這方程組的積分，於是我們可以說，**方程(76)的任何解的任意函數也是這方程的解**。若

(77) $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C_1;\ \cdots;\quad \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})=C_n$

是方程組(74)的 n 個無關的積分，則任意函數 $F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ 是方程(76)的解。可以證明這就是方程(76)的一般解，我們現在不證。由此得到下述的求方程(76)的積分的法則：**爲要求線性偏微分方程(76)的一般解，先作出對應於這個方程的常微分方程組(74)，再求這方程組的 n 個無關的積分(77)，於是方程(76)的一般解就是：**

$$\varphi=F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n),$$

其中 F 是 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\varphi_n$ 的任意函數。

線性偏微分方程(76)具有兩個特點：它的係數 X_i 不含有未知函數 φ，而它的自由項等於零。在一般情形下，線性方程有下面的形狀：

(78) $$Y_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+Y_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+Y_{n+1}=0,$$

其中 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$ 含有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 與 φ。我們來求下列隱函數形狀的方程(78)的解的族

(79_1) $$\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n, \varphi)=C,$$

其中 C 是任意常數。依照求隱函數的微商的法則：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial\varphi}};$$

代入到(78)中，得到關於 ω 的方程：

$$(79_2) \qquad Y_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+\cdot\;\cdot+Y_n\frac{\partial\omega}{\partial x_n}+Y_{n+1}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=0,$$

它具有上述兩個特點。注意，(79_1)中 C 的任意性使變量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \varphi$ 可能取任何的值，於是像上面一樣，由此推出，對於 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \varphi$ 來講，方程(79_2)應當恆被滿足。解這方程可以化爲求對應於它的常微分方程組的積分。若求出 ω，則可由(79_1)確定出 φ。

注意，偏微分方程的一般解含有任意函數，而在常微分方程的一般解中，只有任意常數出現。

在卷 IV 中，我們再仔細地討論線性偏微分方程，並給出對應的存在與唯一定理。

22. **幾何的解釋** 現在我們來對上面所講的理論在三個變量的情形做一個幾何解釋。設有三維空間的方向場，就是在空間每一點給定了確定的方向。引用任何的直角坐標軸。這時任何方向將由三個數來確定，這三個數與這方向的方向餘弦成比例，所謂方向餘弦就是這方向與各坐標軸交角的餘弦。一般說來，在不同的點我們有不同的方向，而整個方向場由三個函數

$$(80) \qquad u(x, y, z),\ v(x, y, z),\ w(x, y, z)$$

來確定，這幾個量(80)與在點 (x, y, z) 所給定的方向的方向餘弦成比例。

像對於一級方程一樣，我們求空間這樣的曲線，使得在每一個點，這曲線的切線所具有的方向，就是方向場在這點所給定的方向。但是我們知道 [I, 160]，切線的方向餘弦與微分 dx, dy, dz 成比例，而當兩個方向重合時，與它們的方向餘弦成正比的兩組量應當互成比例，就是說，我們有微分方程組：

$$(81)\qquad \frac{dx}{u(x,y,z)}=\frac{dy}{v(x,y,z)}=\frac{dz}{w(x,y,z)}.$$

據此可以確定空間中的未知曲線。

求這個方程組的積分，就是求它的兩個無關的積分

$$(82)\qquad \varphi_1(x,y,z)=C_1;\quad \varphi_2(x,y,z)=C_2,$$

就是說由方程(82)可以解出任何兩個變量來。這兩個方程確定空間的某一曲線[I, 160]；給 C_1 與 C_2 以不同的數值，就得到方程組(81)的積分曲線族。初始條件要求未知曲線通過指定的點 (x_0, y_0, z_0)。由這些初始條件可以確定任意常數 C_1 與 C_2。

現在講偏微分方程的幾何解釋。仍然算作函數(80)確定某一個方向場。要求這樣的曲面，使得在這曲面上每一點，由這方向場所確定的方向，在這曲面的過這點的切面上。設某一未知曲面族的方程是：

$$\varphi(x,y,z)=C.$$

我們知道 [I, 160]，這樣的曲面的法線的方向餘弦與 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 成比例，而這法線的方向應當垂直於由量(80)所確定的方向，因為由量(80)所確定的方向應當在切面上。利用普通兩個方向垂直的條件，就得到確定 φ 的線性偏微分方程

$$(83)\qquad u(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

對應於這個方程的常微分方程組是方程組(81)，所有方程(83)的一般解具有下面這形狀：

$$\varphi=F(\varphi_1, \varphi_2),$$

而未知曲面的一般方程就是

$$(84)\qquad F(\varphi_1, \varphi_2)=0,$$

其中 F 是 φ_1, φ_2 的任意函數。由於 F 的任意性，可以不寫任意常數 C，

而 φ_1 與 φ_2 是方程組(81)的兩個無關的積分。若以一定方式選定函數 F, 則顯然曲面(84)是方程組(81)的那些積分曲線的幾何軌跡，這些積分曲線在等式(82)中的常數值由關係式

(85) $$F(C_1, C_2)=0$$

連繫着。

一般說來，若要求未知曲面通過指定的空間曲線(L)，則方程(83)的解就確定了。這個要求就是對於偏微分方程(83)的初始條件。顯然，未知曲面就是由曲線(L)上的點引出的方程組(81)的積分曲線所組成的，就是說，這些積分曲線的初始條件是由曲線(L)上點的坐標確定的。根據關於方程組(81)的存在與唯一定理，如此我們得到確定的曲面。但是當給定的曲線(L)就是方程組(81)的積分曲線時，這個情形應當除外。在這情形下，以上的作法得不到曲面，而只是曲線(L)本身。設曲線(L)的方程由下面形狀的兩個方程

(86) $$\psi_1(x, y, z)=0; \quad \psi_2(x, y, z)=0$$

給定。由(82)與(86)中四個方程消去三個變量 x, y, z, 就得到一個 C_1 與 C_2 之間的關係式；根據(85)，這個關係式就確定了函數 F 的形狀；為要得到通過曲線(86)的未知曲面的方程(84)，它就是應取的形狀。

23. 例 1. 考慮偏微分方程

(87) $$xz\frac{\partial\varphi}{\partial x}+yz\frac{\partial\varphi}{\partial y}-(x^2+y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

對應的常微分方程組就是

(88) $$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}.$$

以前[19]我們求出了它的兩個無關的積分：

(89) $$\frac{y}{x}=C_1; \quad x^2+y^2+z^2=C_2.$$

第一個方程給出通過 OZ 軸的平面族；第二個——以坐標原點為心的球面族。方程組

(88)的積分曲線是在所述平面上以坐標原點爲心的圓周族。方程(87)的一般解,就是

(90) $$\varphi=F\left(\frac{y}{x},\ x^2+y^2+z^2\right),$$

其中 F 是它的兩個變量的任意函數。現在求函數 F 的形狀,使得曲面

(91) $$F\left(\frac{y}{x},\quad x^2+y^2+z^2\right)=0$$

通過直線

(92) $$x=1;\quad y=z.$$

由方程(89)與(92)消去 x, y, z. 由方程(89)中第一個與方程(92)給出:

$$x=1;\quad y=C_1;\quad z=C_1;$$

代入到方程(89)的第二個中,就得到 C_1 與 C_2 之間的關係式:

$$1+2C_1^2-C_2=0 \text{ 或 } F(C_1,C_2)=1+2C_1^2-C_2.$$

方程(91)中函數 F 取這形狀,就得到未知曲面的方程:

$$1+2\frac{y^2}{x^2}-(x^2+y^2+z^2)=0$$

或

$$x^2+2y^2-x^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$

2. 假設由微分方程組所確定的方向場是這樣的, 就是在空間所有的點方向相同。設 (a, b, c)是與這固定方向的方向餘弦成比例的數。這微分方程組就是:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}$$

或

$$cdx-adz=0;\quad cdy-bdz=0,$$

於是立刻得到兩個積分:

$$cx-az=C_1;\quad cy-bz=C_2.$$

顯然,積分曲線是具有上述固定方向的平行直線。對應的偏微分方程

(93) $$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

所確定的曲面 $\varphi(x, y, z)=0$ 是某些上述直線的幾何軌跡,就是說, 方程(93)是柱面的方程。它的一般積分有如:

$$\varphi=F(cx-az,\ cy-bz),$$

其中 F 是任意函數,於是母線具有上述方向的柱面的一般方程就是:

$$F(cx-az, cy-bz)=0.$$

3. 假設方向場是這樣的，在每一點 $M(x,y,z)$ 的方向，與由定點 $A(a,b,c)$ 到這點 $M(x,y,z)$ 的向量方向相同。這個向量在坐標軸上的投影就是

$$x-a, \quad y-b, \quad z-c,$$

而這三個量與所給的在點 M 的方向的方向餘弦成比例。對應的微分方程組就是：

$$\frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}=\frac{dz}{z-c},$$

於是顯然我們有兩個積分：

$$\frac{x-a}{z-c}=C_1; \quad \frac{y-b}{z-c}=C_2.$$

幾何的意義是很明顯的，積分曲線族是通過點 $A(a,b,c)$ 的直線族。對應的偏微分方程

$$(x-a)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

確定以點 A 為頂點的錐面，這樣的錐面的一般方程就是：

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$$

其中 F 是它的兩個變量的任意函數。

注意，一般說來，通過空間一條給定的曲線 (L)，我們只可以作出一個錐面，它的母線就是連接點 A 與曲線 (L) 上的點的諸直線。但是，若曲線 (L) 是屬於這方程組的積分曲線族的一條曲線，就是說它是通過點 A 的一條直線，則可以作出無窮多的錐面，含有這條直線 (L)。

4. 再考慮微分方程組：

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}. \tag{94}$$

讓這三個比都等於某一新變量 t 的微分 dt，可以寫成：

$$dx=(cy-bz)dt; \quad dy=(az-cx)dt; \quad dz=(bx-ay)dt. \tag{95}$$

由此不難作出可以直接求積分的兩個方程。把方程(95)各乘以 a, b, c 再逐項相加就得到第一個方程，方程(95)各乘以 x, y, z 再逐項相加就得到第二個方程。如此得到兩個方程：

$$adx+bdy+cdz=0; \quad xdx+ydy+zdz=0,$$

求積分就得到這方程組的兩個積分：

(96) $$ax+by+cz=C_1;\quad x^2+y^2+z^2=C_2.$$

第一個積分給出平行的平面族，這些平面的法線的方向餘弦與數值(a, b, c)成比例。第二個積分給出以原點為心的球面族。這些平面與球面的交線就是方程組(94)的積分曲線族。顯然這是圓周族，這些圓周位於上述的平面上，它們的圓心在直線

(97) $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

上，這條直線通過坐標原點而垂直於所有的上述的平面。

不難看出，對應的偏微分方程

$$(cy-bz)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(bx-ay)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

確定以直線(97)為迴轉軸的迴轉面，這樣的曲面的一般方程就是

$$F(ax+by+cz,\quad x^2+y^2+z^2)=0,$$

其中F是它的兩個變量的任意函數。注意方程(97)的分母可以由幾何方法來確定，這只要給出對應的方向場，像我們對以上的例所作的一樣。

5. 關於空間的正交軌面問題引出線性偏微分方程。假設給定曲面族：

(98) $$\omega(x, y, z)=C,$$

它依賴於參變量C，並且一般說來，通過空間任何一點，這族中有一個且僅有一個曲面。要求與所有的曲面(98)交成直角的曲面

(99) $$\varphi(x, y, z)=C_1.$$

由於曲面(98)與(99)的法線互相垂直，就給出關於未知函數φ的線性偏微分方程：

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

對應的常微分方程組

(100) $$\frac{dx}{\frac{\partial\omega}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{dz}{\frac{\partial\omega}{\partial z}}$$

確定的曲線上在每一點的切線是曲面(98)的過這點的法線。若

$$\varphi_1(x, y, z)=C_1;\quad \varphi_2(x, y, z)=C_2$$

是方程組(100)的兩個無關的積分，則未知曲面的方程有如

$$F(\varphi_1, \varphi_2)=0.$$

第二章　線性微分方程及微分方程論的補充知識

§1　一般理論及常係數方程

24. 二級齊次線性方程　線性微分方程的理論是微分方程論中最簡單而且最完善的一部分，同時在應用中線性方程也是最常遇到的。在[4]中我們解過一級線性方程。在這一章中我們考慮任何級線性方程，而由二級方程開始。

下面形狀的方程

$$P(y)=y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{1}$$

叫做二級齊次線性方程，其中用 $P(y)$ 作爲左邊的縮寫記號。

由於對函數 y 及其微商來講，表達式 $P(y)$ 是線性的，於是推出，當 C, C_1 與 C_2 是任意常數時：

$$P(Cy)=CP(y)；\ P(C_1y_1+C_2y_2)=C_1P(y_1)+C_2P(y_2).$$

若 $y=y_1$ 是這方程的一個解，就是 $P(y_1)=0$，則顯然 $P(Cy_1)=0$，就是說，$y=Cy_1$ 也是這方程的解。同樣，若 y_1 與 y_2 是解，則當 C_1 與 C_2 是任意常數時，

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{2}$$

也是解，就是說，**齊次線性方程(1)的解可乘以任意常數再相加，得到的結果仍然是解。**換句話說，任何兩個解的具有常係數的線性結合也是解。顯然，這個性質對於任何級齊次線性方程都成立。以後我們要證明關於方程(1)的存在與唯一定理，這個定理在含有初值 $x=x_0$ 的並且使得 $p(x)$ 與 $q(x)$ 都是連續函數的一個整個的 x 的改變區間上成立。

以下所有的都是對於這樣的區間來講的。普通我們談到方程(1)的解時,所指的解,不算顯然的解 $y\equiv 0$。

如果對於方程(1)的兩個解 y_1 與 y_2, 沒有關於 x 的恆等關係式

$$(3)\qquad \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2=0$$

存在,其中 α_1 與 α_2 是常數係數,而不是零;這兩個解就叫做是線性無關的。換句話說,y_1 與 y_2 線性無關就等於說比$\frac{y_2}{y_1}$不是常量,或者等於說這個比的微商

$$(4)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}$$

不恆等於零。

我們考慮表達式

$$(5)\qquad \Delta(y_1y_2)=y_1y_2'-y_2y_1',$$

它叫做 **y_1 與 y_2 兩個解的朗斯基行列式**。這個行列式具有值得注意的性質:

$$(6)\qquad \Delta(y_1,y_2)=\Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx},$$

其中 Δ_0 是個常量等於當 $x=x_0$ 時 $\Delta(y_1,y_2)$ 的值。

為要證明這個性質,我們計算微商

$$\frac{d\Delta(y_1,y_2)}{dx}=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-y_2y_1''=y_1y_2''-y_2y_1''.$$

注意 y_1 與 y_2 是方程(1)的解,就可以寫成:

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0;\quad y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

第一個方程乘以$(-y_2)$,第二個乘以 y_1, 再逐項相加,就得到:

$$y_1y_2''-y_2y_1''+p(x)(y_1y_2'-y_2y_1')=0,$$

於是推知:

$$\frac{d\Delta(y_1,y_2)}{dx}+p(x)\ \Delta(y_1,y_2)=0.$$

這是一個關於 Δ 的齊次線性方程。應用[4]中公式(31_1),我們直接得到公式(6)。

由這公式推知,$\Delta(y_1,y_2)$或者恆等於零,只要常量 Δ_0 等於零;或者無論 x 取任何值時總不等於零。因爲指數函數不會等於零。這裏我們算作 $p(x)$ 是連續函數。

根據(6),可以把公式(4)寫成:

$$(7)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{\Delta(y_1,y_2)}{y_1^2}=\Delta_0\frac{e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx}}{y_1^2},$$

由此推出,方程(1)的兩個解,必須且僅須當$\Delta(y_1,y_2)$不是零時,就是當 $\Delta_0\neq 0$ 時,它們是線性無關的。

現在證明,若 y_1 與 y_2 是方程(1)的兩個線性無關的解,則可以適當的選擇常數 C_1 與 C_2,使得由公式(2)給出的方程(1)的解,滿足任何預先給定的初始條件:

$$(8)\qquad y\Big|_{x=x_0}=y_0;\quad y'\Big|_{x=x_0}=y'_0.$$

用 y_{1_0}, y_{2_0}, y'_{1_0}, y'_{2_0} 各記當 $x=x_0$ 時 y_1, y_2 以及它們的一級微商的值。爲要滿足初始條件(8),需要由方程組

$$C_1\,y_{1_0}+C_2\,y_{2_0}=y_0;\quad C_1\,y'_{1_0}+C_2\,y'_{2_0}=y'_0$$

來確定公式(2)中的 C_1 與 C_2。

由 y_1 與 y_2 的線性無關性推出

$$\Delta_0=y_{1_0}y'_{2_0}-y_{2_0}y'_{1_0}\neq 0,$$

於是推知,由上面寫的方程組,我們可以得到完全確定的 C_1 與 C_2 的

值，於是證明了上述的肯定。

但是根據存在與唯一定理[5]，方程(1)的任何解由初始條件完全確定，於是我們可以提出下面這個命題：若 y_1 與 y_2 是方程(1)的兩個線性無關的解，則公式(2)給出這方程的所有的解。

如此，求方程(1)的積分的問題就化爲求它的兩個線性無關的解。設 y_1 是這方程的一個解，而 y_2 是它的任何一個解。由關係式(7)求積分，就得到：

$$(9)\qquad \frac{y_2}{y_1}=\Delta_0\int e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2} \quad 或 \quad y_2=\Delta_0 y_1\int e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2},$$

就是說，若知道了方程(1)的一個特殊解，則它的第二個解可以由公式(9)得來，其中 Δ_0 是一個常量，可以假設它等於一。

需要說明，在一般情形下，當 $p(x)$ 與 $q(x)$ 是 x 的函數時，求這一個解的有限形狀或是甚至藉助於積分的形狀，常是不可能的。對於某些特殊情形，例如當 $p(x)$ 與 $q(x)$ 是常量，而不是 x 的函數時，我們將看到，可以得到有限形狀的解。

以後我們還要講在應用中常利用的一種作出解的方法，就是作無窮級數形狀的解的方法。

25. 二級非齊次線性方程 下面形狀的方程

$$(10)\qquad u''+p(x)u'+q(x)u=f(x)$$

叫做二級非齊次線性方程。

設 $u=u_1$ 是這方程的一個特殊解，於是

$$(11)\qquad u_1''+p(x)u_1'+q(x)u_1=f(x).$$

引用新函數 y 以替代 u：

$$(12)\qquad u=y+u_1.$$

代入到方程(10)中，給出

$$[y''+p(x)y'+q(x)y]+[u_1''+p(x)u_1'+q(x)u_1]=f(x),$$

或，根據(11)，

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{13}$$

方程(13)叫做**對應於方程(10)的齊次方程**。若 y_1 與 y_2 是它的兩個線性無關的解，則依照公式(12)以及前一段的命題，公式

$$u=C_1y_1+C_2y_2+u_1,$$

其中 C_1 與 C_2 是任意常數，就給出方程(10)的所有的解。這個性質可以敍述如下：**二級非齊次線性方程的一般解等於對應的齊次方程的一般解與這非齊次方程的任何一個解之和。**

以上所講的證明，對於任何級非齊次線性方程都適用，所以上述的性質對於它們也成立。

現在我們講，知道了齊次方程(13)的兩個線性無關的解，就可以求出方程(10)的一個特殊解，於是推得它的一般解。這裏我們應用的方法叫做拉格朗日改變任意常數法[4]。

設 y_1 與 y_2 是方程(13)的兩個線性無關的解。我們知道，它的一般解就由公式(2)來表達。

我們求方程(10)的具有這樣形狀的解，只是要算作 C_1 與 C_2 不是常數，而是 x 的未知函數：

$$u=v_1(x)y_1+v_2(x)y_2. \tag{14}$$

現在有兩個未知函數，而不是一個，所以除方程 (10) 外，我們可以讓它們符合另一個條件。作出下面這個條件：

$$v_1'(x)y_1+v_2'(x)y_2=0. \tag{15}$$

求表達式(14)的微商並利用條件(15)，就有：

$$\begin{array}{r|l} q(x)\cdot & u=v_1(x)y_1+v_2(x)y_2 \\ p(x)\cdot & u'=v_1(x)y_1'+v_2(x)y_2' \\ 1\ \cdot & u''=v_1(x)y_1''+v_2(x)y_2''+v_1'(x)y_1'+v_2'(x)y_2'. \end{array}$$

代入到方程(10)的左邊，就得到

$$v_1(x)[y''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+v_2(x)[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]+ \\ +v_1'(x)y_1'+v_2'(x)y_2'=f(x).$$

注意，y_1 與 y_2 是齊次方程(13)的解，並回憶條件(15)，就有可用以確定 $v_1'(x)$ 與 $v_2'(x)$ 的方程組：

(16) $$v_1'(x)y_1+v_2'(x)y_2=0;\quad v_1'(x)y_1'+v_2'(x)y_2'=f(x).$$

由於 y_1 與 y_2 是線性無關的：

$$\Delta(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'\neq 0,$$

所以方程組(16)給出 $v_1'(x)$ 與 $v_2'(x)$ 的完全確定的表達式。再求出它們的積分，就求出 $v_1(x)$ 與 $v_2(x)$，代入到(14)中，就得到方程(10)的一個解。

26. 高級線性方程 高級線性方程具有二級方程的許多性質，我們敍述如下，不給證明。

下面形狀的方程叫做 n 級齊次線性方程：

(17) $$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+ \\ +p_n(x)y=0.$$

若 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 是它的解，則和

$$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k$$

也是它的解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 是任意常數。這個肯定的證明，像對二級方程[24]的敍述一樣。

對於 x 來講，若不存在有恆等關係式

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ky_k=0$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 爲常係數，至少有一個不是零；則解 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 叫做線性無關的。

若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是這方程的 n 個線性無關的解，則公式

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n, \tag{18}$$

其中 C_i 爲任意常數，給出這方程的所有的解。適當選擇諸常數 C_i，可以得到滿足任何初始條件：

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0;\quad y'\Big|_{x=x_0} = y_0';\ \ldots;\quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

的唯一的一個解。

n 級非齊次線性方程具有形狀：

$$u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + p_2(x)u^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u = f(x). \tag{19}$$

若 u_1 是這方程的任何一個解，而 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是對應的齊次方程(17)的線性無關的解，則公式

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + u_1,$$

其中 C_i 爲任意常數，給出方程(19)的一般解。

這時，若已知 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，則由公式

$$u = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2 + \cdots + v_n(x)y_n$$

可以得到方程(19)的一個解，其中 $v_i(x)$ 由下列的一次方程組來確定：

$$\begin{aligned}
v_1'(x)y_1 + v_2'(x)y_2 + \ldots + v_n'(x)y_n &= 0\\
v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2' + \ldots + v_n'(x)y_n' &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
v_1'(x)y_1^{(n-2)} + v_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + v_n'(x)y_n^{(n-2)} &= 0\\
v_1'(x)y_1^{(n-1)} + v_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n'(x)y_n^{(n-1)} &= f(x).
\end{aligned}$$

對於熟習行列式理論的讀者，可以講線性無關性的必要且充分條件，這與我們以上對於二級方程所講的類似。像上面一樣，設 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是方程(17)的解。下面這個 n 級行列式：

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & \ldots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

叫做這些解的朗斯基行列式。對於它可以證明類似於公式(6)的公式:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\Delta_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx},$$

其中 Δ_0 是當 $x=x_0$ 時 Δ 的值。像以上一樣,由這公式推知,Δ 或者恆等於零,或者當 x 取任何值時總不等於零。$y_1, y_2, \cdots, y_n$ n 個解線性無關的必要且充分條件就是它們的朗斯基行列式不恆等於零。這時,依照任何初始條件,可以確定出公式(18)中的任意常數。像對二級方程一樣,存在與唯一定理給出在一個整個區間上的解,在這區間上,這方程的係數 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$是連續函數。

27. 常係數二級齊次方程 先講常係數方程,我們證明一個以後要用的微分學中的公式。若 r 是某一實數,我們已知下面這個關於函數 e^{rx} 的微商的公式:

$$(e^{rx})'=re^{rx}.$$

我們證明,當 r 是複數而 x 是普通實變數時,這個公式仍然成立,就是說

$$(e^{(a+bi)x})'=(a+bi)e^{(a+bi)x}.$$

實際上由複指數的指數函數定義 [I, 176] 推出:

$$e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx).$$

依照普通法則求這個函數的微商,就得到:

$$(e^{(a+bi)x})'=ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+be^{ax}(-\sin bx+i\cos bx),$$

或者,由第二個括號內提出 i,並注意 $\frac{1}{i}=-i$:

$$(e^{(a+bi)x})' = ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + bi\ e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$
$$= (a+bi)e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = (a+bi)e^{(a+bi)x},$$

於是證完。

現在我們求常係數二級齊次方程

(20) $$y'' + py' + qy = 0$$

的解，其中 p 與 q 是給定的常數。用函數 e^{rx} 替代這方程中的 y，就是讓

(21) $$y = e^{rx}.$$

求出微商再提出 e^{rx} 就得到：

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0,$$

若 r 是二次方程

(22) $$r^2 + pr + q = 0$$

的根，則方程(20)就確實被滿足；方程(22)叫做方程(20)的特徵方程。若這二次方程有兩個不同的根 $r = r_1$ 與 $r = r_2$，則公式(21)給出這方程的兩個線性無關的解：

(23) $$y_1 = e^{r_1x},\quad y_2 = e^{r_2x}.$$

實際上，不難看出，它們的比 $e^{r_2x} : e^{r_1x} = e^{(r_2-r_1)x}$ 不是常量。現在考慮方程(22)有等根的情形。由求二次方程的根的公式，這個情形也就是當 $p^2 - 4q = 0$ 時，這時這方程的唯一的根由下式確定：

(24) $$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}.$$

在這情形下，由上述的作法，只能得到一個解 $y_1 = e^{r_1x}$，還要再求第二個解。爲此，我們應用下述的討論。

我們略微改變係數 p 與 q，使得兩個根不相同，例如，使得 r_1 仍具有原先的值(24)，而 r_2 與它略差一點。這時就得到兩個解。這兩個

相減再用(r_2-r_1)除。如此我們又得到一個解[24]:

$$y=\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}. \tag{25}$$

現在再改變係數 p 與 q 的值,使趨向原有的值,就是方程(22)具有的二重根時的值。這時,r_2 將趨向 r_1, 公式(25)中分子與分母都趨向零,而整個分式的極限就是函數 e^{rx} 當 $r=r_1$ 時對 r 的微商,就是說 $y_2=xe^{r_1x}$ 是這方程的第二個解。於是,在方程(22)有等根的情形,我們有下列兩個線性無關的解:

$$y_1=e^{r_1x};\quad y_2=xe^{r_1x}. \tag{26}$$

直接代入可以肯定 y_2 實際上是這方程的解。代入 y_2 到方程(20)的左邊,就得到:

$$(r_1^2xe^{r_1x}+2r_1e^{r_1x})+p(r_1xe^{r_1x}+e^{r_1x})+qxe^{r_1x}$$
$$=xe^{r_1x}(r_1^2+pr_1+q)+e^{r_1x}(2r_1+p).$$

右邊的第一項等於零,因爲 $r=r_1$ 是方程(22)的根;根據(24),第二項也等於零;如此 y_2 確實是方程(20)的解。

我們算作係數 p 與 q 是實數。但是二次方程(22)的根可能是實數,也可能是複數。若方程(22)有不同的實根,則公式(23)給出兩個不同的實解,而方程的一般積分就是

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \tag{27}$$

假設方程(22)有複根。它們應當是共軛的[I, 189],就是 $r_1=\alpha+\beta i$ 與 $r_2=\alpha-\beta i$, 於是公式(23)給出解:

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x);$$
$$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

由這兩個解的線性結合作出另外兩個解:

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

這兩個解也是線性無關的，於是推知，在方程(22)有複根 $r=\alpha\pm\beta i$ 的情形下，方程的一般積分是

(28) $$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

最後，若方程(22)有一個根，則根據(26)，方程的一般積分是

(29) $$y=(C_1+C_2x).e^{r_1x}$$

還要提出公式(28)的一個特殊情形，就是當方程(22)有虛根時，也就是 $\alpha=0$時。這時，應當是 $p=0$，而 q 爲正數。記作 $q=k^2$，方程(22)就有根$\pm ki$，於是推知，方程

(30) $$y''+k^2y=0$$

具有一般積分：

(31) $$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx.$$

28. **常係數二級非齊次線性方程**　現在考慮非齊次方程

(32) $$y''+py'+qy=f(x),$$

其中 p 與 q 是預先給定的實數而 $f(x)$是給定的 x 的函數。爲要求這方程的一般積分，只須求出它的一個特殊解，再與對應的齊次方程(20)的一般積分相加。因爲這齊次方程的一般積分是已知的，可以利用改變任意常數法[25]求出一個特殊解。例如，對於下面形狀的方程：

(33) $$y''+ky^2=f(x).$$

對應的齊次方程的一般積分由公式(31)確定，我們要求方程(33)的特殊解，就由下面的形狀來求：

(34) $$u=v_1(x)\cos kx+v_2(x)\sin kx,$$

其中 $v_1(x)$ 與 $v_2(x)$是 x 的未知函數。在這情形下，方程(16)給出用以確定這兩個函數的微商的兩個一次方程的方程組：

$$v_1'(x)\ \cos kx + v_2'(x)\ \sin kx = 0$$

$$-v_1'(x)\ \sin kx + v_2'(x)\ \cos kx = \frac{1}{k} f(x).$$

解它就得到:

$$v_1'(x) = -\frac{1}{k} f(x) \sin kx, \quad v_2'(x) = \frac{1}{k} f(x) \cos kx.$$

把原函數寫成具有變上限的積分的形狀,用 ξ 記積分變量:

$$v_1(x) = -\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin k\xi\, d\xi; \quad v_2(x) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cos k\xi\, d\xi,$$

其中 x_0 是某一個固定的數。代入到公式(34)中,就得到特殊解:

$$(34_1) \qquad u = -\frac{\cos kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin k\xi\, d\xi + \frac{\sin kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cos k\xi\, d\xi$$

或者,提出 $\frac{1}{k}$,再合併諸三角函數,就得到:

$$(34_2) \qquad u = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin k(x-\xi)\, d\xi,$$

於是方程(33)的一般積分就是:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin k(x-\xi)\, d\xi.$$

對於公式(34_2),我們給一個附註。這公式右邊的變量 x 以雙重姿態出現。第一,x 是積分的上限,第二,它在積分號下出現,但不是積分變量,而是一個附加的參變量,求積分時,它算作是常量。再者,不難證明,特殊解(34_2)當 $x=x_0$ 時滿足零初始條件,就是

$$(34_3) \qquad u\big|_{x=x_0} = 0, \quad u'\big|_{x=x_0} = 0.$$

第一個等式可以由 (34_2) 直接推出，因爲當 $x=x_0$ 時，積分的上限與下限相同，於是積分等於零。爲要引出第二個等式，由公式(34_1)確定 u'，注意一個積分對上限的微商等於被積函數，只要取上限作變量。顯然，經過相消就得到：

$$u'=\sin kx\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k\xi\,d\xi+\cos kx\int_{x_0}^{x} f(\xi)\cos k\xi\,d\xi,$$

由此直接推出(34_3)中第二個公式。

29．特殊情形 若方程(32)的右邊有特殊的形狀，則可以用較好較容易的方法來求特殊解，不必用改變任意常數法。我們先講一個附註。設方程(32)的右邊是兩項之和：

(35) $$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x),$$

並設 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 各爲右邊等於 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 的非齊次方程的特殊解，就是說

$$u_1''+pu_1'+qu_1=f_1(x);\quad u_2''+pu_2'+qu_2=f_2(x).$$

相加，就得到

$$(u_1+u_2)''+p(u_1+u_2)'+q(u_1+u_2)=f_1(x)+f_2(x),$$

就是說，(u_1+u_2) 是方程(35)的特殊解。

現在考慮下面形狀的非齊次方程：

(36) $$y''+py'+qy=ae^{kx},$$

其中在右邊的 a 與 k 是給定的數。以後，爲寫起來簡短起見，對於方程(22)的左邊我們引用一個特殊的記號：

(37) $$\varphi(r)=r^2+pr+q.$$

我們來求方程(36)的與自由項形狀相同的解：

$$y=a_1e^{kx},$$

其中 a_1 是未知係數。代入到(36)中再消去 e^{kx}，就得到確定 a_1 的方程，根據(37)，它可以寫成下面的形狀：

$$\varphi(k)a_1=a.$$

若 k 不是方程(22)的根，就是 $\varphi(k)\neq0$，則由這個方程確定出 a_1。設 k 是方程(22)的單根，就是 $\varphi(k)=0$，而 $\varphi'(k)\neq0$ [I, 186]。在所給的情形下，就要求方程(36)具有下面形狀

的解：

$$y=a_1xe^{kx}。$$

代入到這方程中再消去 e^{kx}，就得到：

$$\varphi(k)\ a_1x+\varphi'(k)\ a_1=a,$$

或者，根據 $\varphi(k)=0$，

$$\varphi'(k)a_1=a,$$

由此確定出 a_1，因爲 $\varphi'(k)\neq 0$. 最後，若 k 是方程(22)的二重根，就是說 $\varphi(k)=\varphi'(k)=0$，則像以上一樣，不難證明，方程的解需要由下面的形狀來求：

$$y=a_1x^2e^{kx}.$$

在較普遍的情形下，當自由項具有乘積 $P(x)e^{kx}$ 的形狀，其中 $P(x)$ 是 x 的多項式時，可以用同樣的方法來求解，若 k 不是方程(22)的根，則需要找下面形狀的解：

$$y=P_1(x)e^{kx}, \tag{38}$$

其中 $P_1(x)$ 是與 $P(x)$ 同次的多項式，這時要求的是 $P_1(x)$ 的係數。把(38)代入到方程中，消去 e^{kx}，再讓 x 同次項的係數相等，就得到確定 $P_1(x)$ 的係數的方程。

若 k 是方程(22)的根，則(37)的右邊需要乘以 x 或 x^2，這要看 k 是方程(22)的單根還是二重根。

現在來講自由項含有三角函數的情形。先考慮方程

$$y''+py'+qy=e^{kx}(a\cos lx+b\sin lx). \tag{39}$$

利用公式 [I, 177]

$$\cos\ lx=\frac{e^{lxi}+e^{-lxi}}{2},\quad \sin\ lx=\frac{e^{lxi}-e^{-lxi}}{2i},$$

方程(39)的右邊可以表示成下面的形狀：

$$Ae^{(k+li)x}+Be^{(k-li)x},$$

其中 A 與 B 是某兩個常數。若共軛數$(k\pm li)$不是方程(22)的根，則依照上面，需要求下面形狀的解：

$$y=A_1e^{(k+li)x}+B_1e^{(k-li)x},$$

或者，由指數函數化回三角函數

$$e^{\pm lxi}=\cos\ lx\pm i\ \sin\ lx,$$

我們看出，若$(k\pm li)$不是方程(22)的根，則要求方程(39)的具有下面的形狀的解：

$$(40)\qquad y=e^{kx}(a_1\cos lx+b_1\sin lx),$$

其中 a_1 與 b_1 是未知常數。同樣可以證明，若 $(k\pm li)$ 是方程(22)的根，則公式(40)右邊需要乘以 x.把表達式(40)代入到方程(39)中就確定出常數 a_1 與 b_1。注意，若方程(39)的右邊只有一項，例如只有含 $\cos lx$ 的一項，則在解(40)中仍然需要取兩項，一項含有 $\cos lx$，一項含有 $\sin lx$。

再講一個較普遍的結果，我們不證。若右邊具有下面的形狀：

$$e^{kx}[P(x)\cos lx+Q(x)\sin lx],$$

其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 是 x 的多項式，則要求的解有同樣的形狀

$$e^{kx}[P_1(x)\cos lx+Q_1(x)\sin lx],$$

其中 $P_1(x)$ 與 $Q_1(x)$ 是 x 的多項式，它們的次數等於 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 中較高的次數。若 $(k\pm li)$ 是方程(22)的根，則需要再乘以 x.

30. 常係數高級線性方程　在這一段中，與以前對於高級方程類似，我們只講結果，不講證明。以後當我們藉助於特殊的方法——記號因子法——來討論常係數線性方程的一般理論時，再證明所述的結果。

n 級齊次方程具有形狀：

$$(41)\qquad y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0,$$

其中 p_1 p_2, $\cdots$, p_n 是給定的實數。作出類似於方程(22)的特徵方程：

$$(42)\qquad r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0.$$

這個方程的任何一個單實根 $r=r_1$ 對應於一個解 $y=e^{r_1x}$，若這個根是 s 重的，則它就對應於下面的 s 個解：

$$e^{r_1x}, xe^{r_1x},\ x^2e^{r_1x},\ \cdots,\ x^{s-1}e^{r_1x},$$

一對共軛複數單根 $r=\alpha\pm\beta i$ 對應於兩個解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\ \text{與}\ e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

若這兩個根不是單根，而是 s 重根，則它們對應於下面的 $2s$ 個解：

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \cdots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \cdots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

如此，利用方程(42)的所有的根，我們就得到方程(41)的 n 個解。這些解各乘以任意常數再相加，就得到這方程的一般積分。

爲要求非齊次方程:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1} y'+p_n y=f(x)$$

的特殊解，可以應用改變任意常數法 [26].

若右邊有 $P(x)e^{kx}$ 的形狀，而 k 不是方程(42)的根，則方程的解可以由 $y=P_1(x)e^{kx}$ 的形狀來求，其中 $P_1(x)$ 是與 $P(x)$ 次數相同的多項式。若 k 是方程(42)的 s 重根，則需要設 $y=x^s P_1(x)e^{kx}$。若右邊有下面的形狀:

$$f(x)=e^{kx}[P(x)\cos lx+Q(x)\sin lx], \tag{43}$$

而 $(k\pm li)$ 不是方程(42)的根，則解需要由同樣的形狀來求:

$$y=e^{kx}[P_1(x)\cos lx+Q_1(x)\sin lx],$$

其中多項式 $P_1(x)$ 與 $Q_1(x)$ 的次數需要取多項式 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 中的較高次數。

若 $(k\pm li)$ 是(42)的 s 重根，則最後的公式右邊需要乘以因子 x^s。

例 1. 考慮方程

$$y''-5y'+6y=4\sin 2x.$$

對應的特徵方程

$$r^2-5r+6=0$$

有根 $r_1=2$ 與 $r_2=3$. 齊次方程的一般積分就是

$$C_1e^{2x}+C_2e^{3x}. \tag{44}$$

方程的特殊解由下面的形狀來求:

$$y=a_1\cos 2x+b_1\sin 2x.$$

代入到方程中，得到:

$$(2a_1-10b_1)\cos 2x+(16a_1-4b_1)\sin 2x=4\sin 2x,$$

於是給出

$$2a_1-10b_1=0;\ 16a_1-4b_1=4,$$

由此 $a_1=\frac{5}{19}$, $b_1=\frac{1}{19}$, 就是說，特殊解是:

$$y=\frac{5}{19}\cos 2x+\frac{1}{19}\sin 2x.$$

它與(44)相加，就得到這方程的一般積分。

2．取四級方程：

$$y^{(IV)}-2y'''+2y''-2y'+y=x\ \sin\ x$$

對應的特徵方程

$$r^4-2r^3+2r^2-2r+1=0$$

可以表示成下面的形狀：

$$(r^2+1)(r-1)^2=0,$$

它有重根 $r_1=r_2=1$ 及一對虛根 $r_{3,4}=\pm i$. 齊次方程的一般積分是：

$$(C_1+C_2x)\ e^x+C_3\ \cos\ x+C_4\ \sin\ x. \tag{45}$$

比較自由項與公式(43),看出在所給的情形下 $k=0$ $l=1$, $p=1$, 而 $k\pm li=\pm i$ 是特徵方程的單根,所以特殊解需要由下面的形狀來求：

$$y=x[(ax+b)\cos\ x+(cx+d)\sin\ x]=(ax^2+bx)\cos\ x+(cx^2+dx)\sin\ x,$$

其中 $a,\ b,\ c,\ d$ 是要求的係數。

31. 線性方程與振動現象　我們考慮振動現象藉以明確常係數二級線性方程的意義。以後我們換個記法,時常用 t (時間)來記自變量，而用 x 來記函數。

設有質量爲 m 的物體,懸掛在一個彈簧上時，我們考慮在使得物體的重量與彈簧的彈性力平衡的平衡位置附近的鉛直振動。

設 x 是物體沿鉛直方向到平衡位置的距離（圖22）。假設是在一種介質中運動,這介質的阻力與速度 $\frac{dx}{dt}$ 成比例。

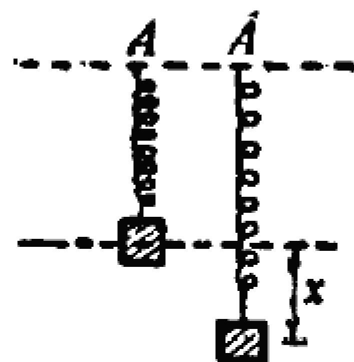


圖 22.

作用於這物體上的有以下各力：1) 將物體牽向平衡位置的彈簧的恢復力，我們算作它與物體由平衡位置伸長的一段 x 成正例；2) 與速度的大小成比例而與速度的方向相反的阻力。這運動的微分方程就是：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt}-cx\ \text{或}\ m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0$$

作爲第二個特例，我們考慮在有阻力的介質中長爲 l 的單擺的運

動，阻力與速度成比例。由力學知道，這運動的微分方程是：

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta-b\frac{d\theta}{dt}, \tag{46}$$

其中 θ 是擺離開平衡位置的偏角。考慮在平衡位置附近擺的振動很小的情形時，我們可以用角度 θ 來替代 $\sin\theta$，於是方程(46)成爲下面的形狀：

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt}+mg\,\theta=0. \tag{47}$$

此外，若有依賴於時間的外力作用在這個擺上，則替代方程(47)而有具有自由項的方程：

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt}+mg\,\theta=f(t). \tag{48}$$

在所考慮的兩種情形下，運動都是由常係數二級線性微分方程來確定的。

以後我們考慮這樣的方程時，把它們寫成下面的形狀：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{49}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t). \tag{50}$$

一般說來，當考慮具有一個自由度的體系在平衡位置附近的很小的振動時，我們常得到這樣的方程。$2h\frac{dx}{dt}$這一項是由介質的阻力或摩擦力產生的，而 h 叫做阻力係數；k^2x 這一項是由體系的內力產生的，這內力將這體系牽向平衡位置，而 k^2 叫做恢復係數；方程(50)中的自由項是由作用在這體系上的外面的干涉力產生的。所寫的方程不僅當考慮力學中體系的振動時會遇到，在各種連繫於振動現象的物理問題中總常會遇到。作爲一個特例，我們考慮電容爲C的電容器的放電現

象，通過具有電阻R與自感係數L的線路。用v記電容器兩面上的電動勢，對於這線路就有

(51) $$v=Ri+L\frac{di}{dt},$$

其中i是線路中的電流强度。此外，還知道有下面的關係式

(52) $$i=-C\frac{dv}{dt}.$$

設在線路中還有具有電動力E的電源，若它作用所在的方向與i相反，我們就算作正的。在這情形下，替代方程(51)，就有

$$v-E=Ri+L\frac{di}{dt}.$$

把表達式(52)代入到所寫的方程中，就得到微分方程：

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=E,$$

或

(53) $$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=\frac{E}{LC}.$$

比較這個方程與方程(50)，我們看出，$\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}$類似於由阻力產生的一項，$\frac{1}{LC}v$類似於由恢復力產生的一項，自由項$\frac{E}{LC}$類似於由干涉力產生的一項。

若由方程(53)求出v，再代入到公式(52)中，則可以確定出i.

32. **自有振動與强迫振動** 考慮齊次方程

(54) $$x''+2hx'+k^2x=0,$$

它對應於沒有外力的情形。這個方程的解確定出**自由振動**，或者說是**自有振動**。對應的特徵方程是：

(55) $$r^2+2hr+k^2=0$$

以下我們分爲各別的情形來討論。

1. 阻尼振動　在很多情形下，阻力係數 h 比較恢復係數 k^2 小得多，以至於差(h^2-k^2)是負數：$h^2-k^2=-p^2$。在這情形下，方程(55)有共軛複根：$r_{1,2}=-h\pm pi$，於是我們有方程(54)的一般積分

$$x=e^{-ht}(C_1\cos pt+C_2\sin pt). \tag{56}$$

讓

$$C_1=A\sin\varphi;\quad C_2=A\cos\varphi, \tag{57}$$

解(56)就化爲下面的形狀：

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi), \tag{58}$$

或者，讓 $p=\dfrac{2\pi}{\tau}$，

$$x=Ae^{-ht}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\varphi\right). \tag{59}$$

這裏 τ 是自由振動的週期，A 是開始的振幅，φ 是初相。若在計算中不取介質的阻力，就是設 $h=0$，則方程(55)就有根 $r=\pm ki$，於是替代(58)得到

$$x=A\sin(kt+\varphi). \tag{60}$$

這是具有週期 $\tau=\dfrac{2\pi}{k}$ 的簡諧振動。公式(59)給出阻尼振動[I, 59]，其中因子 e^{-ht} 表現出阻尼的快慢。在等於週期的時間區間上，振幅減小 $e^{-h\tau}$ 倍。在公式(56)中的常數 C_1 與 C_2 的值，或公式(58)中常數 A 與 φ 的值，依賴於初始條件。設初始條件是：

$$x\big|_{t=0}=x_0;\quad x'\big|_{t=0}=x_0'. \tag{61}$$

在公式(56)中代入 $t=0$，得到 $C_1=x_0$。求公式(56)對 t 的微商：

$$x'=-he^{-ht}(C_1\cos pt+C_2\sin pt)+pe^{-ht}(-C_1\cos pt+C_2\cos pt),$$

由此，代入 $t=0$，得到

(62) $$C_2=\frac{x_0'+hx_0}{p},$$

於是結果得到滿足初始條件(61)的解是:

(63) $$x=e^{-ht}\left(x_0\cos pt+\frac{x_0'+hx_0}{p}\sin pt\right).$$

注意，在解(63)中的阻力係數 h 以及振動頻率 $p=\sqrt{k^2-h^2}$ 由方程(54)的係數完全確定。這也涉及振幅 A 與初相 φ，所以它們也依賴於初始條件，根據(57)，可以寫出等式:

$$A\sin\varphi=x_0;\quad A\cos\varphi=\frac{x_0'+hx}{p},$$

由這兩個等式確定出 A 與 φ, 若 $h=0$, 則各處的 p 需要用 k 來替換。

2. **非週期運動**　若差(h^2-k^2)是正的:

$$h^2-k^2=q^2,$$

則方程(55)的根是:

(64) $$r_1=-h+q;\quad r_2=-h-q,$$

於是我們有[27]:

(65) $$x=C_1e^{(q-h)t}+C_2e^{-(q+h)t}.$$

這時顯然 $q<h$, 於是兩個根(64)都是負的，所以當 t 無限增加時 x 趨向零。

由等式(65)對 t 求微商:

(66) $$x'=C_1(q-h)e^{(q-h)t}-C_2(q+h)e^{-(q+h)t}.$$

在等式(65)與(66)中讓 $t=0$，得到兩個通過給定的初始條件(61)來確定常數 C_1 與 C_2 的方程:

$$C_1+C_2=x_0;\quad (q-h)C_1-(q+h)C_2=x_0',$$

由此

$$C_1=\frac{(q+h)x_0+x_0'}{2q};\ C_2=\frac{(q-h)x_0-x_0'}{2q}.$$

3. 非週期運動的特殊情形 最後，若 $h^2-k^2=0$，則方程(55)有重根 $r_1=r_2=-h$，於是 [27]

(67) $$x=e^{-ht}(C_1+C_2\ t).$$

由於當 t 無限增加時，函數 te^{-ht} 趨向零 [I, 66]，所以表達式(67)也趨向零。

非齊次方程

(68) $$x''+2hx'+k^2x=f(t),$$

其中自由項 $f(t)$ 是由外力產生的，確定出**強迫振動**。在自有振動是簡諧的情形：

(69) $$x''+kx^2=f(t),$$

我們有這個方程的一般解 [28]：

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\ du,$$

這裏右邊最後一項給出純強迫振動，就是，滿足零初始條件

(70) $$x\,|_{t=0}=x'\,|_{t=0}=0$$

的方程(69)的解。利用改變任意常數法，可以證明，在自有振動是阻尼振動的情形，滿足初始條件(70)的特殊解是：

(71) $$x_0(t)=\frac{1}{p}e^{-ht}\int_0^t e^{hu}f(u)\sin p(t-u)\ du,$$

而在非週期的情形，這個特殊解是：

$$(72)\qquad x_0(t)=\frac{1}{2q}e^{(q-h)t}\int_0^t e^{(h-q)u}f(u)\,du-$$

$$-\frac{1}{2q}e^{-(q+h)t}\int_0^t e^{(q+h)u}f(u)\,du.$$

這些請讀者自己作出。

33. 正弦量外力與共振　在應用中自由項常是正弦量:

$$(73)\qquad x''+2hx'+k^2x=H_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

在這情形下,要求的解是與自由項有相同頻率 ω 的正弦量的形狀[29]:

$$(74)\qquad x=N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta).$$

需要確定這個振動的振幅 N 以及相的改變 δ,代入表達式(74)到方程(73)中:

$$-\omega^2N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta)+2h\omega N\cos(\omega t+\varphi_0+\delta)+k^2N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta)=H_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

這等式左邊諸三角函數的變量可以表示成兩項$(\omega t+\varphi_0)$與 δ 之和的形狀。利用關於和的正弦與餘弦的公式,得到:

$$[(k^2-\omega^2)N\cos\delta-2h\omega N\sin\delta]\sin(\omega t+\varphi_0)+$$
$$+[2h\omega N\cos\delta+(k^2-\omega^2)N\sin\delta]\cos(\omega t+\varphi_0)=H_0\sin(\omega t+\varphi_0).$$

讓 $\sin(\omega t+\varphi_0)$ 的係數等於常數 H_0,讓 $\cos(\omega t+\varphi_0)$ 的係數等於零,就得到兩個用以確定 N 與 δ 的方程:

$$(k^2-\omega^2)N\cos\delta-2h\omega N\sin\delta=H_0;\quad 2h\omega N\cos\delta+(k^2-\omega^2)N\sin\delta=0.$$

解出 $\cos\delta$ 與 $\sin\delta$:

$$\cos\delta=\frac{(k^2-\omega^2)H_0}{N[(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2]};\quad \sin\delta=-\frac{2h\omega H_0}{N[(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2]}$$

逐項乘平方再相加,得到:

$$1=\frac{H_0^2}{N^2[(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2]},$$

由此求得

$$(75)\qquad N=\frac{H_0}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}.$$

把這個N的值代入到以上 $\cos\delta$ 與 $\sin\delta$ 的表達式中，就得到確定 δ 的公式：

(76) $$\cos\delta=\frac{k^2-\omega^2}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}};\qquad \sin\delta=-\frac{2h\omega}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}.$$

有了 N 與 δ 的值，依照公式(74)就得到方程(73)的一個正弦量的特殊解。這方程的一般解就是

(77) $$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+N\sin(\omega t+\varphi_0+\delta),$$

其中 A 與 φ 是要由初始條件來確定的任意常數。這時我們算作 $h^2-k^2=-p^2<0$，就是說，自有振動是阻尼振動。由於在表達式(77)中第一項有個因子 e^{-ht} $(h>0)$，當 t 增加時它很快的下降。所以這一項，只是當 t 逼近於零時，對 x 的大小有顯著的影響（暫態過程），而在以後，x 的大小就差不多單純由第二項來確定，這第二項不依賴於初始條件而是純粹的正弦量（穩定過程）。

現在我們來研究公式(75)與(76)，它們是用來確定振幅 N 以及解(74)與方程(73)中自由項的相之差的。

若在方程(73)的右邊只是一個常量 H_0，則方程

$$x''+2hx'+k^2x=H_0$$

顯然有常數形狀的特殊解

$$\xi_0=\frac{H_0}{k^2}.$$

這個常數是靜差度的大小，它是由常力所產生的。

我們來考慮比

$$\lambda=\frac{N}{\xi_0},$$

它是用來測量這個體系關於作用的外力的動力容納度的。注意公式(75)與 ξ_0 的表達式，得到：

$$\lambda=\frac{k^2}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}\right)^2+\frac{4h^2}{k^2}\cdot\frac{\omega^2}{k^2}}}.$$

由最後的表達式看出，λ 只依賴於兩個比：

(78) $$q=\frac{\omega}{k};\quad \gamma=\frac{2h}{k}.$$

我們來看第一個比的力學意義。若沒有阻力，則自有振動由[32]中的公式來表達，

$$x=A\ \sin\ (kt+\varphi),$$

於是有週期 $\tau=\frac{2\pi}{k}$。用 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 來記干涉力的週期。這時對於 q 我們得到

$$q=\frac{\tau}{T}, \tag{79}$$

就是說 q 等於沒有阻力時自有振動的週期與干涉力的週期之比。

如此，對於量 λ 我們得到：

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2+\gamma^2q^2}}, \tag{80}$$

其中 q 的意義上面已經解釋了，至於常量 γ，由它的定義看出，是不依賴於作用的外力的。由於 h 很小，常量 γ 通常也很小，於是若 q 不逼近於一，則 λ 逼近於 $\frac{1}{(1-q^2)}$。圖23上表示出，對於某些給定的 γ 的值，量 λ 作爲 q 的函數的圖形。

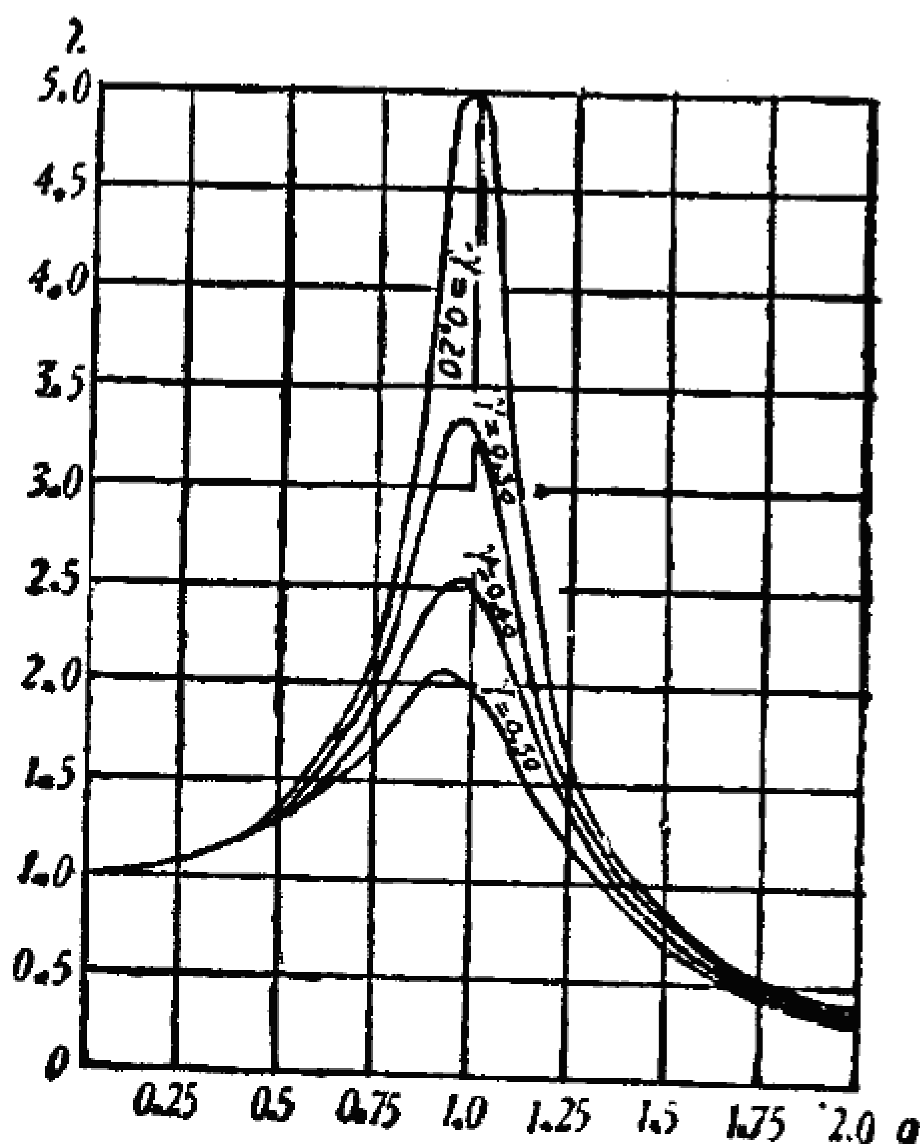


圖 23.

在表達式（76）中，分子分母用 k^2 除，得到公式：

$$\cos\delta=(1-q^2)\lambda; \tag{81}$$

$$\sin\delta=-\gamma q\lambda,$$

它確定出外力與由它干涉的結果的相之差。

量 λ 通過中間量 q 依賴於週期 T. 我們來求作爲 q 的函數的量 λ 的極大值。爲此只須求出作爲 q^2 的函數的

$$\frac{1}{\lambda^2}=(1-q^2)^2+\gamma^2q^2$$

的極小值。不難看出，當 $q^2=1-\frac{\gamma^2}{2}$ 時，達到這個極小值，並且這個極小值等於 $\left(\gamma^2-\frac{\gamma^4}{4}\right)$。由此推知，當

$$q=\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2}} \tag{82}$$

時 λ 達到極大值，而且等於

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}}.$$

當 γ 很小時，對應於 λ 的極大值的量 q 逼近於一，就是說，當給定了振幅時，產生最大效果的外力的週期逼近於自有振動的週期。這兩個週期之差依賴於因阻力的存在而產生的量 γ。

若沒有阻力，則 $\gamma=0$，於是當 q 等於 1 時，λ 達到極大值，而成爲無窮大。

在這情形下，由於特徵條件 $h=0$ 與 $\omega=k$，方程(73)就是

$$x''+k^2x=H_0\sin(kt+\varphi_0), \tag{83}$$

於是它的解就不可能是 [74] 的形狀。

留給讀者驗證，方程(83)有解

$$x=-\frac{H_0}{2k}t\cos(kt+\varphi_0),$$

它含有 t 作爲因子 [29]。

再回來考慮有阻力的情形，就是 $h\neq0$ 的情形。由圖看出，量 λ 很快的上升，經過極大值以後就很快的下降。當 γ 很小時，由公式(80)不難肯定這一點。在公式(81)中代入以 $\lambda_{\max}$ 以及公式(82)中的 q 的表達式，就得到：

$$\cos\delta=\frac{\gamma}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}};\qquad \sin\delta=-\frac{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}},$$

由此看出，當外力的效果最大而 γ 很小時，相之差 δ 逼近於 $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$。

現在回到公式(77)。當 t 的值比較相當大時，給出自有阻尼振動的第一項與第二項典比較是很小的。現在我們改變 ω 的大小，就是改變干涉力的週期 T。根據以上所述，這時就有下述的現象發生：當 T 趨向於某一個確定的值時，強迫振動就很快的增強達到極大，以後 T 再改變時就很快的減弱。這個現象叫做共振。各種具有振動的現象常會遇到這種情形：例如，質系的振動、電振動、聲的現象等等。

現在設方程的右邊是幾個正弦量之和：

(84)
$$x''+2hx'+k^2x=\sum_{i=1}^{m}H_i\sin(\omega_it+\varphi_i).$$

這方程右邊的每一項對應於某一個下面形狀的強迫振動：

$$N_i\sin(\omega_it+\varphi_i+\delta_i)\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

其中的 N_i 與 δ_i，當方程的右邊已知時，由公式(75)與(76)來確定。所有的外力之和就對應於上述諸強迫振動之和，就是說，方程(84)的特殊解是 [29]

(85)
$$x=\sum_{i=1}^{m}N_i\sin(\omega_it+\varphi_i+\delta_i).$$

現在我們講，如果方程(84)右邊各項的振幅與週期是未知的話，如何通過觀察這個振動來確定它們。

設我們可以改變 k^2 的大小，就是改變自有振動的週期 τ. 這時就有下面的現象發生：當 τ 逼近於某一個值 τ_1 時這個強迫振動的振幅很快的增大達到極大值，以後 τ 再改變時就很快的減小，並且當 τ 尚未逼近於第二個值 τ_2 時，它就保持很小，τ_2 對應於振幅有上述特徵的第二個極大值，以下類推。

這些極大值可以解釋作與方程(84)右邊的外力之一的共振現象，而 $\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots$ 諸值給出這些外力的週期的近似值。把自有振動的週期放在橫軸，強迫振動的振幅放在縱軸，就得到具有些個極大值的曲線(圖24)。

當 $\tau=\tau_j\left(\text{或 } k=k_j=\dfrac{2\pi}{\tau_j}\right)$ 時，在和(85)中就有一項比其餘的項大，也就是 ω_j 逼近於 k_j 的一項。由實驗觀察強迫振動的振幅的極大值，我們可以算作它近似等於 N_j，再由公式

$$N_j\approx\frac{H_j}{\sqrt{(k_j-\omega_j)^2+4h^2\omega_j^2}},$$

並注意 k_j 逼近於 ω_j，就可以求出外力的近似值：

$$H_j\approx 2hk_j\ N_j.$$

34．**衝力型外力**　考慮沒有摩擦的強迫振動

(86)
$$x''+k^2x=f(t),$$

設外力 $f(t)$ 有特殊的特徵，就是它只在一個由 $t=0$ 到 $t=T$ 的很短的時間區間有作用，並且在這時間區間中，它開始由零增加到一個正的極大值，以後就減小到零(圖25)。

方程(86)的一般積分有下面的形狀 [32]

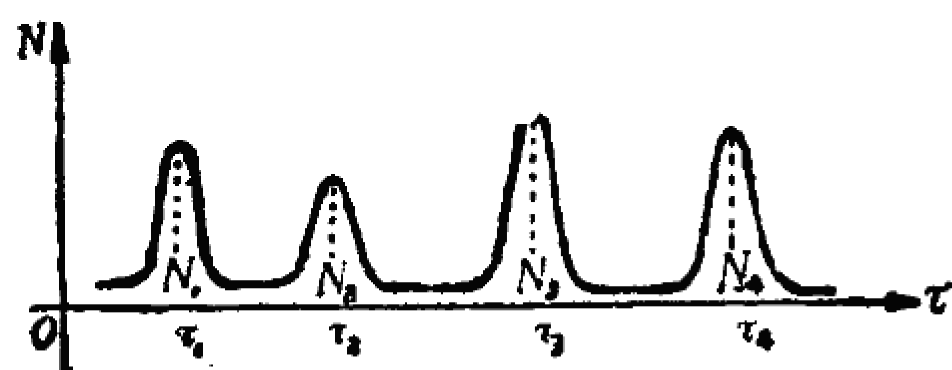


圖 24.

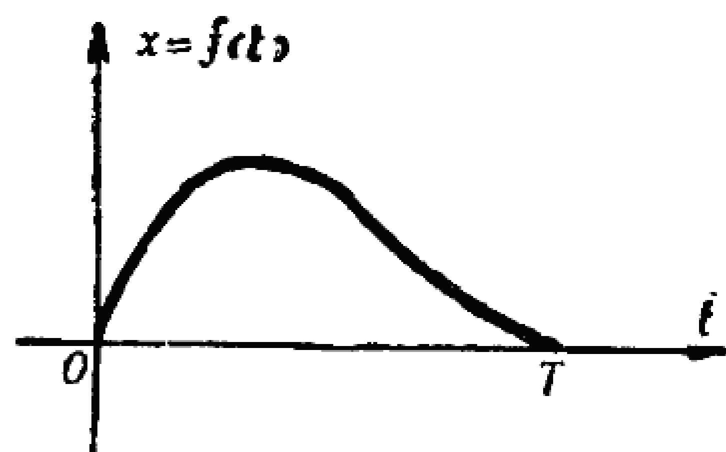


圖 25.

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du.$$

設當 $t=0$ 時體系在平衡位置而無初速:

(87) $$x\Big|_{t=0}=x'\Big|_{t=0}=0.$$

我們知道,這個初始條件對應於特殊解

$$x=\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du,$$

現在我們來研究這個解。

當 $t>T$ 時,所有的積分化為沿區間$(0, T)$的積分,因為由條件

$$當\ u>T\ 時,\ f(u)=0.$$

於是推知

$$當\ t>T\ 時, x=\frac{1}{k}\int_0^T f(u)\sin k(t-u)\,du$$

或

$$x=\frac{1}{k}\sin kt\int_0^T f(u)\cos ku\,du-\frac{1}{k}\cos kt\int_0^T f(u)\sin ku\,du.$$

注意,在區間$(0, T)$上,由條件,函數 $f(u)$ 是正的,所以對於所寫的積分可以應用中值定理 [I, 95]

$$\int_0^T f(u)\cos ku\,du=\cos k\theta_1 T\int_0^T f(u)\,du$$

$$(0<\theta_1\ 與\ \theta_2<1).$$

$$\int_0^T f(u)\sin ku\, du=\sin k\theta_2\, T\int_0^T f(u)\, du.$$

我們假定外力 T 的作用期間與自有振動的週期 $\tau=\frac{2\pi}{k}$ 比較起來是很小的。

那時乘積 $kT=2\pi\frac{T}{\tau}$ 是很小的量，若我們用一來替代 $\cos k\theta_1 T$，用零來替代 $\sin k\theta_2 T$，則得到：

$$x=\frac{1}{k}\, I\sin kt, \tag{88}$$

其中

$$I=\int_0^T f(t)\, dt$$

是外力的衝量。

不難驗證，方程

$$x''+k^2x=0$$

具有初始條件

$$x\Big|_{t=0}=0;\quad x'\Big|_{t=0}=I,$$

的解〔32〕與公式（88）一致，就是說，若外力的作用期間與自有振動的週期比較起來是很小的，則由於這個力的作用，體系的振動就好像由平衡位置開始的具有初速度 I 的自有振動。

35. 靜態作用的外力　現在我們給力 $f(t)$ 以另外的假定，就是——力作用的全部區間 $(0, T)$ 可以分為兩個區間 $(0, T_1)$ 與 (T_1, T)，在第一個區間上力增加，在第二個上減小，此外並假定自有振動的週期 $\tau=\frac{2\pi}{k}$ 與力增加（與減小）的期間比較起來是很小的。

回到方程（86）的具有初始條件（87）的解。應用分部積分法則並注意 $f(0)=0$，就得到：

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{k^2}f(u)\cos k(t-u)\Big|_{u=0}^{u=t}-\frac{1}{k^2}\int_0^t f'(u)\cos k(t-u)\, du \\ &=\frac{1}{k^2}f(t)-\frac{1}{k^2}\int_0^t f'(u)\cos k(t-u)\, du. \end{aligned} \tag{89}$$

第一項 $\frac{1}{k^2}f(t)$ 叫做由力 $f(t)$ 所產生的靜差度。若由方程（86）中去掉 x'' 的一項，也

就是忽略作用力的動力特徵,我們就得到這個表達式。

第二項給出矯正量,它應當加在靜態作用上,以得到力的實際動力作用。這個第二項可以寫成下面的形狀:

$$-\frac{1}{k^2}\int_0^t f'(u)\cos k(t-u)\,du$$

(90)

$$=-\frac{1}{k^2}\cos kt\int_0^t f'(u)\cos ku\,du-\frac{1}{k^2}\sin kt\int_0^t f'(u)\sin ku\,du.$$

考慮力的增加區間,就是 $t<T_1$ 的情形。於是一級微商 $f'(t)$ 在區間 $(0, T_1)$ 上是正的。對於這個微商,爲討論起來簡單起見,我們假定在這區間上它是下降的,就是說,力的增加隨時間愈來愈慢。現在來證明,在所作的假定下,等式(90)右邊的兩個積分的絕對值是很小的。我們只考慮含有 $\sin ku$ 的一個積分。可以用類似的方法考慮第二個積分。

分整個積分區間 $(0, t)$ 爲部分區間,每一部分之長等於自有振動的半週期 $\frac{\tau}{2}=\frac{\pi}{k}$,設 t 含有的整個半週期的數目是 m, 於是

$$m\frac{\tau}{2}\leqslant t<(m+1)\frac{\tau}{2}.$$

這時使得:

$$\int_0^t f'(u)\sin ku\,du=\int_0^{\frac{\tau}{2}} f'(u)\sin ku\,du+\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} f'(u)\sin ku\,du, +\cdots+$$

$$+\int_{(m-1)\frac{\tau}{2}}^{m\frac{\tau}{2}} f'(u)\sin ku\,du+\int_{m\tau}^{t} f(u)\sin ku\,du,$$

一般說來,最後的區間 $\left(m\frac{\tau}{2}, t\right)$ 小於 $\frac{\tau}{2}$。

在每一個由整個積分區間分開的區間中,$\sin ku$ 不變號,所以可以應用中值定理 [I, 95], 並注意 $k\tau=2\pi$, 可以寫成

$$\int_{s\frac{\tau}{2}}^{(s+1)\frac{\tau}{2}} f'(u)\sin ku\,du=f'(u_s)\int_{s\frac{\tau}{2}}^{(s+1)\frac{\tau}{2}}\sin ku\,du=-\frac{1}{k}f'(u_s)\left[\cos ku\right]_{u=s\frac{\tau}{2}}^{u=(s+1)\frac{\tau}{2}}$$

$$=-\frac{1}{k}f(u_s)\,[\cos\,(s+1)\,\pi-\cos\,s\pi]=(-1)^s\frac{2}{k}f'(u_s)=(-1)^s\frac{\tau}{\pi}f'(u_s),$$

其中

$$s\frac{\tau}{2}<u_s<(s+1)\frac{\tau}{2},\quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ m-1).$$

同樣，對於最後的區間得到：

$$\int_{m\frac{\tau}{2}}^{t} f'(u)\,\sin\,ku\,du=(-1)^m\frac{\tau}{\pi}\,\theta\,f'(u_m),\text{其中 } 0<\theta\leqslant 1 \text{ 而且 } m\frac{\tau}{2}<u_m<t.$$

於是我們有：

$$\int_0^t f'(u)\,\sin\,ku\,du=\frac{\tau}{\pi}[f'(u_0)-f'(u_1)+f'(u_2)-\cdots+$$
$$+(-1)^{m-1}f'(u_{m-1})+(-1)^m\,\theta\,f'(u_m)]$$

根據對於 $f'(t)$ 所作的假定，括號中交錯和的各項的絕對值由第一項起往後漸減，所以整個和有(+)號，而小於第一項 [I, 123]：

$$0<\int_0^t f'(u)\sin\,ku\,du<\frac{1}{\pi}\tau\,f'(u_1).$$

當 τ 很小時，乘積 $\tau f'(u_1)$ 近似等於函數 $f(u)$ 在區間 $(u_1,\ u_1+\tau)$ 上的改變量 [I, 50]，就是說，乘積 $\tau f'(u)$ 近似等於在一個時間區間中力的改變，而這個時間區間等於自有振動的週期。

若這個時間區間與力增加的整個區間比較起來是如此的小，以至於所述的力的改變可以算作無關緊要，則積分

$$\int_0^t f'(u)\,\sin\,ku\,du \text{ 與 } \int_0^t f'(u)\,\cos\,ku\,du$$

的絕對值就很小，於是根據(90)，等式(89)右邊的第二項與第一項比較起來是很小的量。對於力減小的區間的考慮與以上所講的沒有什麼不同。所以，**若自有振動的週期與力的作用期間比較起來是很小的，則由這個力所產生的差度可以確定作靜差度。**

由以上的討論推出，τ 與 T 比較起來很小時，應當可以忽略在時間區間 τ 中力的改變。

若在力增加的區間上，微商 $f'(t)$ 不是總下降的，而有一個極大值，這種情形在實用中時常遇到；在這情形，以上所作的討論的主要線索仍然有效。所不同的只是當估計交錯的和時

我們要分它爲兩部，這個和中有一個絕對值最大的中間項，它對應於 $f(t)$ 的極大值出現的那個部分區間。

確定外力所產生的靜差度的可能性，對於記錄這個外力的儀器是很重要的。作爲特例我們講一下蒸汽機的指示器。它附在一個帶有活塞的汽筒上。這個活塞受到蒸汽的壓力於是壓縮彈簧。

設 s 是活塞的面積，$f_1(t)$——蒸汽壓力的大小，k_1^2——彈簧的彈性係數，m—— 活塞的質量，x——它的位移。活塞運動的方程就是

$$mx''=-k_1^2\,x+s\,f_1(t),\ 或\ x''+k^2x=f(t)$$

其中

$$k^2=\frac{k_1^2}{m}\ 而 f(t)=\frac{sf_1(t)}{m}.$$

x 的大小由公式(89)來確定。這公式右邊第二項表示儀器的誤差。爲要使它很小，需要使得活塞在彈簧上的自有振動的週期與作用力的期間比較起來是很小的。這時指示器的記錄與 $f(t)$ 的圖形，就與外力的圖形十分逼近(差一個常數因子)。若壓力增加的很快，則在與自有振動的週期相等的時間區間中，壓力改變的相當大，於是指示器的記錄與壓力的圖形差的也相當多。[1]

36. 細的彈性支樞受縱向力壓縮的持久性(尤拉問題) 設有一條細而直的彈性支樞 AB，當在它的兩端受有沿直線 AB 把它壓縮的兩個力 P 的作用時，它的兩端可能沿直線 AB 移動(圖26)，則在一定大小的力的作用下，可以使得這支樞的軸彎曲，這種彎曲就恰好是使它毀壞的原因。求能夠產生這樣的彎曲的力的問題（所謂支樞的"縱彎曲"問題)是尤拉首先提出並解決的。

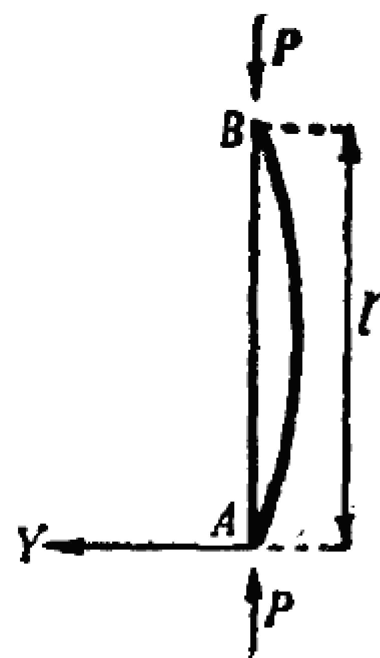


圖 26.

設 l 是支樞 AB 的長度；E 是作成這支樞的物質的彈性係數；I 是它的橫斷面的轉動慣量，我們算作沿整個支樞它是常量[16]。

由支樞的端點 A 沿它的軸向端點 B 引 OX 軸，再過點 A 垂直於 OX 軸作出 OY 軸。設用 y 記支樞的彈性曲線的縱坐標。在這情形下，彈性曲線的微分方程是[2]：

[1] 關於這個問題更仔細的敘述可以參看 А.Н. Крылов 院士的論文 "Некоторые замечания о крешерах и индикаторах", Известия Академии Наук, 1909.

[2] 對於支樞的任何斷面，力P中之一的彎曲矩顯然等於 $(-Py)$。

(91)
$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$$

或者,讓 $q^2=\frac{P}{EI}$:

(92)
$$\frac{d^2y}{dx^2}+q^2y=0.$$

這方程的一般積分是:

(93)
$$y=C_1\cos qx+C_2\sin qx.$$

由於端點 A 與 B 應當在 OX 軸上,所以有下列的條件:

(94)
$$y\Big|_{x=0}=y\Big|_{x=l}=0.$$

注意,這樣的條件不同於初始條件。在初始條件中給出當 x 取某一確定值時函數 y 及其微商 y' 的值。在條件(94)中只給出函數 y 的值,不過給的是當自變量取兩個值時的,也就是在區間 $(0, l)$ 的兩個邊界上的。所以這兩個條件叫做**邊值條件**。

在一般積分(93)中代入以 $x=0$ 與 $x=l$:

(95)　$0=C_1$; $0=C_1\cos ql+C_2\sin ql$ 或 $C_1=0$; $C_2\sin ql=0$.

這兩個方程顯然有解 $C_1=C_2=0$, 根據(93)這給出 $y=0$, 就是支樞成直線形式。爲要使得軸實際上彎曲,必須使得 $C_2\neq0$, 不過那就需要使得 $\sin ql=0$。爲此,q 應當取下列中一個值

(96)
$$q=\frac{\pi s}{l}. \qquad (s=0,1,2,\cdots).$$

第一個解 $s=0$ 使得 q 及 y 都是零,於是仍然給出直的彈性曲線。當 $s=1$ 時,得到 q 不等於零的最小值:

$$q_1=\frac{\pi}{l}.$$

把這個值代入到等式 $q^2=\frac{P}{EI}$ 中,我們就得到能使支樞彎曲的最小的力的大小:

(97)
$$P_1=EI\,q_1^2=\frac{\pi^2EI}{l^2},$$

或者把這個力叫做臨界力(尤拉公式)。

當 $P=P_1$ 時,支樞彎曲所沿的曲線方程是:

$$y=C_2\ \sin\frac{\pi}{l}x,$$

就是這曲線表示成正弦曲線的一拱(圖26)。在這情形下,平衡狀態不是穩定的,而可能有相當大的形變。

設在公式(96)中 $s=2$, 求得:

$$q_2=\frac{2\pi}{l}.$$

對於這種情形,支樞的軸的彎曲方程是

$$y=C_2\ \sin\frac{2\pi}{l}x,$$

於是彎曲曲線由兩拱組成。

爲要產生這樣的形變,力 P_2 應有的大小是

$$P_2=EI\ q_2^2=\frac{4\pi^2EI}{l^2},$$

就是說,它是上一種情形的四倍。

讓 s 依序取整數值,就得到支樞的軸可能有的彎曲的平衡形式。它們由對應數目的正弦曲線的拱組成,而且爲要產生如此的彎曲的力與拱的數目的平方成正比。

只是需要提出,微分方程(91)是當把彎曲軸的曲率取作等於二級微商時的近似式,所以它只對應於支樞的軸具有很小的形變的現象。當力 P 使得支樞的彎曲相當大時,由這個方程的一般積分(93)所引出的關於彎曲的特徵的結論就不正確了,並且可能得出顯著的錯誤結果。

由於利用各種長度與各種粗細的支樞的多次試驗發現,當力 P 逐步增加時,支樞起先保持直線形式,當力 P 達到逼近於由公式(97)所確定的力 P_1 的某一個大小時,支樞的軸呈現出顯著的彎曲,以後當 P 增加時,它非常快的增大着。

還要注意邊值條件(94)的作用。當有初始條件時,線性方程的解是唯一確定的。當有邊值條件時,我們看到,情形就不同了。在方程(92)中係數 q 存在有這樣的例外的值(96),使得對於邊值條件(94),除去顯然的解 $y=0$ 外,這方程還有其他的解,這些解,除去常數因子外,是確定的。在下面所講的例中[37],有完全類似的情況。

37. 旋轉軸　當細而長的軸很快的旋轉時，由實驗說明，有下述的現象發生：當角速度 ω 增加而達到這樣的一個值 $\omega=\omega_1$ 時，這時這個軸不再保持直線形式而開始搖盪；此後 ω 再增加時，這搖盪先行停止，以後當 $\omega=\omega_2$ 時又行搖盪，如此繼續下去。我們現在講這種現象的解釋並且計算臨界速度：ω_1，ω_2，…

一般說來，旋轉軸的平衡形式是直線，但是在上述臨界速度時，除直線的平衡形式外，軸可以有動態平衡的彎曲形式，這時任何的偶然原因可以引起軸的彎曲，這就是搖盪之所以發生。

設軸在兩端 $x=0$, $x=l$ 嵌住，像以前一樣，用 y 記弛垂度的大小。旋轉時，在彎曲軸的每個單元 dx 上，作用有離心力 $\frac{p}{g}\omega^2 y dx$，其中 p 是單位長的軸的重量，g 是重力加速度。把這個力算作連續分佈的負載，根據方程(25)與(32)[16]，就得到：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{p\omega^2}{g}y,$$

或者，讓

$$q=\sqrt[4]{\frac{p\omega^2}{gEI}}, \tag{98}$$

就有：

$$y^{\mathrm{IV}}-q^4y=0. \tag{99}$$

對應的特徵方程 $r^4-q^4=0$ 有根：$\pm q$；$\pm qi$，而方程(99)的一般積分就是：

$$y=C_1e^{qx}+C_2e^{-qx}+C_3\cos qx+C_4\sin qx.$$

在嵌住的兩端，弛垂度與彎曲矩應當等於零，就是說，應當有下列四個邊值條件：

$$y\Big|_{x=0}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=y\Big|_{x=l}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=l}=0,$$

不難看到，它們給出下面的方程組：

$$\begin{gathered}C_1+C_2+C_3=0;\quad C_1+C_2-C_3=0;\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}+C_3\cos ql+C_4\sin ql=0;\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}-C_3\cos ql-C_4\sin ql=0.\end{gathered} \tag{100}$$

這方程組的解

$$C_1=C_2=C_3=C_4=0 \tag{101}$$

顯然對應於恒等式 $y=0$，就是軸平衡的直線形式。現在我們來確定 q 的那些值，對於它們

方程組(100)有不同於(101)的解。

由前兩個方程給出:

$$C_1=-C_2;\ C_3=0.$$

代入到後兩個方程中,就得到:

$$C_1=C_2=C_3=0;\ C_4\sin ql=0.$$

既然 $C_4\neq 0$, 則應當是 $\sin ql=0$, 於是給出 q 的值:

$$q=\frac{s\pi}{l} \qquad (s=1,2,\cdots). \tag{102}$$

利用公式(98),就得到關於臨界速度的表達式:

$$\omega_s=\frac{s^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{p}} \qquad (s=1,2,3,\cdots).$$

38. **記號方法** 現在我們來討論一個新的方法,用以求常係數線性方程或常係數線性方程組的積分。適當的推廣這個方法,也可以應用於比較複雜的問題。這個方法的要點在於把對自變量 t 求微商的運算記號記作因子 D,寫在需要求微商的函數的左邊,於是若 x 是 t 的某一個函數,則

$$Dx=\frac{dx}{dt},$$

一般說來,對於任何的正整數 s

$$D^sx=\frac{d^sx}{dt^s}. \tag{103}$$

若 a 是常數,則顯然

$$D^s(ax)=aD^sx, \tag{104}$$

就是說,記號因子與任何一個常數因子,可以交換。若 $F(D)$ 是 D 的具有常係數的多項式:

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n,$$

則運算 $F(D)x$ 確定作:

$$F(D)x=a_0D^nx+a_1D^{n-1}x+\dots+a_{n-1}Dx+a_nx=$$
$$=a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx.$$

若 $\varphi_1(D)$ 與 $\varphi_2(D)$ 是兩個多項式，$\varphi(D)$ 是它們的乘積，則注意公式(104)以及顯然的等式 $D^{n_1}(D^{n_2}x)=D^{n_1+n_2}x$，就有：

$$\varphi_1(D)[\varphi_2(D)x]=\varphi(D)x,$$

並且因子 $\varphi_1(D)$ 與 $\varphi_2(D)$ 可以交換。

同樣，顯然有

$$[\varphi_1(D)+\varphi_2(D)]x=\varphi_1(D)x+\varphi_2(D)x,$$

這個結果不依賴於 $\varphi_1(D)$ 於 $\varphi_2(D)$ 這兩項的前後次序。

如此，加、減、乘法的普通法則可以推廣到我們所講的記號多項式。

根據 (104)，常數因子可以提到記號多項式之前，就是說，與公式(104)併立，我們有

$$F(D)\ ax=a\ F(D)x,$$

不過對於依賴於 t 的因子自然不能這樣作。現在我們證明下面的公式：

$$F(D)\ (e^{mt}\ x)=e^{mt}\ F(D+m)x, \tag{105}$$

其中 m 是個常數。**這公式說明，e^{mt} 形狀的因子可以提到記號多項式之前，提出來之後字母 D 要用和 (D+m) 來替代。**

表達式 $F(D)(e^{mt}\ x)$ 由 $a_{n-s}\ D^s(e^{mt}x)$ 形狀的項組成，於是只須證明對於每一個這樣的項公式(105)成立，就是說，只須證明公式

$$D^s(e^{mt}\ x)=e^{mt}(D+m)^sx. \tag{106}$$

應用求乘積的微商的萊伯尼茲法則，可以寫成[I, 53]：

$$D^s(e^{mt}x)=\frac{d^s(e^{mt}x)}{dt^s}=(e^{mt})^{(s)}x+C_s^1(e^{mt})^{(s-1)}x'+C_s^2(e^{mt})^{(s-2)}x''+$$
$$+\cdots+C_s^k(e^{mt})^{(s-k)}x^{(k)}+\cdots+e^{mt}x^{(s)},$$

其中上角括號中的附標指明對 t 的幾級微商的級數，C_s^k 是由 s 個元素中取 k 個的組合數。注意，$(e^{mt})^{(p)}=m^p e^{mt}$ 而且 $x^{(p)}=D^p x$, 把 e^{mt} 提到括號之前，可以寫成：

$$D^s(e^{mt}x)=e^{mt}(m^s x+C_s^1 m^{s-1}Dx+C_s^2 m^{s-2}D^2x+\dots+ \\ +C_s^k m^{s-k}D^k x+\dots+D^s x)=e^{mt}(m^s+C_s^1 m^{s-1}D+C_s^2 m^{s-2}D^2+ \\ +\dots+C_s^k m^{s-k}D^k+\dots+D^s)x.$$

它的右邊與公式（106）的右邊相同，於是證明了這個公式以及公式（105）。

現在我們確定 D 的負冪，作為求微商的逆運算，就是說，$D^{-s}f(t)$ 確定作方程

(107) $$D^s x=f(t)$$

的解，並且為了使得所給的記號 $D^{-s}f(t)$ 有確定的意義，限制取方程(107)的滿足零初始條件

(108) $$x|_{t=t_0}=x'|_{t=t_0}=\dots=x^{(s-1)}|_{t=t_0}=0$$

的解。換句話說，就是算作［15］

(109) $$D^{-s}f(t)=\frac{1}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}f(u)\,du.$$

這時，方程(107)的一般解是［15］：

(110) $$x=D^{-s}f(t)+P_{s-1}(t)=\frac{1}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}f(u)\,du+P_{s-1}(t),$$

其中 $P_{s-1}(t)$ 是 t 的 $(s-1)$ 次多項式，它具有任意的係數。

較普遍的運算 $(D-\alpha)^{-s}f(t)$ 確定作方程

(111) $$(D-\alpha)^s x=f(t)$$

的滿足條件(108)的解。為要求這個解，引用新的未知函數 z 以替代 x，讓

(112) $$x=e^{\alpha t}z.$$

代入到方程(111)中並利用公式(105)所表達的法則，就得到關於 z 的方程

(113) $$e^{\alpha t}(D+\alpha-\alpha)^s z=f(t)\qquad D^s z=e^{-\alpha t}f(t).$$

這個方程的滿足條件

(114) $$z|_{t=t_0}=z'|_{t=t_0}=\dots=z^{(s-1)}|_{t=t_0}=0,$$

的解，可以由公式(109)確定，只要在其中用 $e^{-\alpha t}f(t)$ 來替代 $f(t)$：

$$z=\frac{1}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}e^{-\alpha u}f(u)\,du.$$

不過由公式

$$D^j x=D^j e^{\alpha t}z=e^{\alpha t}(D+\alpha)^j z\qquad (j=0,1,2,\cdots,s-1)$$

推出，若 z 滿足條件(114)，則由公式(112)確定出的 x 滿足條件(108)。把求出的 z 的表達式代入到公式(112)中，就得到方程(111)的未知解：

(115) $$(D-\alpha)^{-s}f(t)=\frac{e^{\alpha t}}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}e^{-\alpha u}f(u)\,du.$$

把方程(113)的一般解乘以 $e^{\alpha t}$，就得到方程(111)的一般解，就是說，這個一般解是

$$x=(D-\alpha)^{-s}f(t)+e^{\alpha t}P_{s-1}(t)$$

(116) $$=\frac{e^{\alpha t}}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}e^{-\alpha u}f(u)\,du+e^{\alpha t}P_{s-1}(t),$$

其中 $P_{s-1}(t)$ 是 t 的$(s-1)$次多項式，它具有任意的係數。

特別是，$f(t)=0$ 時，得到方程

(117) $$(D-\alpha)^s x=0$$

的一般解具有下面的形狀:

$$x=e^{at}P_{s-1}(t). \tag{118}$$

39. **常係數高級齊次線性方程**　常係數 n 級齊次線性方程具有下面的形狀:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0. \tag{119}$$

用記號因子 D 來記對 t 求微商的運算,並引用多項式

$$\varphi(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n,$$

可以把這方程寫成下面的形狀:

$$\varphi(D)x=0. \tag{120}$$

作出對應於方程(119)的特徵方程:

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0, \tag{121}$$

並設這個方程有 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 重根 $r_1, r_2, \cdots, r_m$:

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n. \tag{122}$$

把多項式 $\varphi(D)$ 分解因子,方程(120)就可以寫成下面的形狀:

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\cdots(D-r_m)^{k_m}x=0. \tag{123}$$

依照公式 (118) [38], 方程

$$(D-r_m)^{k_m}x=0 \tag{124}$$

具有一般解

$$x=e^{r_mt}P_{k_m-1}(t), \tag{125}$$

其中 $P_{k_m-1}(t)$ 是具有任意係數的 (k_m-1) 次多項式。

顯然,公式(125)給出方程(123)的解。實際上,把表達式 (125) 代入到這方程中,經過運算 $(D-r_m)^{k_m}$ 的結果得到零,而運算

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\cdots(D-r_{m-1})^{k_{m-1}}$$

作用在零上顯然也給出零。交換因子的位置,可能使得靠着 x 的不是因子$(D-r_m)^{k_m}$,而是任何的另一個因子 $(D-r_s)^{k_s}$。如此我們可以肯

定存在有一串特殊解：

$$x_s=e^{r_s t}P_{k_s-1}(t) \qquad (s=1,2,\cdots,m), \tag{126}$$

其中 $P_{k_s-1}(t)$是具有任意係數的 (k_s-1) 次多項式。

在公式(126)中給 s 以由 1 到 m 的所有的值，再把如此得到的解相加，就有方程(123)的解[26]：

$$x=e^{r_1 t}P_{k_1-1}(t)+e^{r_2 t}P_{k_2-1}(t)+\cdots+e^{r_m t}P_{k_m-1}(t). \tag{127}$$

任何一個具有任意係數的(k_s-1) 次多項式 $P_{k_s-1}(t)$ 總共含有 k_s 個任意常數，於是根據關係式(122)推知，解(127)總共含有 n 個任意常數。由這個情況可以想到，公式(127)給出方程(119)的一般解，就是說，這個方程的任何解包含在公式(127)中。

當 $m=1$ 時，這是以前在[38]中我們證明過的公式(118)，如此只剩下要證明，若我們的肯定對於 $(m-1)$ 個 $(D-r_s)^{k_s}$ 形狀的因子的情形是正確的，則對於 m 個因子的情形也是正確的。我們來證明這一點。方程(123)可以寫成下面的形狀：

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\ldots(D-r_{m-1})^{k_{m-1}}y=0,$$

其中

$$y=(D-r_m)^{k_m}x.$$

我們算作上述的肯定對於 $(m-1)$ 個因子的情形是正確的，所以對於 y 有一般解：

$$y=(D-r_m)^{k_m}x=e^{r_1 t}Q_{k_1-1}(t)+e^{r_2 t}Q_{k_2-1}(t)+\cdots+ \\ +e^{r_{m-1} t}Q_{k_{m-1}-1}(t),$$

其中 $Q_{k_s-1}(t)$ 是任意的 (k_s-1) 次多項式。讓

$$x=e^{r_m t}z, \tag{128}$$

提出 $e^{r_m t}$ 到記號多項式之前，並把等式兩邊用 $e^{r_m t}$ 除，就得到.

$$D^{k_m}z = e^{(r_1 - r_m)t}Q_{k_1-1}(t) + e^{(r_2 - r_m)t}Q_{k_2-1}(t) + \dots + \\ + e^{(r_{m-1} - r_m)t}Q_{k_{m-1}-1}(t).$$

只由右邊對 t 求積分 k_m 次，再補充以 (k_m-1) 次多項式 [15]，就得到關於 z 的一般表達式。不過，我們知道 [I, 201]，指數函數 e^{at} 與 t 的 k 次多項式之乘積的積分仍然是這形狀，就是說，z 應當有下面的形狀：

$$z = e^{(r_1 - r_m)t}P_{k_1-1}(t) + e^{(r_2 - r_m)t}P_{k_2-1}(t) + \dots + \\ + e^{(r_{m-1} - r_m)t}P_{k_{m-1}-1}(t) + P_{k_m-1}(t).$$

根據(128)得到，x 應當一定具有公式(127)所給的形狀，於是證完。

特別是，若特徵方程的所有的根都是單根，則所有的多項式 $P_{k_s-1}(t)$ 都是零次的 $(k_s=1)$，就是說，是簡單的任意常數 C_s，於是方程的一般解就有下面的形狀：

$$x = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \dots + C_ne^{r_nt}.$$

我們算作方程(121)的係數都是實數，不過它的根中可能有複根。在解(27)中對應於它們的項不難化為實的形狀，只要把指數函數變換為三角函數。設方程(121)有一對 k 重共軛虛根 $(\gamma+\delta i)$。它們對應於下面形狀的解：

$$e^{(\gamma+\delta i)t}S_{k-1}(t) + e^{(\gamma-\delta i)t}T_{k-1}(t) = e^{\gamma t}[e^{\delta t i}S_{k-1}(t) + e^{-\delta t i}T_{k-1}(t)],$$

其中 $S_{k-1}(t)$ 與 $T_{k-1}(t)$ 是具有任意係數的 $(k-1)$ 次多項式。代入以

$$e^{\delta t i} = \cos\delta t + i\sin\delta t;\ e^{-\delta t i} = \cos\delta t - i\sin\delta t,$$

就得到下面形狀的解

$$e^{\gamma t}[U_{k-1}(t)\cos\delta t + V_{k-1}(t)\sin\delta t],$$

其中 $U_{k-1}(t)$ 與 $V_{k-1}(t)$ 是具有任意係數的 $(k-1)$ 次多項式，與 $S_{k-1}(t)$ 與 $T_{k-1}(t)$ 有下面的關係：

$$U_{k-1}(t)=S_{k-1}(t)-T_{k-1}(t)；\ V_{k-1}(t)=i[S_{k-1}(t)-T_{k-1}(t)].$$

由以上所述推出下面的法則[27]：**爲要求出方程(119)的積分，需要作出對應的特徵方程(121)並求出它的根。任何一個 k' 重實根 $r=r'$ 對應一個下面形狀的解：**

$$e^{r't}P_{k'-1}(t),$$

其中 $P_{k'-1}(t)$ 是具有任意係數的 $(k'-1)$ 次多項式；任何一對 k 重共軛虛根 $r=\gamma\pm\delta i$ 對應於下面形狀的解

$$e^{\gamma t}[U_{k-1}(t)\cos\delta t+V_{k-1}(t)\sin\delta t],$$

其中 $U_{k-1}(t)$ 與 $V_{k-1}(t)$ 是具有任意係數的 $(k-1)$ 次多項式。如此得到的所有的解相加，就是方程 (119) 的解。在單根的情形，所說的多項式是任意常數。

40. **常係數非齊次線性方程**　非齊次線性方程具有下面的形狀

$$\varphi(D)x=f(t), \tag{129}$$

其中 $f(t)$ 是給定的函數。我們已經能够作出對應的齊次方程的一般積分，於是只剩下要求方程(129)的一個特殊解，爲要得到方程(129)的一般積分，只要把這個特殊解加到所說的齊次方程的一般積分上就成了[25]。可以利用記號方法來求所說的特殊解。把有理分式 $\frac{1}{\varphi(D)}$ 分解爲部分分式 [I, 196]：

$$\frac{1}{\varphi(D)}=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}.$$

由公式

$$\xi(t)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t), \tag{130}$$

確定一個函數 $\xi(t)$，它有完全確定的意義，因爲，依照 [38] 中公式

(115),右邊每一項有確定的意義:

$$(131)\qquad \frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t)=A_s^{(q)}\frac{e^{r_s t}}{(q-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{q-1}e^{-r_s u}f(u)\,du.$$

不難看出,公式(130)給出方程(129)的一個解。實際上,

$$\varphi(D)\xi(t)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\varphi(D)\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t).$$

不過,依照記號$(D-r_s)^{-q}$的定義,若在(131)的右邊施以運算$(D-r_s)^q$,則得到 $A_s^{(q)}f(t)$。多項式 $\varphi(D)$可以被 $(D-r_s)^q$ 除盡,就是說 $\varphi(D)=\varphi_{sq}(D)(D-r_s)^q$,, 其中 $\varphi_{sq}(D)$ 是個多項式,於是推知,上面的公式可以寫成:

$$\varphi(D)\xi(t)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}A_s^{(q)}\varphi_{sq}(D)f(t).$$

由 $\frac{1}{\varphi(D)}$ 的分解式直接推出

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}A_s^{(q)}\varphi_{sq}(D)=1,\ \text{於是推知},\ \varphi(D)\xi(t)=f(t),$$

就是說,實際上公式(130)給出方程(129)的一個解。如此我們看到,對於任何的給定的函數$f(t)$,方程(129)的求法化爲分解有理分式爲部分分式而後求積分。

在某些特殊情形下,求方程(129)的特殊解比較簡單不必用一般公式 (130),而用我們在[29] 中講過的待定係數法。

注意,利用上述的記號方法,很容易得到[32] 中的公式 (71) 與 (72)。

41. 例　作爲特例,我們考慮方程

(132) $$x^{(IV)}+2x''+x=t\cos t.$$

在這情形下特徵方程是

(133) $$r^4+2r^2+1=0 \text{ 或 } (r^2+1)^2=0,$$

它有一對二重共軛根 $r=\pm i$。對應於方程(132)的齊次方程的一般積分是

(134) $$(C_1t+C_2)\cos t+(C_3t+C_4)\sin t.$$

比較這方程的自由項與[29]中公式(43),我們看出,在這情形下 $k=0$, $l=1$ 而$P(x)=1$, $Q(x)=0$. $k\pm li=\pm i$ 這兩個數與一對二重根相同,所以,依照[29],需要由下面的形狀來求方程(132)的解

(135) $$x=t^2[(at+b)\cos t+(ct+d)\sin t].$$

如果我們把(132)的右邊變換爲指數形狀,計算就簡單些。我們這樣作,再把右邊寫成記號形式,把(132)寫成:

(136) $$(D^2+1)^2x=\frac{t}{2}e^{it}+\frac{t}{2}e^{-it}.$$

我們應當用下面的形狀來求解

(137) $$x=t^2(at+b)e^{it}+t^2(ct+d)e^{-it}.$$

代入這個表達式到方程的左邊

$$(D+i)^2(D-i)^2t^2(at+b)e^{it}+(D+i)^2(D-i)^2t^2(ct+d)e^{-it}=\frac{t}{2}e^{it}+\frac{t}{2}e^{-it}.$$

依照法則(111)把 e^{it} 與 e^{-it} 提到記號多項式之前:

$$e^{it}(D+2i)^2D^2(at^3+bt^2)+e^{-it}(D-2i)^2D^2(ct^3+dt^2)=\frac{t}{2}e^{it}+\frac{t}{2}e^{-it},$$

或者,把 D^2 換爲二級微商:

$$e^{it}(D^2+4iD-4)(6at+2b)+e^{-it}(D^2-4iD-4)(6ct+2d)=\frac{t}{2}e^{it}+\frac{t}{2}e^{-it}.$$

作出求微商的運算:

$$[-24at+(24ai-8b)]e^{it}+[-24ct-(24ci+8d)]e^{-it}=\frac{t}{2}e^{it}+\frac{t}{2}e^{-it}$$

由此,依照待定係數法:

$$-24a=\frac{1}{2};\quad 24ai-8b=0;\quad -24c=\frac{1}{2};\quad 24ci+8d=0,$$

或

$$a=-\frac{1}{48};\quad b=\frac{1}{16}i;\quad c=-\frac{1}{48};\quad d=\frac{1}{16}i.$$

代入到(137)中,得到解:

(138) $$x=-\frac{t^3}{24}\cos t-\frac{t^2}{8}\sin t,$$

於是方程(132)的一般積分就是:

(139) $$x=(C_1t+C_2)\cos t+(C_3 t+C_4)\sin t-\frac{t^3}{24}\cos t-\frac{t^2}{8}\sin t.$$

42. 尤拉方程 這個方程具有下面的形狀

(140) $$t^n x^{(n)}+a_1 t^{n-1} x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1} tx'+a_n x=0,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是常數。若依照公式

(141) $$t=e^\tau$$

引用新的自變量 τ 以替代 t,則可以把這個方程化爲常係數方程。

對 t 求微商的運算我們用記號因子 D 來記,對 τ 求微商用記號因子 δ 來記。顯然有

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=e^\tau\frac{dx}{dt},$$

或者用記號因子寫成

(142) $$Dx=e^{-\tau}\delta x.$$

對左邊施以運算 D, 對右邊施以相當的運算 $e^{-\tau}\delta$,就得到:

$$D^2x=e^{-\tau}\delta(e^{-\tau}\delta)x.$$

依照公式(111)所表達的法則,把因子 $e^{-\tau}$ 提到 δ 之前,就有:

$$D^2x=e^{-2\tau}(\delta-1)\delta x=e^{-2\tau}\delta(\delta-1)x.$$

由這個公式以及公式(142),使我們想到下面這個一般的公式:

(143) $$D^s x=e^{-s\tau}\delta(\delta-1)\cdots(\delta-s+1)x.$$

需要證明,若對於 s 個記號因子這公式是正確的,則對於$(s+1)$因子它也正確。我們先算作公式(143)是正確的,對它的左邊施以運算

D，對右邊施以相當的運算 $e^{-\tau}\delta$，就得到：

$$D^{s+1}x=e^{-\tau}\delta\,[e^{-s\tau}\delta(\delta-1)\ldots(\delta-s+1)\,x],$$

由此，把 $e^{-s\tau}$ 提到 δ 之前：

$$\begin{aligned}D^{s+1}x&=e^{-\tau}e^{-s\tau}(\delta-s)\,\delta(\delta-1)\ldots(\delta-s+1)\,x=\\&=e^{-(s+1)\tau}\delta(\delta-1)\ldots(\delta-s+1)(\delta-s)\,x,\end{aligned}$$

這就證明了，對於任何 s，公式(143)的正確性。

在這公式中用 t 來替換 e^{τ}，可以把它寫成下面的形狀：

(144) $$t^s\,D^s x=\delta(\delta-1)\,\cdots\,(\delta-s+1)x$$

如此，經過變換(141)的結果，方程(140)左邊的任何一項 $a_{n-s}t^s x^{(s)}$ 換成下面形狀的項

$$a_{n-s}\,\delta(\delta-1)\,\cdots\,(\delta-s+1)x,$$

它們不含有自變量 τ，於是我們得到常係數線性方程：

(145) $$[\delta(\delta-1)\cdots(\delta-n+1)+a_1\,\delta(\delta-1)\cdots(\delta-n+2)+\cdots+a_{n-1}\,\delta+a_n]x=0.$$

對應於它的特徵方程是：

(146) $$r(r-1)\cdots(r-n+1)+a_1\,r(r-1)\cdots(r-n+2)+\cdots+a_{n-1}\,r+a_n=0,$$

於是方程(145)的一般解是：

$$x=e^{r_1\tau}P_{k_1-1}(\tau)+e^{r_2\tau}P_{k_2-1}(\tau)+\cdots+e^{r_m\tau}P_{k_m-1}(\tau),$$

其中 r_s 是方程(146)的根，k_s 是這些根的重數，$P_{k_s-1}(\tau)$ 是具有任意係數的 (k_s-1) 次多項式。

利用關係式(141)還原到起初的變量，就得到方程(140)的解：

(147) $$x=t^{r_1}\,P_{k_1-1}(\lg t)+t^{r_2}\,P_{k_2-1}(\lg t)+\cdots+t^{r_m}\,P_{k_m-1}(\lg t).$$

若方程(146)的所有的根都是單根，則方程(140)的解是

(148) $$x=C_1 t^{r_1}+C_2 t^{r_2}+\cdots+C_n t^{r_n}.$$

不難看出，若求方程 (140) 的 $x=t^r$ 這種形狀的解，就得到方程 (146)。

若有下面形狀的非齊次方程

(149) $$t^n x^{(n)}+a_1 t^{n-1} x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1} t x'+a_n x=t^\alpha P(\lg t),$$

其中 $P(\lg t)$ 是 $\lg t$ 的一個 p 次多項式，則利用變換(141)，不難說明，方程(149)的解可以由下面的形狀來求:

(150) $$x=(\lg t)^s t^\alpha Q(\lg t),$$

其中 $Q(\lg t)$ 是 $\lg t$ 的 p 次多項式，s 是方程 (146) 的等於 α 的根的數目。

替代方程(140)，我們可以考慮下面形狀的更普遍的方程:

(151) $$(ct+d)^n x^{(n)}+a_1 (ct+d)^{n-1} x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1} (ct+d)x'+a_n x=0.$$

在這情形下，需要利用下面的變量替換公式以替代公式(141):

$$ct+d=e^\tau,$$

於是替代公式(144)的就是下面的公式

$$(ct+d)^s D^s x=c^s \delta(\delta-1)\cdots(\delta-s+1)x,$$

藉助於這個公式可以把方程(151)化爲常係數方程來解。

43. 常係數線性方程組 在許多情形下，力學體系的位置，不是由一個自變量確定的，而要由幾個自變量 $q_1, q_2, \cdots, q_k$, 來確定，它們叫做坐標參變量。它們的數目 k 給出自由度的數目。例如，當剛體環繞着一個不動的軸轉動時，我們有一個自由度——即剛體繞軸所轉的角度 θ。剛體繞着一個不動的點轉動就有三個自由度，可以取剛體運動學中所知的尤拉角: φ, ψ 與 θ, 作爲坐標參變量。沿平面，或球面，或任何別的曲面的點的運動是具有兩個自由度的運動。在平面的情形，

可以用普通的直角坐標 x 與 y 來作坐標參變量，在球面上用經度 φ 與緯度 ψ。

當力學體系運動時，它的坐標參變量 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是時間 t 的函數，而這些函數由微分方程組與初始條件來確定。特別是在對應於參變量的值

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_k = 0$$

的平衡位置附近，考慮體系的微小振動時，普通在微分方程中只保留關於 q_s 與 $\frac{dq_s}{dt}$ 的一次項，如此就得到常係數線性方程組。一般說來，每一個方程中都含有所有的函數 q_s 以及它們的對 t 的一級與二級微商。

在有兩個自由度的情形下，方程組有下面的形狀：

$$(152)\qquad \begin{cases} a_1q_1'' + b_1q_1' + c_1q_1 + a_2q_2'' + b_2q_2' + c_2q_2 = 0; \\ d_1q_1'' + e_1q_1' + f_1q_1 + d_2q_2'' + e_2q_2' + f_2q_2 = 0, \end{cases}$$

其中 q_1', q_1'', q_2', q_2'' 是 q_1 與 q_2 對 t 的微商。

像以前一樣，用記號因子 D 來記對 t 求微商的運算，方程組(152)可以寫成：

$$(153)\qquad \begin{cases} (a_1D^2 + b_1D + c_1)\,q_1 + (a_2D^2 + b_2D + c_2)q_2 = 0; \\ (d_1D^2 + e_1D + f_1)\,q_1 + (d_2D^2 + e_2D + f_2)\,q_2 = 0. \end{cases}$$

若有外力作用在這系統上，則方程的右邊就不是零，而是 t 的已知函數。

初始條件有下面的形狀：

$$q_1|_{t=0} = q_{1_0};\ \ q_1'|_{t=0} = q_{1_0}';\ \ q_2|_{t=0} = q_{2_0};\ \ q_2'|_{t=0} = q_{2_0}',$$

其中 $q_{1_0}, q_{1_0}', q_{2_0}, q_{2_0}'$ 是給定的數，方程組(153)的一般積分應當含有四個任意常數。

我們現在講，求方程組(153)的積分怎樣可以化爲求具有一個未知

函數的一個四級線性方程的積分[參考 20]。爲此,我們引用 t 的一個輔助函數 V,讓

(154) $$q_1=-(a_2D^2+b_2D+c_2)V;\quad q_2=(a_1D^2+b_1D+c_1)V.$$

把這兩個 q_1 與 q_2 的表達式代入到方程(153)中,我們會看到,對於任意選擇的 V,第一個方程將被滿足,於是只要選擇函數 V,使得它滿足(153)中第二個方程。

表達式(154)代入到這個第二個方程中,就得到一個關於 V 的四級方程:[1]

(155) $$[(a_1D^2+b_1D+c_1)(d_2D^2+e_2D+f_2)-\\ -(a_2D^2+b_2D+c_2)(d_1D^2+e_1D+f_1)]V=0.$$

求出 V,再由(154)簡單的求微商,就得到 q_1 與 q_2。

設特徵方程

(156) $$(a_1r^2+b_1r+c_1)(d_2r^2+e_2r+f_2)-\\ -(a_2r^2+b_2r+c_2)(d_1r^2+e_1r+f_1)=0,$$

的根是 r_1, r_2, r_3, r_4, 於是

(157) $$V=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}+C_3e^{r_3t}+C_4e^{r_4t}.$$

把這個表達式代入到公式(154)中,並注意 $De^{rt}=re^{rt}$, $D^2e^{rt}=r^2e^{rt}$, 就得到 q_1 與 q_2 的一般表達式。它也是四個解的線性結合,其中每一個含有一個任意常數因子。例如,解 $V=C_1e^{r_1t}$ 給出:

(158) $$q_1=-C_1(a_2r_1^2+b_2r_1+c_2)e^{r_1t};\quad q_2=C_1(a_1r_1^2+b_1r_1+c_1)e^{r_1t}.$$

若方程(156)有複根,這在應用中通常會遇到,則方程(155)的解最好寫成三角式,於是一對共軛根 $r=a\pm bi$ 就對應於 V 的解:

$$C_1e^{at}\cos bt \text{ 與 } C_2e^{at}\sin bt.$$

同樣,若方程(156)有二重根 $r_1=r_2$, 則解是:

---

[1] 我們假定 $a_1d_2-a_2d_1\neq0$, 對於所考慮的質系的運動,這個情形總成立。

$$C_1e^{r_1t} \text{ 與 } C_2te^{r_1t}$$

現在我們提出一種情形，就是以上的計算不能給出含有四個任意常數的 q_1 與 q_2 的一般解的情形。設對於某一個根 r_1, 方程(156)是

(159) $$a_1r_1^2+b_1r_1+c_1=a_2r_1^2+b_2r_1+c_2=0.$$

在這情形下，公式(158)給出的 q_1 與 q_2 恆等於零，於是方程組的一般解就不含有任意常數 C_1。我們可以用下述方法，試着補出來這個失去的任意常數，就是在引用輔助函數 V 時，不用方程(154)而用方程

(160) $$q_1=(d_2D^2+e_2D+f_2)V;\ q_2=-(d_1D^2+e_1D+f_1)V.$$

這時，對於任何選擇的V，(153)中第二個方程將被滿足，把表達式(160)代入到(153)的第一個方程中，像以上一樣，仍然得到關於V的方程(155)。這時，替代(158)，特徵方程(156)的根 r_1 給出 q_1 與 q_2 的表達式

$$q_1=C_1(d_2r_1^2+e_2r_1+f_2)e^{r_1t};\ q_2=-C_1(d_1r_1^2+e_1r_1+f_1)e^{r_1t}.$$

若因子$(d_1r_1^2+e_1r_1+f_1)$ 與 $(d_2r_1^2+e_2r_1+f_2)$中有一個不等於零，如此我們就補出對應於方程(156)的根 $r=r_1$ 的一個解。

剩下還要考慮一種情形，就是除關係式(159)外，還有下面的關係式的情形：

(161) $$d_1r_1^2+e_1r_1+f_1=d_2r_1^2+e_2r_1+f_2=0.$$

這時，由上述方法不能補出對應於方程(156)的根 $r=r_1$ 的解。但是由於關係式(159)與(161)被滿足，則方程(156)左邊的每一個二次三項式都有一個根是 $r=r_1$，就是說，都含有因子 $(r-r_1)$。於是推知，當滿足關係式(159)與(161)時，$r=r_1$ 應當是方程(156)的重根。我們只限於考慮 $r=r_1$ 是二重根的情形，講兩個對應於這個二重根的解。這兩個解是：

(162) $$q_1=C_1e^{r_1t};\ q_2=0$$

(163) $$q_1=0;\ q_2=C_2e^{r_1t}.$$

實際上，例如，把表達式(162)代入到方程(153)的左邊時，根據關係式(159)與(161)，就得到恆等式。

所說的兩個解是不同的，因爲在第一個中 q_2 恆等於零，而在第二個中 q_2 不是零。

注意，若在重根 $r_1=r_2$ 不滿足(159)中的一個關係式的情形，則代入到公式(154)中：

$$V=C_1e^{r_1t};\ V=C_2te^{r_1t},$$

我們得到解(158)與一個含有因子 t 的解：

$$q_1=-C_2(a_2r_1^2+b_2r_1+c_2)te^{r_1t}+C_2p_1e^{r_1t};$$
$$q_2=C_2(a_1r_1^2+b_1r_1+c_1)te^{r_1t}+C_2p_2e^{r_1t},$$

其中 p_1 與 p_2 是確定的常數。

像一個方程的情形一樣，非齊次方程組

(164) $$\begin{cases}(a_1D^2+b_1D+c_1)q_1+(a_2D^2+b_2D+c_2)q_2=f_1(t);\\(d_1D^2+e_1D+f_1)q_1+(d_2D^2+e_2D+f_2)q_2=f_2(t),\end{cases}$$

的一般積分是對應的齊次方程組(153)的一般積分與這非齊次方程組的任何一個特殊解之和。若自由項 $f_1(t)$ 與 $f_2(t)$ 有下面的形狀

$$A_0e^{\alpha t}\cos\ \beta t+B_0e^{\alpha t}\sin\ \beta t=De^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi),$$

則只要 $(\alpha\pm\beta i)$ 不是方程(156)的根，就可以由下面的形狀來求特殊解：

$$q_1=A_1e^{\alpha t}\cos\ \beta t+B_1e^{\alpha t}\sin\ \beta t;$$

$$q_2=A_2e^{\alpha t}\cos\ \beta t+B_2e^{\alpha t}\sin\ \beta t.$$

把這個表達式代入到方程(164)的左邊，再讓兩邊的 $e^{\alpha t}\cos\beta t$ 與 $e^{\alpha t}\sin\ \beta t$ 的係數相等，就得到確定 $A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2$ 的方程。

像我們對於一個方程所作的一樣[40]，對於任何的 $f_1(t)$ 與 $f_2(t)$，

可以得到方程組(164)的一個特殊解。由方程組(164)解出 q_1 與 q_2,例如,對於 q_1 得到

$$q_1=\frac{d_2D^2+e_2D+f_2}{\Delta(D)}f_1(t)-\frac{a_2D^2+b_2D+c_2}{\Delta(D)}f_2(t),$$

其中爲簡短起見,用 $\Delta(D)$ 來記方程(155)左邊的記號多項式。分解有理分式並利用[38]中所述的記號因子 $(D-r)^{-k}$ 的意義,就得到所要求的方程組(164)的解。

還要提出,利用[20]中的討論,我們可以很容易的把常係數線性方程組的求積分問題化爲一個常係數線性方程的求積分問題。在卷 III 中我們再講求常係數線性方程組的積分的一般方法。

44. 例 1. 考慮方程組

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z+x;\quad \frac{d^2z}{dx^2}=y+2x,$$

其中 y 與 z 是 x 的未知函數。由第一個方程確定出 z:

$$z=\frac{d^2y}{dx^2}-x, \tag{165}$$

代入到第二個方程中,就得到一個關於 y 的四級方程:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-y=2x,$$

由普通法則確定出它的一般積分:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-2x.$$

把這個表達式代入到公式(165)中,就得到關於 z 的表達式

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x-x.$$

2. 考慮三個一級方程的方程組:

$$\frac{dx}{dt}=y+z;\quad \frac{dy}{dt}=z+x;\quad \frac{dz}{dt}=x+y, \tag{166}$$

其中 x, y 與 z 是 t 的未知函數。由第一個方程解出 y:

(167) $$y=\frac{dx}{dt}-z,$$

把這個表達式代入到其餘兩個方程中,就得到:

(168) $$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dz}{dt}=z+x;\quad \frac{dz}{dt}=x+\frac{dx}{dt}-z.$$

把第二個方程中$\frac{dz}{dt}$的表達式代入到第一個中，就得到一個只含有x的二級方程（例外情形):

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0,$$

它的一般積分是:

(169_1) $$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}.$$

代入到(168)的第二個方程中,得到一個關於z的一級方程:

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_1e^{2t},$$

它的一般積分是:

(169_2) $$z=C_3e^{-t}+C_1e^{2t}.$$

把表達式(169_1)與(169_2)代入到公式(167)中,就得到關於y的表達式

(169_3) $$y=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}.$$

這裏得到的例外情形,我們在[20]中已經講過。替代了一個三級微分方程，我們得到一個二級方程以及一個一級方程。

3. 常係數線性方程組，不僅當考慮力學體系在平衡位置附近的微小振動時會遇到，像以前我們已經講過的，當討論電的振動時，也會遇到。設有磁性耦合的兩個線路，就是說，一個線路中的電流所產成的磁場可以感應另一個線路的電力。若i_1與i_2是兩個線路中的電流強度,則對於第一個線路,感應而生的電動勢是$M\frac{di_2}{dt}$,對於第二個是$M\frac{di_1}{dt}$,其中M是互感常係數。若我們假定在每一個線路中都沒有電源,則方程是

(170) $$L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}+R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1}i_1+M\frac{d^2i_2}{dt^2}=0;$$

(171) $$M\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2\frac{d^2i_2}{dt^2}+R_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C_2}i_2=0,$$

其中 L_1, R_1, C_1 是第一個線路的自感係數，電阻與電容，L_2, R_2, C_2 是第二個線路中同樣的量。

我們由這個例說明，這個方程組怎樣可以不引用輔助函數 V，消去其中一個未知函數而作出一個具有一個未知函數的四級微分方程。

由方程（171）確定出 $\frac{d^2i_2}{dt^2}$，把所得到的表達式代入到方程（170）中，就得到一個方程

$$(172)\qquad (L_1L_2-M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{L_2}{C_1}i_1-R_2M\frac{di_2}{dt}-\frac{M}{C_2}i_2=0.$$

由這個方程求微商再用由方程(170)得到的 $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ 的表達式

$$(173)\qquad M\frac{d^2i_2}{dt^2}=-L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}-R_1\frac{di_1}{dt}-\frac{1}{C_1}i_1$$

來替換 $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$，就得到：

$$(174)\qquad (L_1L_2-M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt}+ \\ +\frac{R_2}{C_1}i_1-\frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt}=0.$$

最後，由這個方程再求一次微商，再用表達式（173）來替換 $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$，就得到一個關於 i_1 的四級微分方程：

$$(175)\qquad (L_1L_2-M^2)\frac{d^4i_1}{dt^4}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{d^3i_1}{dt^3}+\left(\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+ \\ +\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1C_2}i_1=0.$$

如果我們開始時消去 i_1，則關於 i_2 得到完全一樣的一個四級方程。對應於它的特徵方程是

$$(176)\qquad (1-k^2)r^4+2(g_1+g_2)r^3+(n_1^2+n_2^2+4g_1g_2)r^2+ \\ +2(g_1n_2^2+g_2n_1^2)r+n_1^2n_2^2=0,$$

其中，爲簡短起見，我們設：

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}};\ n_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}};\ n_2=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}};\ g_1=\frac{R_1}{2L_1};\ g_2=\frac{R_2}{2L_2}.$$

方程(176)可以寫成下面的形狀:

(177)　　$$(r^2+2g_1r+n_1^2)(r^2+2g_2r+n_2^2)-k^2r^4=0.$$

若兩個線路之間沒有磁性耦合,則我們應當在方程(170)與(171)中設 $M=0$, 於是得到兩個個別的方程,以確定兩個線路中的放電現象:

(178)　　$$\frac{d^2i_1}{dt^2}+2g_1\frac{di_1}{dt}+n_1^2i_1=0;\qquad \frac{d^2i_2}{dt^2}+2g_2\frac{di_2}{dt}+n_2^2i_2=0.$$

通常兩個線路都是振動的,換句話說,就是對應於微分方程(178)的特徵方程

(179)　　$$r^2+2g_1r+n_1^2=0 \text{ 與 } r^2+2g_2r+n_2^2=0$$

具有複根,也就是 $g_1^2-n_1^2<0$, $g_2^2-n_2^2<0$, 或者說

$$\frac{R_1}{2L_1}<\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}\quad,\quad\frac{R_2}{2L_2}<\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}.$$

也就是

$$\frac{R_1}{2}<\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\quad,\quad\frac{R_2}{2}<\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}.$$

當 $k=0$ 時方程(177)給出兩對共軛複根[方程(179)的根], 於是像在實際中常遇到的,當 M 的值不大時,方程(177)也有兩對共軛複根,它們的實部是負的: $r_{1,2}=-a\pm bi$; $r_{3,4}=-c\pm di$, 於是 i_1 的一般表達式是:

$$i_1=C_1e^{-at}\cos bt+C_2e^{-at}\sin bt+C_3e^{-ct}\cos dt+C_4e^{-ct}\sin dt.$$

注意,知道了 i_1, 不必再作任何積分就可以得到 i_2, 實際上,由方程(174)確定出 $\frac{di_2}{dt}$; 再把求出的表達式代入到方程(172)中,就得到一個關於 i_2 的一次方程。i_2 的表達式含有與 i_1 中形狀一樣的項,所具有的係數是常數 C_1, C_2, C_3 與 C_4 的線性結合。

若把電阻忽略不計,就是說算作 $g_1=g_2=0$,此外並且算作兩個線路具有相同的頻率,就是說 $n_1=n_2=n$, 則方程(177)是

$$(1-k^2)r^4+2n^2r^2+n^4=0,$$

由此

$$r^2=\frac{-n^2\pm kn^2}{1-k^2}=-\frac{n^2}{1\pm k},$$

於是

$$r_{1,2}=\pm\frac{n}{\sqrt{1+k}}i;\ r_{3,4}=\pm\frac{n}{\sqrt{1-k}}i\qquad(i=\sqrt{-1}).$$

這些純虛根對應於三角函數形狀的解。如此,當磁性耦合時,具有相同頻率的兩個線

路中引起兩個振動，它們的頻率依賴於線路的公共頻率 n 以及表現磁性耦合的常數 k，這兩個頻率是

$$n'=\frac{n}{\sqrt{1+k}};\quad n''=\frac{n}{\sqrt{1-k}}.$$

§2　藉助於冪級數求積分

45. **藉助於冪級數求線性方程的積分**　我們已經講過，高於一級的線性方程的解，一般說來，不能通過初等函數來表達，並且一般說來求這樣的方程的積分問題，不能化爲普通的積分形狀。最常用的方法是把未知解表示成冪級數形狀，在 [13] 中我們已經講過。這個方法用於線性微分方程特別方便。我們只限於考慮二級方程：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{1}$$

設把係數 $p(x)$ 與 $q(x)$ 展開成 x 的正整冪級數，於是方程具有下面的形狀：

$$y''+(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\ y'+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)y=0. \tag{2}$$

注意這裏 y'' 的係數我們算作等於一。

把方程(2)的未知解也寫成冪級數的形狀

$$y=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^s. \tag{3}$$

代入這個 y 以及它的微商的表達式到方程(2)中，求得：

$$\sum_{s=2}^{\infty}s(s-1)\alpha_s x^{s-2}+\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s\cdot\sum_{s=1}^{\infty}s\alpha_s x^{s-1}+\sum_{s=0}^{\infty}b_s x^s\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^s=0.$$

乘開冪級數的乘積，集中同次項，讓所寫的等式左邊 x 的各個冪的係數等於零，就得到一串方程：

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1\alpha_2+a_0\alpha_1+b_0\alpha_0=0\\
x^1 & 3\cdot 2\alpha_3+2a_0\alpha_2+a_1\alpha_1+b_0\alpha_1+b_1\alpha_0=0\\
x^2 & 4\cdot 3\alpha_4+3a_0\alpha_3+2a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+b_0\alpha_2+b_1\alpha_1+b_2\alpha_0=0\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^s & (s+2)(s+1)\alpha_{s+2}+Q_s(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s+1})=0\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.
$$

我們用$Q_s(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{s+1})$記$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\alpha_{s+1}$的一個一次齊次多項式。

每一個在後面的方程中含有一個比以前附標較大的未知係數。係數a_0與α_1保持是任意的而有任意常數的作用。由方程(4)中第一個給出α_2，以後第二個給出α_3，第三個α_4等等，而且一般說來，知道了以前的$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{s+1}$，由第$(s+1)$個方程就可以確定出$\alpha_{s+2}$。

這時用下述方法比較方便。由上述方法確定兩個解y_1與y_2，對於第一個解取$\alpha_0=1,\alpha_1=0$，對於第二個解取$\alpha_0=0,\ \alpha_1=1$，這就相當於下面的初始條件：

$$
y_1\Big|_{x=0}=1;\ \ y_1'\Big|_{x=0}=0,
$$
$$
y_2\Big|_{x=0}=0;\ \ y_2'\Big|_{x=0}=1.
$$

這方程的任何解是這兩個解的線性結合，若有下面形狀的初始條件

$$
y\Big|_{x=0}=A;\ \ y'\Big|_{x=0}=B,
$$

則顯然

$$
y=Ay_1+By_2.
$$

以上我們說明了，用形式的計算方法可以逐步確定出冪級數(3)的係數。但是仍有一個問題，就是如此作出的冪級數是否收斂以及它是否這個方程的解。在卷 III 中我們再證明下面這個命題：**若級數**

$$p(x)=\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s;\ q(x)=\sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s$$

當 $|x|<R$ 時收斂，則對於這些 x 的值，由上述方法作出的冪級數也收斂而且是方程 (2) 的解。特別是，若 $p(x)$ 與 $q(x)$ 是 x 的多項式，則對於任何的 x 的值，所求得的冪級數收斂。

在很多情形下，線性方程有下面的形狀：

$$P_0(x)y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0, \tag{5}$$

其中 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ 是 x 的多項式。爲要把它化爲 (1) 的形狀，需要把方程兩邊用 $P_0(x)$ 除，於是在這情形下，需要算作

$$p(x)=\frac{P_1(x)}{P_0(x)};\quad q(x)=\frac{P_2(x)}{P_0(x)}. \tag{6}$$

若多項式 $P_0(x)$ 的常數項不是零，就是說 $P_0(0)\neq 0$，則在多項式的除法中依 x 的升冪排列，可以把 $p(x)$ 與 $q(x)$ 表示成冪級數的形狀，於是方程 (5) 的解也可以用冪級數的形狀來求。這時，不必須把方程 (5) 化爲 (1) 的形狀，只要把關於 y 的表達式 (3) 直接代入到方程 (5) 的左邊，以後再應用待定係數法。

到現在爲止，我們只考慮了展開成 x 的正整冪級數的情形。替代這個，也可以利用展開成差 $(x-a)$ 的冪級數。

顯然，所有以上所述也可以應用於高於二級的線性方程。只是在這情形下求解時，不僅前兩個係數保留不定，而不定係數的數目等於方程的級數。

若有非齊次線性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),$$

在其中，不僅係數，連自由項都是冪級數，則它的特殊解也可以用冪級數的形狀來求。

對於新的形式 (6) 我們給一個附註。設 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 是 x 的兩個多項式，並且 $P(0)\neq 0$。如以上所述，作多項式的除法，可以把它們的商表示成冪級數的形狀：

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots; \tag{7}$$

但是有一個問題：是否右邊的冪級數收斂，若是收斂，在什麼樣的區間上收斂，是否它的和等於等式的左邊？這些問題的解答由複變函數理論很容易推出來，在卷 III 中我們再討論。我們現在只講最後的結果：公式 (7) 中的冪級數當 $|x|<R$ 時收斂，其中 R 是方程 $P(x)=0$ 的模最小的根的模（或絕對值）；而且當 x 取這樣的值時等式 (7) 成立。由此直接推出，若藉助於冪級數直接求方程 (7) 的積分，則所得到的級數當 $|x|<R$ 時自然收斂，其中 R 是方程 $P_0(x)=0$ 的模最小的根的模。

注意，若證明了級數 (3) 在區間 $(-R,\ +R)$ 內收斂，則由此直接推出，這級數的和是方程的解。實際上，首先可以用逐項微分法由級數 (3) 計算 y' 與 y'' [I, 150]。再把 y, y' 與 y'' 的表達式代入到方程 (2) 的左邊，我們可以把 y', y 的級數與 $p(x)$, $q(x)$ 的級數相乘，因爲這些冪級數絕對收斂 [I, 137, 148]。最後，根據由等式 (4) 選擇的係數 a_n，在 (2) 的左邊所有的項都消掉。

46. 例 1. 考慮方程

$$y''-xy=0.$$

代入級數 (3)，得到：

$$(2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots)-x(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=0,$$

由此，讓 x 同次項的係數和等於零，得到：

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\cdot 1a_2=0 \\ x^1 & 3\cdot 2a_3-a_0=0 \\ x^2 & 4\cdot 3a_4-a_1=0 \\ x^3 & 5\cdot 4a_5-a_2=0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^s & (s+2)(s+1)a_{s+2}-a_{s-1}=0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

讓 $a_0=1$, $a_1=0$, 就相繼得到其餘的係數的值:

$$a_2=0;\ a_3=\frac{1}{2\cdot 3};\ a_4=a_5=0;\ a_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6};\ a_7=a_8=0;$$

$$a_9=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9},$$

就是說只是附標 s 能被3除盡的 a_s 不等於零,於是我們可以寫成:

$$a_{3k+1}=a_{3k+2}=0;\ a_{3k}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!},$$

我們作出的一個解就是

$$y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}.$$

作第二個解時,設 $a_0=0$, $a_1=1$. 像以上一樣,不難證明,這個第二個解是

$$y_2=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}.$$

所作出的冪級數當 x 取任何值時收斂。

依照達朗倍爾判別法我們來驗證關於 y_1 的級數 [I, 121]。在其中後項與前項之比是

$$\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3k+1)}{(3k+3)!}x^{3k+3}:\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}=\frac{1}{(3k+2)(3k+3)}x^3,$$

取任何值,當 k 無限增加時,這個比趨向零,由此推出這級數絕對收斂。

2. 考慮方程:

$$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0.$$

代入級數(3),讓 x^4 的係數等於零,得到係數 a_n 之間的關係式:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+a^2a_n=0$$

或

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n^2-a^2)a_n.$$

讓 $a_0=1$, $a_1=0$, 得到解:

$$y_1=1-\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^2(a^2-4)}{4!}x^4-\frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{6!}x^6+\cdots$$

同樣,代入 $a_0=0$, $a_1=1$, 得到:

$$y_2=x-\frac{a^2-1}{3!}x^3+\frac{(a^2-1)(a^2-9)}{5!}x^5-\frac{(a^2-1)(a^2-9)(a^2-25)}{7!}x^7+\cdots$$

在所考慮的方程中, y'' 的係數有根 $x=\pm1$, 而這兩個根的絕對值都等於一。由此推出,當 $-1<x<+1$ 時,就是當 $|x|<1$ 時,級數 y_1 與 y_2 應當收斂。

依照達朗倍爾判別法不難驗證。例如,對於級數 y_1 取後項與前項之比,不計符號,得到:

$$\frac{a^2(a^2-4)\ldots[a^2-(2n)^2]}{(2n+2)!}x^{2n+2}:\frac{a^2(a^2-4)\ldots[a^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}x^{2n}=$$
$$=\frac{a^2-(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)}x^2.$$

分子分母用 n^2 除,可以把這個比的絕對值寫成下面的形狀:

$$\left|\frac{4-\frac{a^2}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}\right||x|^2.$$

當 n 無限增加時,這個比趨向 $|x|^2$, 顯然當 $|x|<1$ 時, $|x|^2<1$, 就是說,依照達朗倍爾判別法,當 $|x|<1$ 時,級數 y_1 絕對收斂。只要 a 不等於一個偶整數,當 $|x|>1$ 時,它顯然發散。在 a 是偶整數的情形,級數 y_1 就中斷而成爲多項式了。可以驗證,解 y_1 與 y_2 能夠通過初等函數來表達,而且是

$$y_1=\cos(a\ \operatorname{arc\ cos}\ x);\ y_2=\frac{1}{a}\sin(a\ \operatorname{arc\ cos}\ x).$$

47. 解的展開爲廣義冪級數的形狀 在應用中時常遇到具有下面形狀的方程

$$x^2y''+p(x)\cdot xy'+q(x)y=0,$$

其中 $p(x)$ 與 $q(x)$，像在方程 (2) 中一樣，可以依 x 的正整數次冪展開或是多項式。由於在所寫的方程中含有二級微商的一項有因子 x^2，所以不能化為 (2) 的型態。我們說，這個方程在點 $x=0$ 有正則奇異點。寫出 $p(x)$ 與 $q(x)$ 的冪級數

$$x^2y''+(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)xy'+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)y=0, \tag{8}$$

這方程的未知解就不是簡單冪級數 (3) 的形狀，而要由這樣的級數乘以 x 的某次冪：

$$y=x^{\rho}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^s, \tag{9}$$

由於在求和號前面的因子 x^{ρ} 的指數 ρ 沒有定，我們自然可以算作第一項的係數 α_0 不等於零。

把 y, y' 與 y'' 的表達式

$$y=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s x^{\rho+s};\ y'=\sum_{s=0}^{\infty}(\rho+s)\alpha_s x^{\rho+s-1};\ y''=\sum_{s=0}^{\infty}(\rho+s)(\rho+s-1)\alpha_s x^{\rho+s-2}$$

代入到方程 (8) 的左邊。

集中同次項，再讓 x 各次冪的係數等於零，就得到一串方程：

$$\left\{\begin{array}{l|l}
x^{\rho} & [\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]\alpha_0=0\\
x^{\rho+1} & [(\rho+1)\rho+a_0(\rho+1)+b_0]\alpha_1+a_1\rho\alpha_0+b_1\alpha_0=0\\
x^{\rho+2} & [(\rho+2)(\rho+1)+a_0(\rho+2)+b_0]\alpha_2+a_1(\rho+1)\alpha_1+a_2\rho\alpha_0+b_1\alpha_1+b_2\alpha_0=0\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{\rho+s} & [(\rho+s)(\rho+s-1)+a_0(\rho+s)+b_0]\alpha_s+Q_s(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{s-1})=0.\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right. \tag{10}$$

這裏我們用 $Q_s(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1})$ 記 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 的一個一次齊次多項式。

根據條件 $\alpha_0\neq0$，由所寫的第一個方程給出一個確定指數 ρ 的二次方程：

$$F(\rho)=\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0. \tag{11}$$

這個方程叫做指標方程。

設 ρ_1 與 ρ_2 是它的根。在方程 (8) 中讓 $\rho=\rho_1$ 或 $\rho=\rho_2$，就有一串方程，其中每一個在後面的含有一個附標比以前較大的係數 α_s，如此可以逐步確定出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$。係數 α_0 保持是任意的，而有任意常數的作用。例如，可以設 $\alpha_0=1$。

代入 $\rho=\rho_1$ 或 $\rho=\rho_2$ 以後，方程(10)中第一個成爲恆等式，第二個給出 a_1，第三 a_2，等等，於是一般說來，如果已經知道了 $a_0, a_1, \cdots, a_{s-1}$ 則由第$(s+1)$個方程給出 a_s. 這時只需要在這個方程中 a_s 的係數不等於零。直接看出，這個係數可以由方程(11)的左邊用(ρ_1+s)或(ρ_2+s)替代 ρ 得來，就是說，它等於 $F(\rho_1+s)$ 或 $F(\rho_2+s)$。

設當求解(9)時，我們由方程(11)的根 $\rho=\rho_2$ 來求。若對於任何正整數 s, $F(\rho_2+s)\neq 0$，則可以用上述方法計算係數 a_s，並且給出這些係數的確定的值。

$F(\rho_2+s)\neq 0$ 這個條件顯然相當於下述條件：方程(11)的第二個根 ρ_1 不是形如(ρ_2+s)的數，其中 s 是正整數，換句話說就是，兩根之差$(\rho_1-\rho_2)$應當不是正整數。

由以上所述不難引出下面的結論。

1. 若方程(11)的兩個根 ρ_1 與 ρ_2 之差不等於整數或零，則可以利用方程(11)的兩個根用上述方法作出下面形狀的兩個解：

$$y_1=x^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s;\quad y_2=x^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s x^s\qquad (\alpha_0 \text{ 與 } \beta_0\neq 0). \tag{12}$$

2. 若差$(\rho_1-\rho_2)$是正整數，則一般說來，用上述方法只能作出一個級數：

$$y_1=x^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s. \tag{13}$$

3. 若方程(11)有重根 $\rho_1=\rho_2$，則也只可以作出一個級數(13)。

在下述的與我們在[45]中所講的假定類似的假定下，所作出的級數收斂：若級數

$$\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^s \quad \text{與} \quad \sum_{s=0}^{\infty}b_s x^s$$

當 $|X|<R$ 時收斂，則當 X 取這些值時，以上所作出的級數也收斂，並且給出方程(9)的解。

再考慮方程：

$$x^2P_0(x)y''+xP_1(x)y'+P_2(x)y=0, \tag{14}$$

其中 $P_0(x)$, $P_1(x)$ 與 $P_2(x)$是多項式或者可以依 x 的正整數次冪展開，並且 $P_0(0)\neq 0$。像在[45]中一樣，現在可以直接代入級數(9)到方程(14)的左邊，不必用 $P_0(x)$ 除。此外，

像在[45]中一樣,可以考慮不是依 x 的正整數次冪展開的級數,而是依差 $(x-a)$ 展開的冪級數。

在第一個情形下,所作出的兩個解(12)是線性無關的,就是説,它們的比不是常量,這可以由下述的事實直接推出來:y_1 與 y_2 的表達式中在求和號之前含有不同的方冪 x^{ρ_1} 與 x^{ρ_2}。在第二第三兩個情形下,我們只作出了一個解(13)。由[24]中公式(9)給出利用積分求第二個解的可能。我們只敍述結果,不講證明:若差 $(\rho_1-\rho_2)$ 是正整數或零,則除解(13)外,還有一個下面形狀的解:

$$y_2=\beta y_1 \lg x+x^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s x^s. \tag{15}$$

如此,在所考慮的情形下,y_2 的表達式與普通表達式(12)差一項 $\beta y_1 \lg x$。常數 β 可以等於零,那時對於 y_2 就得到形狀如(12)的表達式。所有以上所述的肯定我們將在卷 III 中證明。

48. 貝塞爾方程　這方程有下面的形狀:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0, \tag{16}$$

其中 p 是給定的常數。在天文、物理以及技術科學的各種問題中常遇到它的應用。

比較這個方程與方程(8),我們看出,$a_0=1$, $b_0=-p^2$, 於是在所給的情形下,指標方程是

$$\rho(\rho-1)+\rho-p^2=0 \text{ 或 } \rho^2-p^2=0,$$

它的根是

$$\rho_1=p,\quad \rho_2=-p.$$

就有下面的形狀的解

$$y=x^p(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots).$$

代入到方程(16)的左邊,讓 x 的各個方冪的係數等於零,得到:

$$\begin{array}{l|l}
x^{p+1} & [(p+1)^2-p^2]a_1=0\\
x^{p+2} & [(p+2)^2-(p+1)^2]a_2+a_0=0\\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{p+s} & [(p+s)^2-(p+s-1)^2]a_s+a_{s-2}=0.
\end{array}$$

讓 $a_0=1$,並依序計算係數,就求出一個解

$$(17)\quad y_1=x^p\left[1-\frac{x^2}{2(2p+2)}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot(2p+2)(2p+4)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot(2p+2)(2p+4)(2p+6)}+\cdots\right]$$

利用第二個根,可以作出方程(16)的第二個解。顯然它可以由解(17)用 $-p$ 替代 p 得出來,因爲方程(16)中只含有 p^2,於是當用 $-p$ 替代 p 時不改變:

$$(18)\quad y_2=x^{-p}\left[1-\frac{x^2}{2(-2p+2)}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot(-2p+2)(-2p+4)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)}+\cdots\right].$$

指標方程的根之差等於 $2p$,於是推知,若 p 不等於整數或奇整數的一半,則所寫的兩個解是適用的。解(17)乘以某一常數因子給出 p 級貝塞爾函數,通常把它記作 $J_p(x)$,也叫做第一類柱面函數。如此,若 p 不是整數或奇整數的一半,則方程(16)的一般解是:

$$y=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x).$$

對於 x 的任何值,在解(17)中出現的冪級數收斂,這不難依照普通的達朗倍爾判別法來驗證。

現在設 $p=n$ 是正整數。解(17)仍然保持有效,而解(18)則失去效用,因爲展開式(18)中,由某一項起,各項的分母中有一個因子等於零。當 $p=n$ 是正整數時,由公式(17)乘以常數因子 $\frac{1}{2^nn!}$ 確定出貝塞爾函數 $J_n(x)$:

$$(19)\quad J_n(x)=\frac{x^n}{2^nn!}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot4(2n+2)(2n+4)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\cdots\right].$$

這個展開式中一般項是

$$(-1)^s\frac{x^{n+2s}}{2^n\cdot n!\,2\cdot4\cdot6\cdots2s\cdot(2n+2)(2n+4)(2n+6)\cdots(2n+2s)}$$

在每個分母中,$2^n\cdot n!$ 之後有 $2s$ 個因子,它們都含有因子 2,提出這些個 2 與 2^n 併在一起,可以把一般項寫成下面的形狀:

$$(-1)^s\frac{x^{n+2s}}{2^{n+2s}\cdot n!\,1\cdot2\cdot3\cdots s\cdot(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+s)}=\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

所以公式(19)可以寫成下面的形狀

(20)
$$J_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

並且總是算作 $0!=1$。特別是當 $n=0$ 時得到:

(21)
$$J_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-$$
$$-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots$$

根據[47]中所述,當 $p=n$ 是正整數時,除解(20)外方程(16)還有下面形狀的第二個解

(22)
$$K_n(x)=\beta J_n(x)\lg x+x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s x^s.$$

顯然,當 $x=0$ 時,這個解成爲無窮大。

當 $p=n$ 時,方程(16)的一般積分是

(23)
$$y=C_1J_n(x)+C_2K_n(x).$$

若我們要得到恰好在 $x=0$ 的解,則應當取常數 C_2 等於零,就是應當只限於解(20)。

再仔細講當 $p=0$ 時解(22)的形狀。在這情形下方程是:

(24)
$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0,$$

公式(21)給出它的一個解。第二個解可以由下面的形狀來求

$$\beta J_0(x)\lg x+\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots$$

取這個解與已經求出的解的線性結合,可以把自由項化爲零,所以結果可以用下面的形狀來求:

$$\beta J_0(x)\lg x+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots$$

代入這個表達式到方程(24)的左邊,再應用待定係數法,可以逐步確定出 β_n。我們不作全部的計算,只講結果得到的第二個解的表達式。這時,係數 β 是不等於零的,我們讓它等於一;

(25)
$$K_0(x)=J_0(x)\lg x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\cdots$$

這個函數叫做第二類零級貝塞爾函數或柱面函數。

最後，設 $p=\frac{2n+1}{2}$ 是奇整數的一半。在這情形下，指標方程的兩個根之差等於整數 $(2n+1)$，不過兩個解(17)與(18)都有效，而且它們是線性無關的，因爲冪級數前的因子一個是 $x^{\frac{2n+1}{2}}$，而另一個是 $x^{-\frac{2n+1}{2}}$，於是推知，這兩個解之比不可能是常量。

例如，在解(17)中代入 $p=\frac{1}{2}$，得到級數：

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right]=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

這個解乘以常數因子 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，就得到貝塞爾函數 $J_{\frac{1}{2}}(x)$：

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{26}$$

同樣，公式(18)給出

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \tag{27}$$

於是當 $p=\frac{1}{2}$ 時方程(16)的一般積分是：

$$y=C_1J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

對於具有附標等於奇整數之半的貝塞爾函數，我們不證明，只給出它們通過初等函數的表達式：

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin x+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos x\right],$$

其中 $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 與 $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的多項式。特別是

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right);\quad J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right];$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x-\frac{\cos x}{x}\right);$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{3}{x}\sin x+\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\cos x\right].$$

此外，對於任何整數 n，下面的公式成立：

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x)=(-1)^n\cdot\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\cdot(2x)^n\frac{d^n}{d(x^2)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

在這公式中需要把偶函數$\frac{\sin x}{x}$對 x^2 求微商 n 次。

49．可以化爲貝塞爾方程的方程　我們講幾個用換元法可以化爲貝塞爾方程(16)的方程。考慮下面形狀的方程

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-p^2)y=0, \tag{28}$$

其中 k 是某一個常數，不等於零。引用新的自變量 $\xi=kx$ 以替代 x. 這時需要在方程(28)中替換以

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=k\frac{dy}{d\xi}\text{ 與 }y''=\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{d\xi}\right)=k^2\frac{d^2y}{d\xi^2},$$

於是方程(28)寫成

$$k^2x^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+kx\frac{dy}{d\xi}+(k^2x^2-p^2)y=0$$

或

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+\xi\frac{dy}{d\xi}+(\xi^2-p^2)y=0,$$

這是具有自變量 ξ 的貝塞爾方程(16)，如此，根據 $\xi=kx$，方程(28)的一般積分就是：

$$y=C_1J_p(kx)+C_2J_{-p}(kx), \tag{29}$$

或者，如果 $p=n$ 是正整數或零：

$$y=C_1J_n(kx)+C_2K_n(kx). \tag{29_1}$$

再講更廣泛的一類可以化爲貝塞爾方程的方程。爲此在方程(16)中，依照下列公式，引用新的自變量 t 以及新的函數 u：

$$y=t^{\alpha}u\text{ 與 }x=\gamma t^{\beta}, \tag{30}$$

其中 α, β 與 γ 是常數，並且 β 與 γ 不等於零。求微商，顯然有等式：

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta};\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1-\beta}{\beta\gamma}t^{-\beta}\frac{dy}{dt}\right),$$

並且此外

$$\frac{dy}{dt}=t^{\alpha}\frac{du}{dt}+\alpha t^{\alpha-1}u;\ \frac{d^2y}{dt^2}=t^{\alpha}\frac{d^2u}{dt^2}+2\alpha t^{\alpha-1}\frac{du}{dt}+\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u.$$

代入 $y, \frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的表達式到方程(16)中，並用通過 $u, \frac{du}{dt}$ 與 $\frac{d^2u}{dt^2}$ 的表達式來替代 $\frac{dy}{dt}$ 與 $\frac{d^2y}{dt^2}$，經過初等變換，就得到關於 u 的方程：

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+(2\alpha+1)t\frac{du}{dt}+(\alpha^2-\beta^2p^2+\beta^2\gamma^2t^{2\beta})u=0. \tag{31}$$

方程(16)具有一般積分

$$y=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x),$$

於是根據(30)推知，方程(31)就有一般積分

$$u=t^{-\alpha}y=C_1t^{-\alpha}J_p(\gamma t^{\beta})+C_2t^{-\alpha}J_{-p}(\gamma t^{\beta}), \tag{32}$$

這裏，若 $p=n$ 是正整數或零，則 $J_{-p}(\gamma t^{\beta})$ 需要用 $K_n(\gamma t^{\beta})$ 來替換。

方程(31)是下面形狀的方程

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+at\frac{du}{dt}+(b+ct^m)u=0, \tag{33}$$

其中

$$2\alpha+1=a;\ \alpha^2-\beta^2p^2=b;\ \beta^2\gamma^2=c;\ 2\beta=m. \tag{34}$$

反之，對於任何的給定的形狀如(33)的方程，在常數 c 與 m 不等於零的條件下，由公式(34)可以求出 α, β, γ 與 p，於是依照公式(32)可以貝塞爾函數來表達方程(33)的一般積分。

若 c 或 m 等於零，則方程(33)是尤拉方程 [42]，於是可以化爲簡單的常係數方程。

考慮方程(33)的一個特殊情形

$$t\frac{d^2u}{dt^2}+a\frac{du}{dt}+tu=0. \tag{35}$$

把這個方程乘以 t，我們看出，在這情形下，a 是任意的，$b=0$，$c=1$ 而 $m=2$. 方程(34)就是：

$$2\alpha+1=a;\ \alpha^2-\beta^2 p^2=0;\ \beta^2\gamma^2=1;\ 2\beta=2,$$

由此可以算出

$$\alpha=\frac{a-1}{2};\ \beta=1;\ \gamma=1;\ p=\frac{a-1}{2}.$$

於是，依照 (32), (35) 的一般積分是

$$u=C_1 t^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}(t)+C_2 t^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{1-a}{2}}(t),$$

並且，例如，若附標 $\frac{1-a}{2}$ 是負整數或零，則需要用 $K_{\frac{a-1}{2}}$ 來替代 $J_{\frac{1-a}{2}}$。當 $a=1$ 時方程(35)與方程(24)一致。

普通方程(33)給出較廣泛的一類在應用中常遇到的線性方程，我們看到，它的一般積分可以通過貝塞爾函數來表達。

§3. 關於微分方程論的補充知識

50. 關於線性方程的逐步漸近法 我們已經幾次談到過關於微分方程的存在與唯一定理。現在我們講這個定理的證明，先講關於線性微分方程的情形。對於這個證明，我們應用所謂逐步漸近法，這個方法，我們在講方程的根的近似計算中已經利用過 [I, 193]。

爲確定起見，我們考慮兩個線性齊次方程的方程組

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=p_1(x)y+q_1(x)z;\quad \frac{dz}{dx}=p_2(x)y+q_2(x)z,$$

具有初始條件

$$(2)\qquad y|_{x=x_0}=y_0;\quad z|_{x=x_0}=z_0.$$

我們算作方程(1)的係數，在某一個含有初始值 x_0 的區間 I 上是 x 的連續函數，並且在以下的討論中，我們限制自變量只在這個區間上改變。

自然，方程組(1)的解 y 與 z 應當是連續函數，而有微商，由這兩個

方程看出，微商 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{dz}{dx}$ 也是連續函數，因爲在所作的假定下，方程(1)的右邊都是連續函數。把方程 (1) 逐項由 x_0 到 x 求積分並注意(2)，就得到:

$$
(3) \quad \begin{cases} y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y(t)+q_1(t)z(t)]\,dt \\ z(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}[p_2(t)y(t)+q_2(t)z(t)]\,dt. \end{cases}
$$

這裏，爲清楚起見，我寫出來函數 y 與 z 中的變量，而把積分變量記作 t，這是爲要避免與積分上限 x 相混。於是，具有初始條件(2)時方程(1)可以化爲方程(3)。

現在我們反過來證明，若連續函數 $y(x)$ 與 $z(x)$ 滿足方程(3)，則它們滿足方程(1)與初始條件(2)。實際上，在方程(3)中讓 $x=x_0$ 並注意上下限相同的積分等於零，就得到初始條件(2)；由方程(3)對 x 求微商，就得到方程 (1) [I, 96]。由以上所述推知，在所講的意義下，方程(3)相當於具有初始條件(2)的方程(1)，以下我們將只考慮方程(3)。注意，在這兩個方程中，未知函數 $y(x)$ 與 $z(x)$ 出現在方程的左邊，也出現在右邊的積分號下。

我們現在講逐步漸近法的觀念。把初始值 y_0 與 z_0 算作是未知函數 y 與 z 的第一近似函數，在方程(3)的右邊用 y_0 與 z_0 來替代 y 與 z。如此得到函數 $y_1(x)$ 與 $z_1(x)$；

$$
(4) \quad \begin{cases} y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y_0+q_1(t)z_0]\,dt \\ z_1(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}[p_2(t)y_0+q_2(t)z_0]\,dt, \end{cases}
$$

它們是 y 與 z 的第二近似函數。這兩個函數 $y_1(x)$ 與 $z_1(x)$ 顯然在所述的區間 I 上是連續的 [I, 96]。再在方程(3)的右邊用 $y_1(x)$ 與 $z_1(x)$ 來替代 y 與 z，就得到第三近似函數 $y_2(x)$ 與 $z_2(x)$：

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y_1(t)+q_1(t)z_1(t)]\,dt$$

$$z_2(x)=z_0+\int_{x_0}^{x}[p_2(t)y_1(t)+q_2(t)z_1(t)]\,dt,$$

其中 $y_2(x)$ 與 $z_2(x)$ 在區間 I 上仍然是連續的，依此類推，給出第 $(n+1)$ 近似函數的一般公式是：

$$(5)\qquad \begin{cases} y_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y_{n-1}(t)+q_1(t)z_{n-1}(t)]\,dt \\ z_n(x)=z_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}[p_2(t)y_{n-1}(t)+q_2(t)z_{n-1}(t)]\,dt. \end{cases}$$

由條件，在區間 I 上方程(1)的係數是連續函數，所以在這區間上，它們的絕對值不大於某一個確定的正數 M[I, 35]：

$$(6)\quad |p_1(x)|\leqslant M;\ |q_1(x)|\leqslant M;\ |p_2(x)|\leqslant M;\ |q_2(x)|\leqslant M\ (x\text{ 在 I 上})。$$

此外，把 $|y_0|$ 與 $|z_0|$ 這兩個正數中之較大的記作 m，就是

$$(7)\qquad |y_0|\leqslant m;\quad |z_0|\leqslant m.$$

以下我們只考慮在 x_0 右邊的區間 I 的一部分，就是算作 $x-x_0\geqslant 0$。對於左邊的可以同樣考慮。

我們來估計相鄰兩個近似函數之差。由(4)中第一個公式給出

$$y_1(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y_0+q_1(t)z_0]\,dt.$$

在積分號下所有的量都用最大的絕對值來替代，根據(6)與(7)就得到[I, 95]:

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant\int_{x_0}^{x}(Mm+Mm)\,dt;$$

就是說

(8) $$|y_1(x)-y_0|\leqslant m\cdot 2M(x-x_0),$$

同理

(8_1) $$|z_1(x)-z_0|\leqslant m\cdot 2M(x-x_0).$$

當 $n=2$ 時，(5)中第一個方程是

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[p_1(t)y_1(t)+q_1(t)z_1(t)]\,dt,$$

由它逐項減掉(4)中第一個方程就得到:

$$y_2(x)-y_1(x)=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)[y_1(t)-y_0]+q_1(t)[z_1(t)-z_0]\}\,dt.$$

再把積分號下所得的量用絕對值來替代並利用(6)，(8)與(8_1)，就得到:

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}\{M\cdot m\cdot 2M(t-x_0)+M\cdot m\cdot 2M(t-x_0)\}\,dt$$

或

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant 2^2mM^2\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt=m\cdot 2^2M^2\left[\frac{(t-x_0)^2}{2!}\right]_{t=x_0}^{t=x},$$

由此結果得到

(8) $$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant m\,\frac{[2M(x-x_0)]^2}{2!}.$$

同理

$$(9_1)\qquad |z_2(x)-z_1(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^2}{2!}.$$

再取當 $n=2$ 與 $n=3$ 時(5)中第一個方程，逐項相減就得到：

$$y_3(x)-y_2(x)=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)[y_2(t)-y_1(t)]+q_1(t)[z_2(t)-z_1(t)]\}\,dt.$$

像以上一樣，利用(6),(9),(9_1)就有：

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant m\frac{2^3M^3}{2}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^2\,dt,$$

由此

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^3}{3!};$$

$$|z_3(x)-z_2(x)|\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^3}{3!}.$$

繼續這樣作下去，可以寫出來相鄰兩個近似函數之差的一般估計值：

$$(10)\qquad \begin{cases}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant m\dfrac{[2M(x-x_0)]^n}{n!}\\ |z_n(x)-z_{n-1}(x)|\leqslant m\dfrac{[2M(x-x_0)]^n}{n!}.\end{cases}$$

利用這些估計值，不難說明，當 n 無限增加時，函數 $y_n(x)$ 與 $z_n(x)$ 一齊趨向某兩個極限函數 $y(x)$ 與 $z(x)$。[1] 這個序列可以用下面的無窮級數來替代：

$$(11)\qquad y_0+[y_1(x)-y_0]+[y_2(x)-y_1(x)]+[y_3(x)-y_2(x)]+\cdots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\cdots,$$

1）爲了以下所講的，有必要複習一下卷 I 中關於變項級數與一致收斂性的幾段。

它的前$(n+1)$項之和等於$y_n(x)$，如此我們應當證明級數(11)一致收斂[I, 44]。若l是x改變所在的區間I之長，則(10)中第一個公式說明，級數(11)中的項的絕對值不超過正數

$$m\frac{(2Ml)^n}{n!} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

而這些數作成的級數，依照達朗倍爾判別法，是收斂的，因爲後項與前項之比等於$\frac{2Ml}{n}$，當n無限增加時，它趨向零。同樣也可以由e^x的展開式推出來[I, 129]。如此，依照維爾史特拉斯判別法[I, 147]，在區間I上級數(11)一致收斂，就是說，在這區間上$y_n(x)$一致趨向某一個函數$y(x)$。同理可以證明，在I上序列$z_n(x)$一致趨向某一個極限函數$z(x)$，就是說，在I上，對x來講，$y_n(x)$與$z_n(x)$一致趨向極限：

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} y_n(x)=y(x); \quad \lim_{n\to\infty} z_n(x)=z(x).$$

函數$y_n(x)$與$z_n(x)$在I上連續，於是可以肯定$y(x)$與$z(x)$在I上連續[I, 145]。

注意，對於在x_0左邊的區間的一部分，那時$x-x_0\leqslant 0$，我們應當在不等式(8)與(8_1)的右邊用(x_0-x)來替代$(x-x_0)$。在以下的估計值中需要用(x_0-t)來替代$(t-x_0)$，依此類推。當$(x-x_0)$用這個差的絕對值來替代時，對於整個區間I來講，不等式(10)保持正確。

現在證明，這兩個極限函數滿足方程(3)，也就是方程(1)與邊值條件(2)。這可以由公式(5)取極限就差不多直接推出來了。實際上，若當附標n無限增加時，取這兩個方程兩邊的極限，則$y_n(x)$與$y_{n-1}(t)$趨向$y(x)$與$y(t)$，而$z_n(x)$與$z_{n-1}(t)$趨向$z(x)$與$z(t)$，於是取極限後，對於$y(x)$與$z(x)$，我們得到方程(3)。以下我們嚴格的來求這個極限，由(12)推知：

$$\lim_{n\to\infty}[p_1(t)y_{n-1}(t)+q_1(t)z_{n-1}(t)]=p_1(t)y(t)+q_1(t)z(t);$$

(12_1)

$$\lim_{n\to\infty}[p_2(t)y_{n-1}(t)+q_2(t)z_{n-1}(t)]=p_2(t)y(t)+q_2(t)z(t).$$

我們證明，在區間 I 上，對 t 來講，上式是一致趨向極限的。我們只對第一個公式證明。極限與變項之差的估計值是：

$$|[p_1(t)y(t)+q_1(t)z(t)]-[p_1(t)y_{n-1}(t)+q_1(t)z_{n-1}(t)]|\leqslant$$
$$\leqslant|p_1(t)||y(t)-y_{n-1}(t)|+|q_1(t)||z(t)-z_{n-1}(t)|.$$

根據 $y_{n-1}(t)$ 與 $z_{n-1}(t)$ 一致趨向 $y(t)$ 與 $z(t)$，對於任何給定的 $\varepsilon>0$，存在有一個數 N，這個數對於 I 中所有 t 的值都適用，使得當 $n>N$ 時

$$|y(t)-y_{n-1}(t)|<\frac{\varepsilon}{2M};\quad |z(t)-z_{n-1}(t)|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

由此，根據(6)推知，對於 I 中任何 t 的值，下面的不等式成立：

當 $n>N$ 時　$|[p_1(t)y(t)+q_1(t)z(t)]-$
$$-[p_1(t)y_{n-1}(t)+q_1(t)z_{n-1}(t)]|<\varepsilon,$$

這就證明了，在整個區間 I 上，或在它的任何一部分 (x_0, x) 上，公式 (12_1) 是一致趨向極限的。利用對於一致收斂序列取極限換到積分號下的可能性 [I, 145]，由公式(5)取極限就得到關於 $y(x)$ 與 $z(x)$ 的方程(3)。

總結起來可以說，逐步漸近法給出了方程組(1)具有初始條件(2)時的解，就是說，我們證明了解的存在性。現在證明未知解是唯一的。設方程(3)有兩組解 $y(x)$, $z(x)$ 與 $Y(x)$, $Z(x)$。把第一組解代入到方程(3)中，再把第二組解代入到方程(3)中，然後逐項相減，就得到：

$$(13)\begin{cases} y(x)-Y(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\{p_1(t)[y(t)-Y(t)]+q_1(t)[z(t)-Z(t)]\}dt \\ z(x)-Z(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\{[p_2(t)[y(t)-Y(t)]+q_2(t)[z(t)-Z(t)]\}dt. \end{cases}$$

取 x_0 之右的一個區間 I_1, 長度爲 l_1, 使得 $2Ml_1=\theta$ 小於一。我們證明在這個區間上,上述的兩個解相同。若不是這樣的,則差的絕對值

$$|y(x)-Y(x)|,\quad |z(x)-Z(x)|$$

在 I_1 上有正的極大值，我們把它記作 δ. 例如，設第一個差在點 $x=\xi$ 達到 δ, 就是說

$$(14)\qquad |y(\xi)-Y(\xi)|=\delta,$$

並且

$$(14_1)\qquad |y(x)-Y(x)|\leqslant\delta;\quad |z(x)-Z(x)\leqslant\delta\quad (x\text{ 在 } I_1 \text{ 上})。$$

考慮當 $x=\xi$ 時，(13)中第一個方程。像我們以上所作的一樣,根據 (14_1), 可以得到這個積分的估計值:

$$|y(\xi)-Y(\xi)|<2M\delta(\xi-x_0),$$

由此,利用(14),並注意 ξ 屬於區間 I_1,

$$\delta<2MI_1\delta,\text{ 就是 } \delta<\theta\delta,$$

然而最後這個不等式不可能成立,因爲 $0<\theta<1$。

於是，我們假設解 y, z 與 Y, Z 在區間 I_1 上不相同引至不可能的結果。把整個區間 I 分成幾個長度爲 l_1 的區間，我們可以證明所說的兩組解在整個區間 I 上是相同的。

現在把最後的結果敍述如下: **方程組(1)具有初始條件(2)時，若這方程組的係數在區間 I 上是連續函數，則在區間 I 上存在有一個確定的解,這個解可以由逐步漸近法得到。**

我們也能够討論非齊次方程組,就是，在方程(1)的右邊加上在區

間 I 上連續的函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$。這時以上的證明仍然保持有效。

二級線性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{15}$$

可以寫成方程組的形狀，只要除 y 之外再引用一個未知函數 $z=y'$:

$$\frac{dy}{dx}=z$$

$$\frac{dz}{dx}=-p(x)z-q(x)y,$$

如此，當有下面的初始條件時

$$y|_{x=x_0}=y_0;\quad y'|_{x=x_0}=y_0' \tag{16}$$

如果在區間 I 上係數 $p(x)$與$q(x)$連續的話，上述的結論對於方程(15)是正確的。

利用條件(16)可以把方程(15)寫成下面的形狀：

$$y=y_0+y_0'x-\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}[p(x)y'+q(x)y]\,dx, \tag{17}$$

其中的二次積分可以依照[15]中公式(23)換成單積分。等式(17)給出直接應用逐步漸近法於方程(15)的可能性，這時不必把這個方程化爲方程組。

例 應用逐步漸近法於我們在[46]中考慮過的例：

$$y''-xy=0$$

取初始條件 $y|_{x=0}=1$ 與 $y'|_{x=0}=0$. 在這情形下方程(17)是

$$y=1+\int_0^x dx\int_0^x xy\,dx.$$

在右邊代入 $y=1$，得到第二近似函數：

$$y_1(x)=1+\int_0^x dx\int_0^x x\,dx=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}.$$

第三近似函數是

$$y_2(x)=1+\int_0^x dx\int_0^x x\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)dx=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}.$$

取極限，顯然得到冪級數：

$$y=1+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\cdots,$$

在[46]中我們得到過這個結果。

51. 非線性方程的情形 在非線性方程的情形，也可以應用逐步漸近法來證明存在與唯一定理，不過這時最後的結果有些不同。為簡單起見，我們考慮一個一級方程：

(18) $$y'=f(x,y)$$

具有初始條件

(19) $$y|_{x=x_0}=y_0.$$

假設給定的函數 $f(x,y)$ 在初始點 $x=x_0$ 的近傍連續，而且在這近傍有對 y 的有界微商。嚴格說來，就是在平面 XY 上存在一個這樣的矩形 Q（圖27）：

(20) $$\begin{cases} x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a; \\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b, \end{cases}$$

在其中 $f(x,y)$ 是連續的而有對 y 的偏微商，並且

(21) $$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|<k,$$

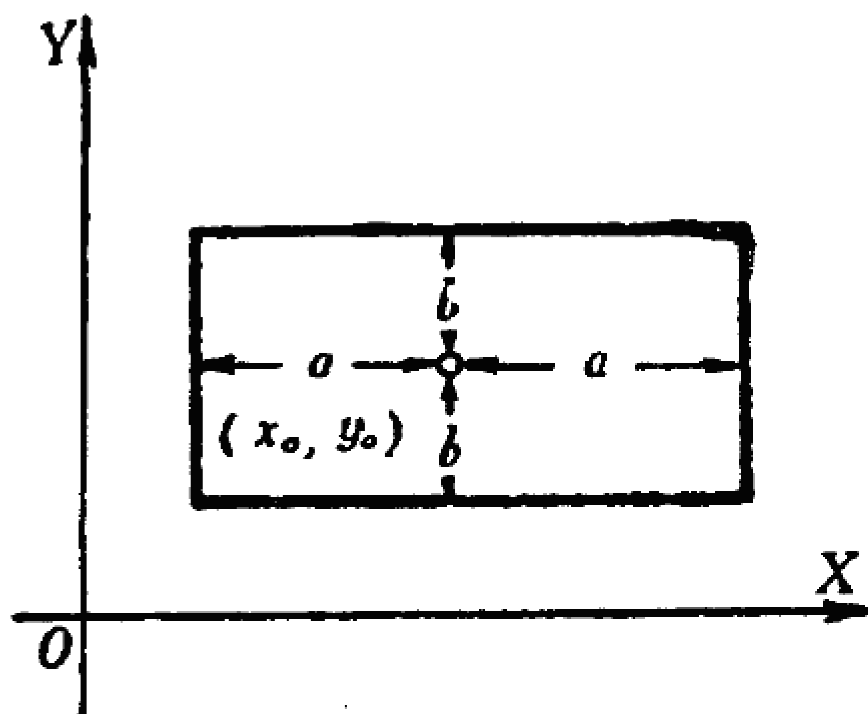


圖 27.

其中 k 是一個確定的正數。像在線性方程的情形一樣，可以證明，方程(18)具有初始條件(19)時相當於方程：

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ y(t)]\,dt. \tag{22}$$

這裏算作 x 的改變區間不超出區間(x_0-a, x_0+a),而且連續函數 $y(x)$ 的值不超出區間(y_0-b, y_0+b),就是算作具有橫坐標 x 與縱坐標 $y(x)$ 的點屬於矩形 Q。

逐步漸近的計算法將引出類似於公式(4)與(5)的公式:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_0)\,dt;\ldots;\ y_n(x)=y_0+ \\ +\int_{x_0}^{x} f[t,\ y_{n-1}(t)]\,dt. \tag{23}$$

注意條件(21)。若由 Q 中取出橫坐標相同的兩個點(x_1, y_1)與(x_1, y_2),則依照有限改變量公式[I, 63]: 可以寫成:

$$|f(x_1,\ y_2)-f(x_1,\ y_1)|=|y_2-y_1|\left|\left[\frac{\partial f(x_1,\ y)}{\partial y}\right]_{y=y_3}\right|,$$

其中 y_3 在 y_1 與 y_2 之間。這時，條件(21)給出:

$$|f(x_1,\ y_2)-f(x_1,\ y_1)|<k|y_2-y_1|. \tag{24}$$

這個不等式通常叫做黎浦希茲不等式，可用以證明 $y_n(x)$ 的收斂性以及解的唯一性。設 M 是連續函數 $f(x, y)$ 在區間 Q 上的最大絕對值，就是說

$$|f(x, y)|\leqslant M \qquad [(x, y)\text{在 } Q \text{ 上}]. \tag{25}$$

當依照公式(23)實行計算時，需要首先認淸具有橫坐標 x 與縱坐標 $y_n(x)$ 的點不能在由條件(20)所確定的矩形 Q 之外。這裏第一個條

件給出關於 x 的不等式 $|x-x_0|\leqslant a$。第二個條件化爲不等式

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant b. \tag{26}$$

爲要使得對於任何的 n 這個不等式成立，需要使得 x 除適合所給的條件 $|x-x_0|<a$ 外，還要適合條件 $|x-x_0|\leqslant\frac{b}{M}$，於是結果關於 x 得到兩個不等式：

$$|x-x_0|\leqslant a;\ |x-x_0|\leqslant\frac{b}{M}. \tag{27}$$

我們證明，這時所有的近似解滿足不等式(26)。由(23)中第一個方程給出

$$y_1(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_0)\,dt,$$

於是，像以前一樣，根據(25)，得到這個積分的估計值：

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|,$$

由此，根據(27)中第二個條件，$|y_1(x)-y_0|<b$，就是說當 $n=1$ 時，不等式(26)被滿足。此外，當保持條件(27)時，上面的公式所確定的函數 $y_1(x)$ 顯然是連續的。肯定了這些之後，可以由公式(23)當 $n=2$ 時計算 $y_2(x)$：

$$y_2(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f[t,\ y_1(t)]\,dt,$$

由此，像以上一樣，

$$|y_2(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|\leqslant M\frac{b}{M}=b,$$

就是說，當 $n=2$ 時不等式(26)被滿足，顯然，當保持條件(27)時 $y_2(x)$ 是連續函數，以下依此類推。如此我們可以逐步確定出在區間

(x_0-c, x_0+c)上的近似解 $y_n(x)$，其中，根據(27)，c 是 a 與 $\frac{b}{M}$ 這兩個數中之較小的。我們把這個區間記作 I. 所有的 $y_n(x)$ 在 I 上是連續函數，並且在以下的討論中我們總算作 x 屬於 I.

現在我們來求差 $y_n(x)-y_{n-1}(x)$ 的估計值，這裏爲簡單起見，像我們以前做過的一樣，算作 $x-x_0>0$。根據(25)，(23)中第一個方程給出

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant M(x-x_0). \tag{28}$$

取 $n=2$ 時(23)中的第二個方程，逐項減去第一個：

$$y_2(x)-y_1(x)=\int_{x_0}^{x}\{f[t, y_1(t)]-f(t, y_0)\}dt,$$

由此 [I, 95]

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f[t, y_1(t)]-f(t, y_0)|dt,$$

或者，根據(24)：

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}k|y_1(t)-y_0|dt.$$

利用不等式(28)，又得到：

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant kM\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt=kM\left[\frac{(t-x_0)^2}{2!}\right]_{t=x_0}^{t=x},$$

於是結果得到

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant kM\frac{(x-x_0)^2}{2!}. \tag{29}$$

再寫出 $n=2$ 與 $n=3$ 時 (23) 中的兩個公式，逐項相減，就得到：

$$y_3(x)-y_2(x)=\int_{x_0}\{f[t,y_2(t)]-f[t,y_1(t)]\}\,dt.$$

利用不等式(24)與(29),像以上一樣,由此得到:

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant k^2M\frac{(x-x_0)^3}{3!}$$

繼續作下去,就求出一般的不等式:

(30) $$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M}{k}\frac{[k(x-x_0)]^n}{n!}.$$

若右邊的差$(x-x_0)$換成它的絕對值,則對於I中所有的x這不等式是正確的。像以上一樣,由這不等式推知,對x來講,在區間I上$y_n(x)$一致趨向極限函數$y(x)$,這個函數連續而且滿足不等式(26),就是說$|y(x)-y_0|\leqslant b$。由此推知,具有橫坐標x與縱坐標$y(x)$的點屬於矩形Q。根據函數$f(x,y)$的連續性,我們有:

$$\lim_{n\to a}f[t,y_{n-1}(t)]=f[t,y(t)]\qquad(t\text{ 在 }I\text{ 中})。$$

不難看出,對t來講,在區間I上,上式一致趨向極限。實際上,當給定任何一個正數ε時,根據$f(x,y)$在Q上的一致連續性,存在有這樣一個δ,使得當(x',y')與(x'',y'')是Q中任何的點,而且$|x''-x'|<\delta$,$|y''-y'|<\delta$時,$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$。再者,根據$y_{n-1}(t)$一致趨向$y(t)$,存在這樣一個數$N$,適用於$I$中所有的$t$的值,使得當$n>N$而且$t$在$I$中時,$|y(t)-y_{n-1}(t)|<\delta$。由此推出,對於$I$中所有的$t$的值:

$$\text{當 }n>N\text{ 時},\ |f[t,y(t)]-f[t,y_{n-1}(t)]|<\varepsilon,$$

於是證明了一致趨向極限。回到(23)中第二個公式,當n無限增加時,取兩邊的極限。根據$f[t,y_{n-1}(t)]$一致收斂於$f[t,y(t)]$,可以在積分號下取極限,於是對於極限函數得到方程(22)。

剩下要證明唯一性。設方程(22)在某一個不超出區間(x_0-a, x_0+a)的區間(x_0-d, x_0+d)上有兩個解 $y(x)$ 與$Y(x)$，這裏我們可以算作 d 是如此的小，以至於$y(x)$與$Y(x)$不超出區間(y_0-b, y_0+b)。把一個解代入到方程(22)中，然後再代入另一個解，逐項相減，就有：

$$y(x)-Y(x)=\int_{x_0}^{x}\{f[x, y(x)]-f[x, Y(x)]\}dx,$$

由此

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f[x, y(x)]-f[x, Y(x)]|dx,$$

於是根據(24)：

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant k\int_{x_0}^{x}|y(x)-Y(x)|dx.$$

取長度爲 l_1 的區間，使得 $kl_1=\theta$ 小於一，像以前一樣，可以證明 $y(x)$ 與 $Y(x)$ 相同。於是，在對於 $f(x, y)$ 所作的假定下，方程(18)具有初始條件(19)時有確定的解它存在於區間(x_0-c, x_0+c)上，其中 c 是 a 與 $\frac{b}{M}$ 兩個數中較小的數，並且這個解可以由逐步漸近法求得。注意，在非線性方程的討論中，比起線性方程組的情形來，確定 x 的改變區間是比較複雜的，在線性方程組的情形，這個區間與係數保持連續的區間重合。我們就下面的例題仔細闡明這個問題。

例 考慮方程

$$y'=x+y^2 \tag{31}$$

具有初始條件

$$y\big|_{x=0}=0. \tag{32}$$

方程(22)是

$$y(x)=\int_{0}^{x}[t+y^2(t)]dt. \tag{33}$$

在右邊用零來替代 $y(t)$ 以計算第二近似解:

$$y_1(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}.$$

把它代入到(33)的右邊以確定第三近似解:

$$y_2(x)=\int_0^x\left[t+\frac{t^4}{4}\right]dt=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}$$

現在我們來確定 x 的改變區間,在這個區間上我們應用逐步漸近法。在點(0, 0)附近作出的任何矩形上,方程(31)的右邊連續而有對 y 的有界微商,就是說,出現在條件(20)中的數 a 與 b, 我們可以任意取。這時 $M=\max|x+y^2|=a+b^2$, 於是確定要求的 x 的改變區間的不等式是:

$$|x|\leqslant a;\quad |x|\leqslant\frac{b}{a+b^2}.$$

若 b 取得逼近於零或是很大,則第二個不等式給出很狹的 x 的改變區間。若 a 取得很大也是如此。不過當 a 很小時第一個不等式給出很狹的區間。如此,縱然當 x 與 y 取有限值時方程(31)的右邊沒有任何的奇異性,我們也不能很好的得到 x 的隨意多大的區間。

52. 一級微分方程的奇異點 若方程

$$y'=f(x,y)\tag{34}$$

的右邊在點 (x_0, y_0) 及其近傍是連續函數而有對 y 的有界微商,則依照存在與唯一定理,通過這個點 (x_0, y_0) 必有一條而且僅有一條積分曲線。若函數 $f(x, y)$ 在某一點不滿足所述的條件,則這樣的點我們叫做方程(34)的**奇異點**。一般說來,在這樣的點存在與唯一定理不成立。

把方程(34)寫成含有微分的形式:

$$\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)},\tag{35}$$

為簡單起見,設 $P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$ 是 x 與 y 的多項式。若 $P(x_0,y_0)\neq 0$, 則方程(35)可以寫成:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

只要適合所述的條件，這裏所寫的方程的右邊在點(x_0, y_0)及其近傍就是連續函數，而且有對 y 的有界微商，它由普通的求商的微商的法則確定。所以，若 $P(x_0, y_0)\neq 0$，則滿足存在與唯一定理的條件，於是通過這個點必有一條而且僅有一條方程(35)的積分曲線。若$P(x_0, y_0)=0$，但是 $Q(x_0, y_0)\neq 0$，則方程(35)可以寫成下面的形狀：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

取 x 作爲 y 的函數。右邊的分母在點(x_0, y_0)不等於零，於是像以上一樣，對於點(x_0, y_0)可以應用存在與唯一定理。如此方程(35)的奇異點是那樣的點，在這些點 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 一齊等於零，就是說，這些點的坐標可以由方程組

$$P(x, y)=0;\quad Q(x, y)=0 \tag{36}$$

的實數解得來。

以上所述也適用於 $P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$ 是展開爲$(x-x_0)$與$(y-y_0)$的正整冪級數的情形。若至少有一個級數的自由項不是零，則對於點(x_0, y_0)可以應用存在與唯一定理。在相反的情形下，這個點是方程的奇異點。

在流體穩定流動的例中我們提到過奇異點的概念[12]。設 $P(x,y)$ 與 $Q(x, y)$ 是速度向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 在坐標軸上的投影。表達切線與速度向量平行的條件的方程 (35) 就是流線的微分方程。若在某一點向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 不是零，則在這一點向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 的投影 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 中至少有一個不等於零，於是依照存在與唯一定理，通過這個點必有一條且僅有一條流線。向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 等於零的點，就是使得等式(36)

成立的點，是方程(35)的奇異點，叫做所考慮的流動的臨界點。在這樣的點，情況仍是不同的：流線可能相交，可能漸近於這點，或者是圍繞着它的封閉曲線。如此奇異點可能有各種的特徵，爲要研究運動(方程的積分曲線)，確定奇異點的特徵是很重要的。在下一段中，我們就特例來解答這個問題。

53. **流體的平面共線性運動的流線** 我們考慮一種特殊情形，就是速度的投影 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 是一次多項式的情形：

$$P(x, y)=a_{11}x+a_{12}y+b_1;\quad Q(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+b_2,$$

在這情形下，流體的運動叫**共線性**的。

先設直線

$$a_{11}x+a_{12}y+b_1=0 \text{ 與 } a_{21}x+a_{22}y+b_2=0 \tag{37}$$

不平行。把它們的交點移作坐標原點；於是自由項 b_1 與 b_2 化爲零。方程就有下面的形狀：

$$\frac{dx}{a_{11}x+a_{12}y}=\frac{dy}{a_{21}x+a_{22}y}, \tag{38}$$

對於這個方程來講坐標原點顯然是個奇異點。我們講如何可以依照係數 a_{ik} 來判斷這個奇異點的特徵。

不難看出，方程(38)是個齊次方程，於是可以用 [3] 中所講的方法來求積分。不過我們應用另一個方法，就是引用新的變量 ξ 與 η，先把方程(38)化爲便於直接討論的形狀。

設

$$\xi=m_1x+n_1y;\quad \eta=m_2x+n_2y, \tag{39}$$

由此

$$d\xi=m_1dx+n_1dy;\quad d\eta=m_2dx+n_2dy.$$

由方程(38)，按照比例法得到：

$$(40)\qquad \frac{d\xi}{m_1(a_{11}x+a_{12}y)+n_1(a_{21}x+a_{22}y)}=$$

$$=\frac{d\eta}{m_2(a_{11}x+a_{12}y)+n_2(a_{21}x+a_{22}y)}$$

現在來確定公式(39)中的係數，使得所寫的分式的分母對應的與 ξ 及 η 成比例。對於第一個分母就有

$$m_1(a_{11}x+a_{12}y)+n_1(a_{21}x+a_{22}y)=\rho(m_1x+n_1y),$$

由此，比較 x 以及 y 的係數，就得到用以確定 m_1 與 n_1 的齊次方程組:

$$(41_1)\qquad \begin{cases}(a_{11}-\rho)m_1+a_{21}n_1=0\\ a_{12}m_1+(a_{22}-\rho)n_1=0.\end{cases}$$

同樣，讓第二個分母等於 $\rho\eta$，就得到確定 m_2 與 n_2 的方程組:

$$(41_2)\qquad \begin{cases}(a_{12}-\rho)m_2+a_{21}n_2=0\\ a_{12}m_2+(a_{22}-\rho)n_2=0,\end{cases}$$

其中比例係數 ρ 具有另一個值。

值 $m=n=0$ 對於我們不適用，因為這時變量的變換(39)失去意義。於是我們需要使得方程組 (41_1) 與 (41_2) 有解，而不是所說的 $m=n=0$。不過兩個一次齊次方程

$$\alpha_1x+\beta_1y=0;\quad \alpha_2x+\beta_2y=0$$

必須且僅須當對應於它們的直線重合時，就是它們的係數成比例時，才有異於 $x=y=0$ 的解。在方程組 (41_1) 與 (41_2) 的情形，這就引出了下面的比例:

$$\frac{a_{11}-\rho}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}-\rho},$$

它給出確定 ρ 的二次方程:

(42) $$\rho^2-(a_{11}+a_{22})\rho+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0.$$

這時，方程組(41_1)以及(41_2)各化爲一個方程，由這兩個方程我們可以確定出異於 $m=n=0$ 的解。

現在我們詳細討論各種可能的情形。

(A)方程(42)有兩個不同的根 ρ_1 與 ρ_2。

把 $\rho=\rho_1$ 代入到方程(41_1)中，$\rho=\rho_2$ 代入到方程(41_2)中，像以上所講過的，確定出公式(39)中的係數後，方程(40)就化爲可分離變量的方程：

(43) $$\frac{d\xi}{\rho_1\xi}=\frac{d\eta}{\rho_2\eta}.$$

現在再把情形(A)分爲幾種特殊情形來討論。

1) **方程(42)的根 ρ_1 與 ρ_2 是實根而且同號。**求方程(43)的積分，就得到：

$$\lg \xi^{\rho_2}=\lg \eta^{\rho_1}+\lg C_1,$$

其中我們用 $\lg C_1$ 記任意常數。

於是推出

$$\xi^{\rho_2}=C_1\eta^{\rho_1};\qquad \xi=C\eta^{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\qquad\qquad (C=C_1^{\frac{1}{\rho_2}}),$$

或

(44) $$(m_1x+n_1y)=C(m_2x+n_2y)^{\frac{\rho_1}{\rho_2}}.$$

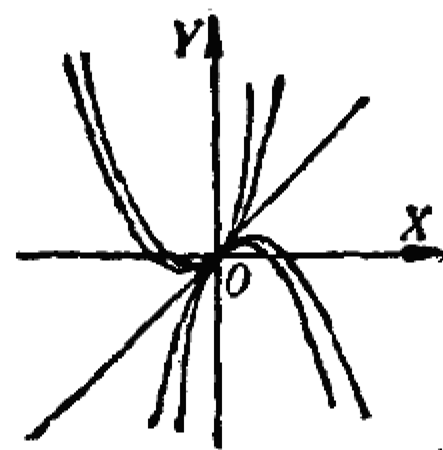


圖 28

在所考慮的情形下，商$\frac{\rho_1}{\rho_2}$是正數，於是推知，當C取任何值時，$x=y=0$ 滿足方程(44)，就是說，任何流線（積分曲線）穿過這奇異點（圖28）。這樣的奇異點叫做節點。

2) ρ_1 與 ρ_2 **是實根而異號。** 在這情形下，分數$\frac{\rho_1}{\rho_2}$是負的。把它記作$(-\mu)$，其中 μ 是正數，可以把一般積分(44)寫成下面的形狀：

(45) $$(m_1x+n_1y)(m_2x+n_2y)^{\mu}=C \qquad (\mu>0).$$

代入 $x=y=0$，得到 $C=0$，就是說通過坐標原點的流線具有方程

$$(m_1x+n_1y)(m_2x+n_2y)^{\mu}=0,$$

這個方程對應於兩條直線：

(46) $$m_1x+n_1y=0;$$
$$m_2x+n_2y=0.$$

如此在所考慮的情形下有兩條而且只有兩條流線(積分曲線)通過這奇異點。這樣的奇異點叫做**中性點或鞍點**。當 C 取異於零的值時，曲線(45)有些像雙曲線（當 $\mu=1$ 時，就是雙曲線），直線 (46) 是它們的漸近線（圖 29)。

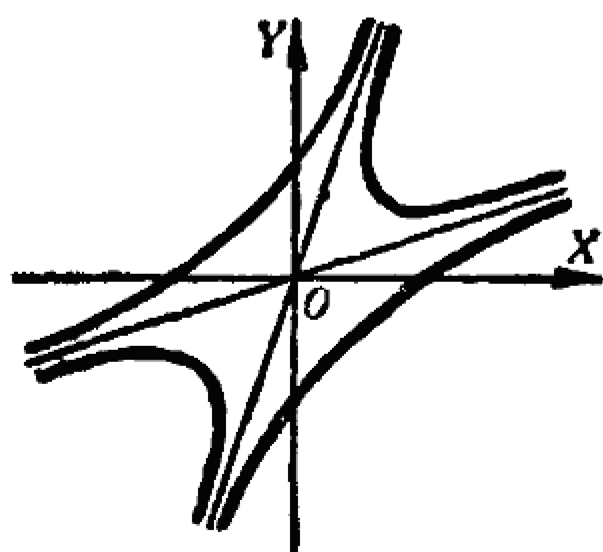


圖 29

3) ρ_1 與 ρ_2 **是共軛虛根而實部異於零：**

$$\rho_1=\alpha+\beta i;\quad \rho_2=\alpha-\beta i; \qquad (\alpha \text{ 與 } \beta\neq0).$$

在方程組(41_1)與(41_2)的係數中分別代入以 ρ 的共軛值，得到的方程組的對應係數就是共軛數。所以，隨意取一個方程的解 m_1 與 n_1，用$(-i)$來替代其中的 i，就得到第二個方程組的解 m_2 與 n_2。根據公式(39)，由此推知，ξ 與 η 也可以算作是共軛的：

$$\xi=\xi_1+\eta_1 i;\quad \eta=\xi_1-\eta_1 i,$$

其中 ξ_1 與 η_1 是下面形狀的 x 與 y 的實多項式：

(47) $$\xi_1=p_1x+q_1y;\quad \eta_1=p_2x+q_2y.$$

方程(43)就是：

$$\frac{d\xi_1+id\eta_1}{(\alpha+\beta i)(\xi_1+\eta_1 i)}=\frac{d\xi_1-id\eta_1}{(\alpha-\beta i)(\xi_1-\eta_1 i)}$$

或

$$\frac{d\xi_1+id\eta_1}{(\alpha\xi_1-\beta\eta_1)+(\beta\xi_1+\alpha\eta_1)i}=\frac{d\xi_1-id\eta_1}{(\alpha\xi_1-\beta\eta_1)-(\beta\xi_1+\alpha\eta_1)i}.$$

考慮前後項的和與差的比，依照比例的性質，可以求得：

$$\frac{d\xi_1}{\alpha\xi_1-\beta\eta_1}=\frac{d\eta_1}{\beta\xi_1+\alpha\eta_1}$$

由此

$$\xi_1 d\xi_1+\eta_1 d\eta_1=\frac{\alpha}{\beta}(\xi_1 d\eta_1-\eta_1 d\xi_1).$$

或

$$\frac{\xi_1 d\xi_1+\eta_1 d\eta_1}{\xi_1^2+\eta_1^2}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{1+\frac{\eta_1^2}{\xi_1^2}}\frac{\xi_1 d\eta_1-\eta_1 d\xi_1}{\xi_1^2}$$

讓

$$u=\xi_1^2+\eta_1^2;\quad v=\frac{\eta_1}{\xi_1},$$

就有

$$\frac{du}{2u}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{dv}{1+v^2};\quad \frac{1}{2}\lg u=\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg} v+\lg C,$$

於是推知，一般積分是

$$\lg\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}=\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta_1}{\xi_1}+\lg C \tag{48}$$

或

$$\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}=C\,e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta_1}{\xi_1}}.$$

在平面(ξ_1,η_1)上引用極坐標 $\xi_1=r\cos\theta$；$\eta_1=r\sin\theta$，就得到：

$$r=Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\theta},$$

就是說，在坐標系$(\xi_1,\ \eta_1)$中，流線是對數螺線，在同一方向環繞着坐標原點 [I,83]。由於$(x,\ y)$與$(\xi_1,\ \eta_1)$由變換(47)所連繫，在原始坐標系$(x,\ y)$中，流線就是類似形狀的螺線。如此，在所考慮的情形下，沒有一條流線(積分曲線)通過這奇異點，而且任何流線都環繞着它而漸近於它(圖30)。這樣的奇異點叫做**焦點**。

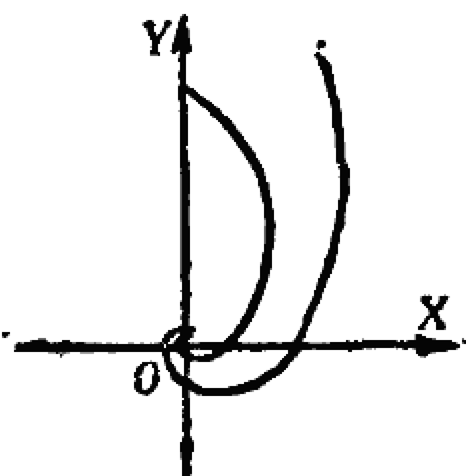


圖 30

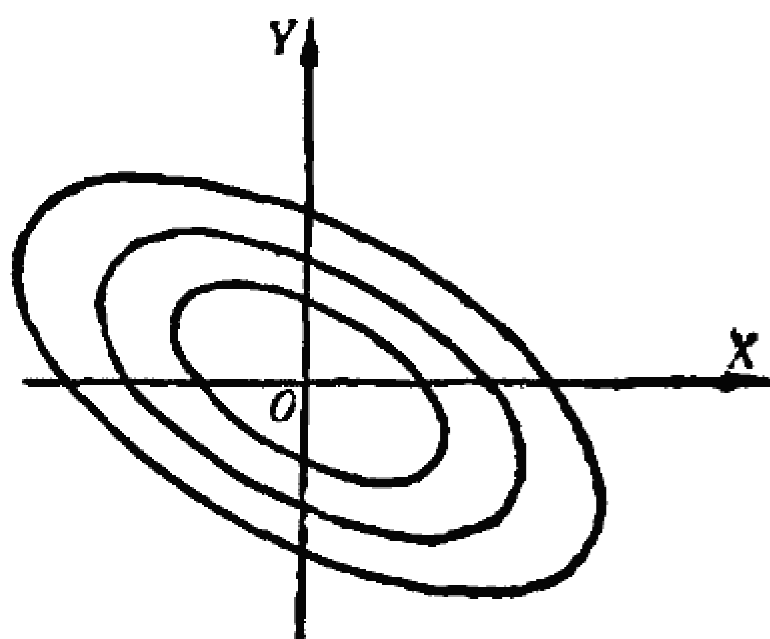


圖 31

4) ρ_1 **與** ρ_2 **是純虛根**$(\pm\beta i)$。在公式(48)中讓 $\alpha=0$, 得到

$$\xi_1^2+\eta_1^2=C^2, \tag{49}$$

或在原始坐標系

$$(p_1x+q_1y)^2+(p_2x+q_2y)^2=C^2. \tag{50}$$

替代了圓周(49)我們得到相似的橢圓。如此，在這情形下，沒有一條流線(積分曲線)通過這奇異點，不過與前一種情形不同，在這種情形下奇異點被封閉的流線圈着(圖31)，而不是被螺線捲着。這樣的奇異點叫做**中心**。

(*B*)**方程(42)有異於零的重根** $\rho_1=\rho_2$。當把 $\rho=\rho_1$ 代入到方程組(41_1)與(41_2)時，可能遇到兩種情形：或者所有的係數都成爲零，或者

係數中至少有一個不等於零。先考慮第一種情形：

$$a_{12}=a_{21}=0;\ a_{11}=a_{22}=\rho_1, \tag{51}$$

這時方程(38)具有下面的形狀：

$$\frac{dx}{\rho_1 x}=\frac{dy}{\rho_1 y}\ \text{或}\ \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

於是它的一般積分 $y=Cx$ 是通過原點的直線族，就是說，坐標原點是節點。

5）係數

$$a_{12},\ a_{21},\ a_{11}-\rho_1,\ a_{22}-\rho_1$$

中至少有一個不等於零。不難看出，這時 a_{12} 與 a_{21} 不能都等於零。實際上，若 $a_{12}=a_{21}=0$, 注意 ρ_1 是方程(42)的重根，就要得到 $a_{11}=a_{22}=\rho_1$. 在所作的假設下，方程(42)成爲方程 $\rho^2-(a_{11}+a_{22})\rho+a_{11}a_{22}=0$，由方程(42)的根是重根這條件給出 $a_{11}=a_{22}$，於是 a_{11} 與 a_{22} 的共通值就是這方程的重根。於是若假設 $a_{12}=a_{21}=0$，則滿足條件(51)，這與我們所作的假定相違。所以必須係數 a_{12} 與 a_{21} 中有一個不等於零。例如，設 $a_{21}\neq 0$。方程(42)的重根顯然就是

$$\rho_1=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$$

於是像我們以前講過的，當代入以 $\rho=\rho_1$ 時，方程組(41)應當化爲一個方程：

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2}m_1+a_{21}n_1=0.$$

取 $m_1=a_{21},\ n_1=-\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2}$，就是

$$(52)\qquad \xi=a_{21}x-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}y,$$

第二個變量 y 保留以前的不動。微分方程就可以寫成下面的形狀:

$$\frac{d\xi}{\rho_1\xi}=\frac{dy}{a_{21}x+a_{22}y}$$

或者,用由公式(52)所確定的 x 的表達式來替代 x:

$$\frac{d\xi}{\rho_1\xi}=\frac{dy}{\xi+\rho_1 y}.$$

引用新的變量 t 以替代 y

$$y=t\xi,$$

把方程化為

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{d\xi}{\xi}=dt,$$

求積分,得到一般積分

$$y=\frac{\xi}{\rho_1}\lg(C\xi).$$

ξ 與 C 的符號應當相同,而且當 $\xi\to 0$ 時顯然 $y\to 0$, 同時

$$y'=\frac{1}{\rho_1}[1+\lg(C\xi)]\to\infty,$$

就是說,在坐標系 (ξ, y) 中,積分曲線穿過坐標原點而與 OY 軸相切(圖32),於是,坐標原點是節點。

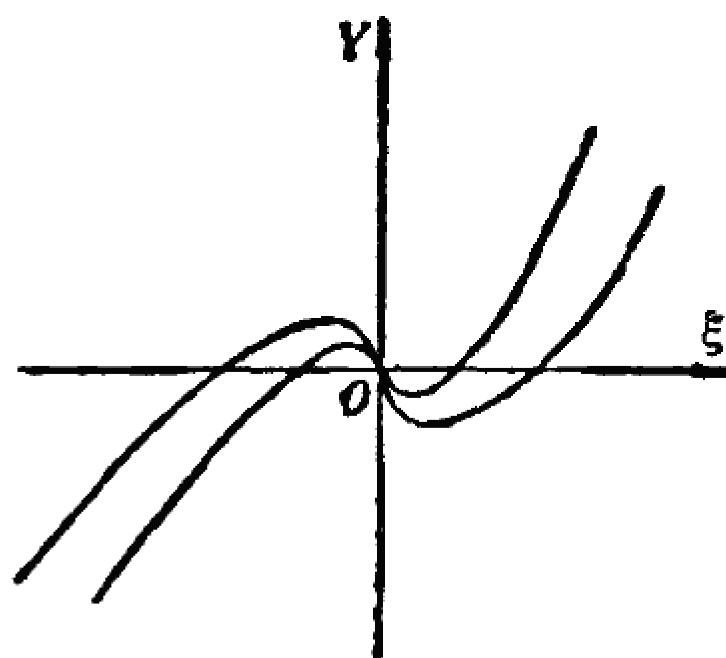


圖　32

當把方程 (35) 變換到 (38) 的形狀時,重要的是假定了直線(37)不平行。若它們平行,則它們的左邊不能同時等於零,就是說,速度向量在任何一點都不等於零,於是流線的微

分方程

$$\frac{dx}{a_{11}x+a_{12}y+b_1}=\frac{dy}{a_{21}x+a_{22}y+b_2}$$

沒有奇異點，所以通過平面上任何一點必有一條且僅有一條流線。

比較共線性運動更普遍的在坐標原點有奇異點的方程是

$$\text{(53)}\qquad \frac{dx}{a_{11}x+a_{12}y+b_1x^2+c_1xy+\cdots}=\frac{dy}{a_{21}x+a_{22}y+b_2x^2+c_2xy+\cdots},$$

這裏分母中含有關於 x 與 y 的高於一次的項。除去例外情形，求這樣的方程的積分不能化爲普通積分，不過在某些情形下，可以由方程(53)中分母中的一次項的係數來確定奇異點的特徵，完全不必求這個方程的積分。大概的說，可以這樣考慮：當 x 與 y 的絕對值很小時，就是說在坐標原點的近傍時，方程(53)的分母中的高次項與一次項比較起來是很小的，於是可以這樣想，在坐標原點附近，積分曲線的分佈，無論它是怎麼樣的，要近似於在分母中只保留一次項時所應有的情形。若是這樣，則對於方程(53)，我們會遇到以上對於共線性運動所有的同樣類型的奇異點。除去某些例外，事實上確是這樣的。我們只把最後的結果敍述如下，不給證明：

1）若二次方程(42)的根是不同的實根而且同號，則方程(53)的奇異點是節點。這指明，任何一條足够逼近於奇異點的積分曲線通過這個點。

2）若方程(42)的根是實根而異號，則奇異點是鞍點，就是說有兩條積分曲線通過這點。

3）若方程(42)的根是複根而實部不等於零，則奇異點是焦點。

4）若方程(42)的根是純虛根，則奇異點是焦點或中心。

第三章　重積分、曲線積分、反常積分及、依賴於參變量的積分

§1　重　積　分

54.容積　到現在為止我們考慮過定積分

$$\int_a^b f(x)dx,$$

它是作為和的極限的，並且是對於 $f(x)$ 確定在 OX 軸的一個線段 (a, b) 上的情形考慮的。換句話說，積分區域總是某一個直線段。

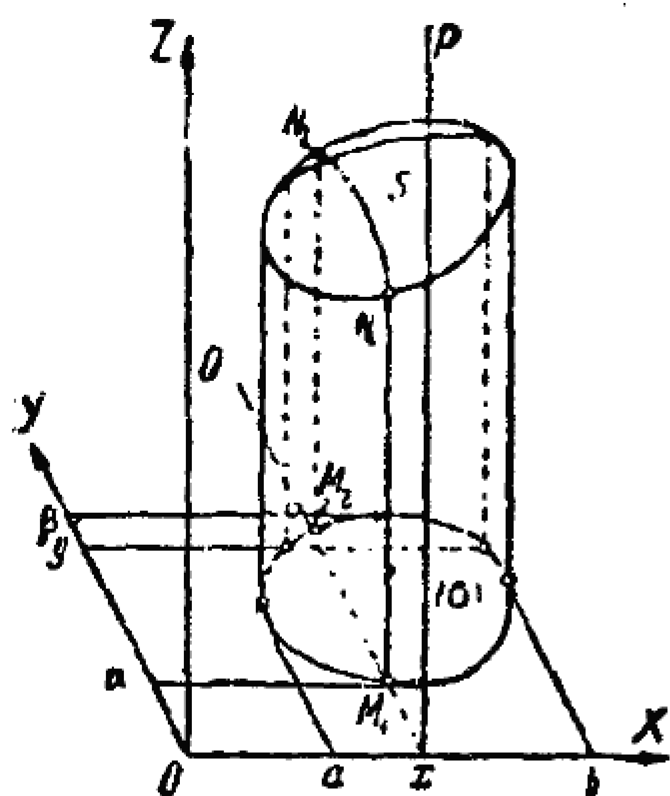


圖 35

在這一節中我們推廣積分的概念，以至於積分區域是平面上某一個區域，或是空間中某一個區域，或者甚至於是任何曲面上的某一個區域。在這一節的討論中，我們利用面積與容積的直覺表示法，而不管連繫於取極限的一些理由。在本章的最末一節我們再講嚴格討論的基本關鍵。我們由兩次積分的概念開始，它連繫着計算容積的問題，就像上面寫的積分連繫着計算面積的問題一樣，所以，在引進兩次積分的概念之前，我們先看計算容積的問題。

我們知道，計算界於曲線 $y=f(x)$，OX 軸以及兩個縱坐標：$x=a$，$x=b$ 之間的面積問題，是利用定積分的概念解決的，就是說，面積可以用上面寫的定積分來表達[1, 87]。

現在我們來看一個類似的問題，就是計算物體的容積 v，這物體的界面是：已知的曲面 (S)，它的方程是

(1) $$z=f(x,y),$$

平面 XOY，以及一個柱面 (C)。這個柱面的母線平行於 OZ 軸，它把 (S) 投影到平面 XOY 的區域 (σ) 上（圖33）。

在 [I, 104] 中我們講過用定積分計算物體的容積，只是需要知道物體的平行斷面；對於現在的問題我們也應用這個方法。

爲簡單起見，我們設曲面 (S) 整個出現在平面 XOY 之上，並且平行於坐標軸的直線與 (σ) 的界線 (l) 相交時至多交於兩點。

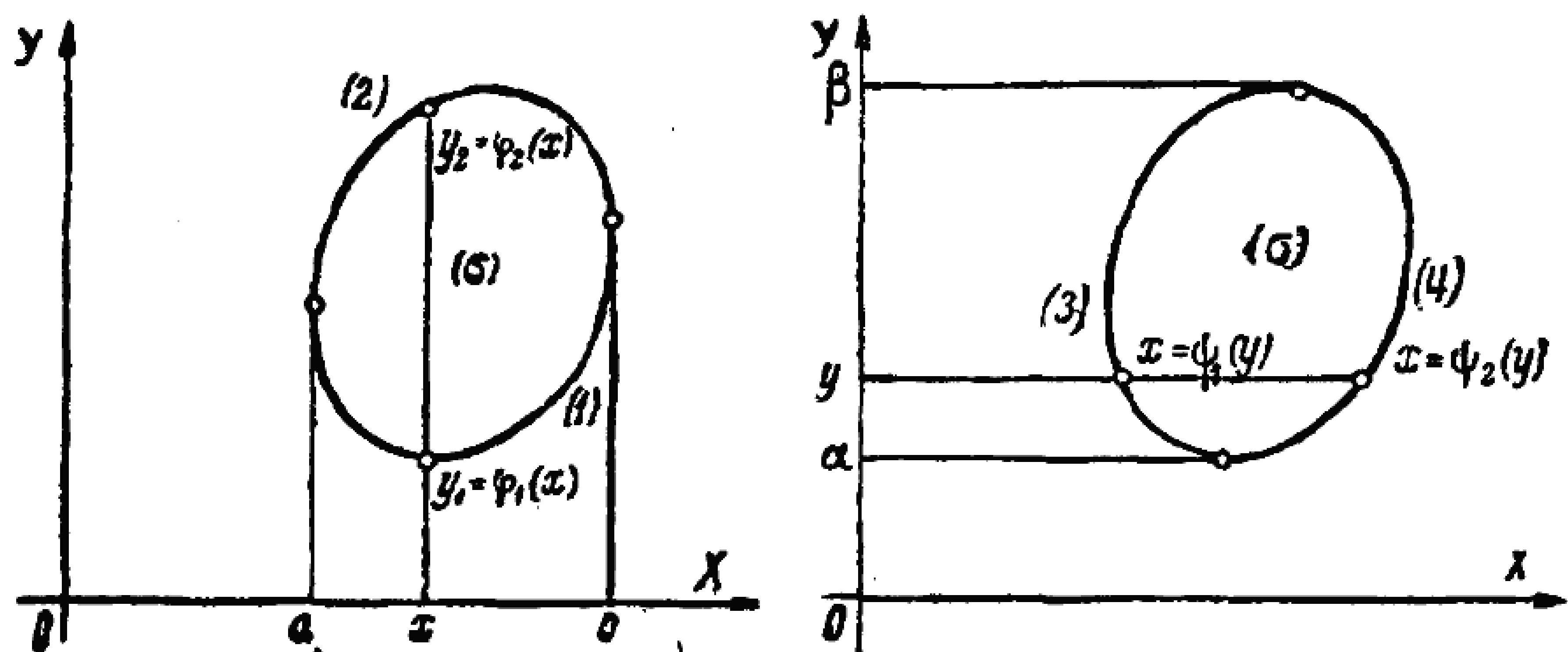


圖 34

用平行於平面 YOZ 的平面把所考慮的物體分開，這些平面與平面 XOY 的交線是平行於 OY 軸的直線（圖 33 與 34）。把兩個極端斷面的橫坐標各記作 a 與 b。這也就是把界線 (l) 分爲兩部 (1) 與 (2) 的界線上的點的橫坐標，這兩部分 (1) 與 (2) 中，一個是平行於 OY 軸的直線穿入區域 (σ) 的位置，一個是穿出的位置（圖 34）。每一部分各有它的方程

(2) $$y_1=\varphi_1(x);\quad y_2=\varphi_2(x).$$

與 YOZ 距離爲 x 的平面 PQ 在物體上截下的斷面的面積依賴於 x，我們把它記作 $S(x)$。於是就有 [I, 104]

$$v=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{3}$$

剩下要求函數 $S(x)$ 的表達式，這是圖形 $M_1N_1N_2M_2$ 的面積；它位於平面 PQ 上，它的界線是：平面 PQ 與曲面 (S) 相交的曲線 N_1N_2、平行於 OY 軸的直線 M_1M_2 以及兩個縱標 M_1N_1 與 M_2N_2。

由於在所考慮的斷面上的所有的點的 x 是常數，曲線 N_1N_2 的縱標可以算作是 y 的函數，這個函數是當 x 是常數時由下面這方程確定的

$$z=f(x,y),$$

這時自變量 y 取在區間 (y_1, y_2) 上，其中 y_1 與 y_2 是直線 M_1M_2 穿入區域 (σ) 與穿出這個區域的點的縱坐標。

根據 [I, 87] 可以寫成：

$$S(x)=\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy;$$

代入到 (3) 中就有：

$$v=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy. \tag{4}$$

如此我們得到容積的一個表達式，它寫成**兩次積分**的形狀，這裏先把 x 看作常數，對 y 求出積分，然後把所得到的結果對 x 求積分。

用平行於平面 XOZ 的平面分割所給的物體，對於相同的容積我們得到另一個表達式：

(5) $$v=\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx,$$

其中 x_1 與 x_2 是 y 的已知函數：

(6) $$x_1=\psi_1(y);\quad x_2=\psi_2(y),$$

而 α 與 β 各記在界線 (l) 上的 y 的兩個極端值（圖33與34）。

公式(4)與(5)是在兩個假定下推出的：1)曲面(S)整個位於平面 XOY 之上，2)曲面(S)在平面 XOY 上的投影(σ)的界線(l)與平行於一個坐標軸的任何直線最多交於兩點。若不滿足條件1，則公式(4)與(5)的右邊所給出的不是眞正的容積，而是容積的代數和，其中位於平面 XOY 之上的容積帶(+)號，位於其下的帶(−)號。若不滿足條件2，例如(圖35)，界線(l)與直線 $x=$ 常數的交點有幾對，則需要把區域(σ)分爲幾部分，使得每一部分滿足條件2，與這對應的，曲面(S)與容積 v 也就被分爲幾部分，計算每一部分的容積時公式(4)是適用的。

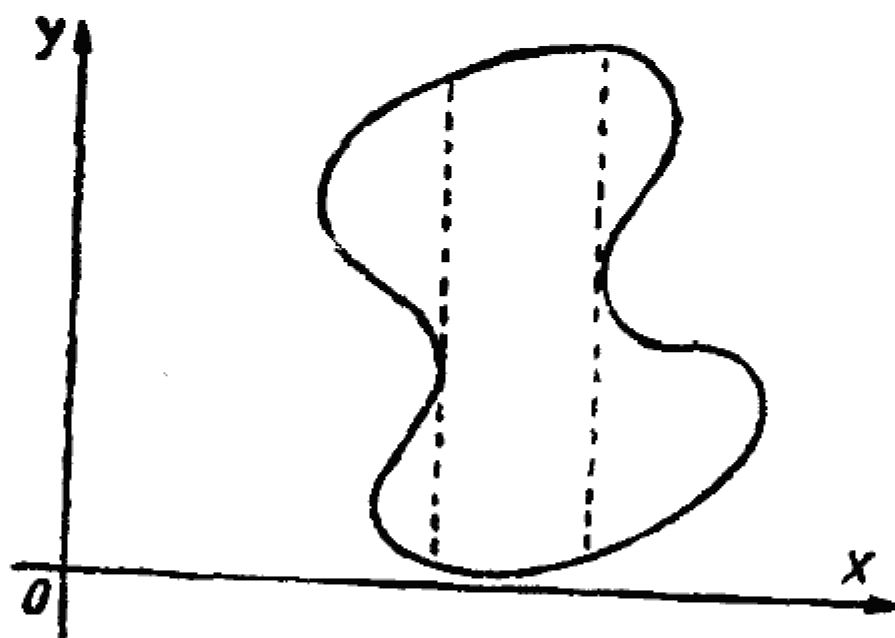


圖 35

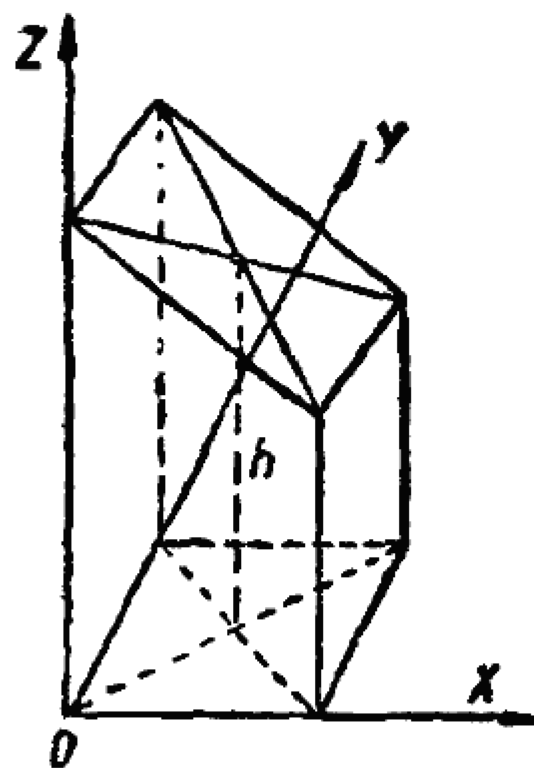


圖 36

例 1．正稜柱的截斷的容積(圖36)。底是由坐標軸 OX，OY 與直線 $x=k$，$y=l$ 形成的。截面的方程是

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\nu}=1.$$

在這情形下公式(4)給出：

$$v=\int_0^k dx\int_0^l z dy=\int_0^k dx\int_0^l \nu\left(1-\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\mu}\right)dy=\nu\int_0^k dx\left(y-\frac{xy}{\lambda}-\frac{y^2}{2\mu}\right)\Big|_{y=0}^{y=l}=$$

$$=\nu\int_0^k\left(l-\frac{xl}{\lambda}-\frac{l^2}{2\mu}\right)dx=\nu\left(kl-\frac{k^2l}{2\lambda}-\frac{kl^2}{2\mu}\right)=kl\cdot\nu\left(1-\frac{k}{2\lambda}-\frac{l}{2\mu}\right)=\sigma h,$$

其中 σ 是底面積，h 是上截面的對角線交點（對應於 $x=\frac{k}{2}$，$y=\frac{l}{2}$）的縱標。

2．求橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的容積。用平面 $z=$ 常數截這橢圓體時，得到橢圓，具有半軸長

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

於是利用

$$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

求得未知容積是

$$v=\int_{-c}^{+c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc.$$

55．二重積分　為要得到曲線 $y=f(x)$ 下的面積的近似表示法，我們[1，87]把它分為豎條，並且用一些矩形來替代每一個豎條的面積，這些矩形的底各是每一個豎條的底，而高等於這個豎條上曲線的

縱坐標的某一個中間值。當豎條的數目增加而每一個都趨向零時，差誤→0，於是近似公式的極限就成爲給出面積的準確表達式的定積分。

計算容積時可以用類似的作法。把區域 (σ)（圖 37）分成很多個任意形狀的小單元 $\Delta\sigma$，這裏我們一方面用 $\Delta\sigma$ 記這些個小區域，另一方面也用 $\Delta\sigma$ 記它們的面積。以每一個這樣的單元作底作一個柱體直到與曲面 (S) 相交，就把容積 v 分爲單元容積。顯然，我們可以取柱體的容積作爲單元容積的近似值，這個柱體的底也是 $\Delta\sigma$，而高是一個縱標，就是投影爲 $\Delta\sigma$ 的曲面單元上任何點的 z 的值。換句話說，在 $\Delta\sigma$ 上取任何一點 N，爲簡短起見，把對應於點 N 的曲面 (S) 上的點 M 的縱標記作 $f(N)$，也就是函數 $f(x, y)$ 在這點的值，對於單元容積我們就有 $f(N)\Delta\sigma$，於是

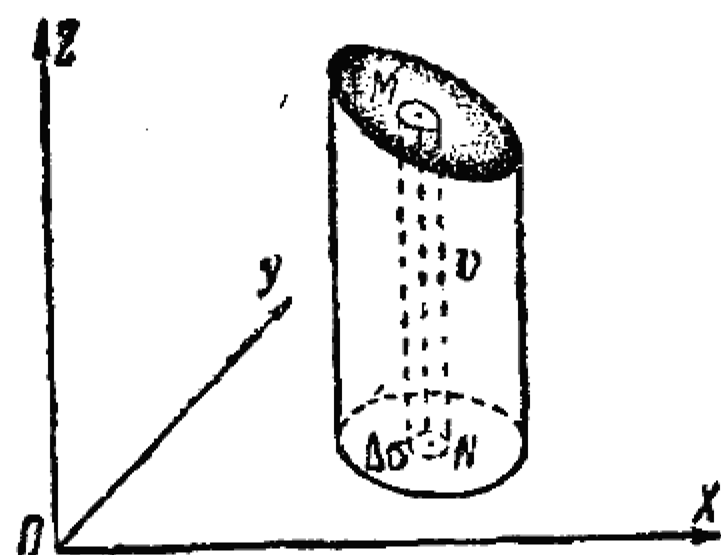


圖 37

$$v \sim \sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma,$$

這裏要對於填滿面積 σ 的所有的單元面積求和。

每一個單元 $\Delta\sigma$ 愈小，而且單元的數目 n 愈多時，所得到的近似公式就愈準確，取極限可以寫成：

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma = v.$$

抽去幾何的表示，不管函數 $f(N)$ 的幾何意義我們還是可以確定這個和的極限，這個極限叫做函數 $f(N)$ 沿區域 (σ) 的二重積分，並且表示成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma.$$

這個極限的存在性是很明顯的，因爲像我們以上所講的，這個極限應當給出以上我們所作的容積 v。自然這個理由不是嚴格的，不過，具有一般條件的 $f(N)$ 以及所有的連續函數的任何情形，上述極限的存在性可以嚴格的證明。

若我們設 $f(N)=1$，則得到區域 (σ) 的面積 σ 的一個表達式，而是二重積分的形狀：

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma.$$

我們來敍述二重積分的完全定義：設 (σ) 是一個有界的平面區域，$f(N)$ 是這個區域上的點的函數，就是說，在區域 σ 的每一點 N 這函數取確定的值。把區域 (σ) 分爲 n 個部分區域，並設 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$ 是這些部分的面積，而 $N_1, N_2, \cdots N_n$ 各爲這些部分上任何一點。作出乘積的和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k).\,\Delta\sigma_k.$$

當分成的數目 n 無限增加並且每一個部分區域無限減小時，這個和的極限叫做函數 $f(N)$ 沿區域 (σ) 的二重積分

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\sigma_k.$$

附註　設 d_k 是面積爲 $\Delta\sigma_k$ 的部分區域中兩點間的最大距離（這個區域的直徑），而 d_1、d_2，…，d_n 中的最大的數是 d。在定義中所說的每一個部分區域 $\Delta\sigma_k$ 無限減小就具有 $d\to 0$ 的意義。如果用字母 I 來記

積分的大小，則以上所述的定義就相當於：對於給定的任何正數 ε，存在這樣一個正數 η，使得〔參考 1, 87〕只要 $d \leqslant \eta$，則

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\, \Delta\sigma_k \right| \leqslant \varepsilon.$$

在這一章的最後，討論重積分的完整理論時，我們再講面積的嚴格定義，並且更準確的講區域(σ)的概念，沿着這樣的區域就可以求積分，如此我們可以把它分成各部分區域，並且對於連續函數以及某些類的其他函數，來證明上述和的極限的存在性。

56.二重積分的計算法　把二重積分考慮作容積，我們可以把二重積分化爲兩次積分。

對於區域(σ)應用直角坐標，設用邊 Δx, Δy 平行於坐標軸的矩形來分割面積得到單元$\Delta\sigma$（圖 38），並設 (x, y) 是點 N 的坐標。這時可以寫成：

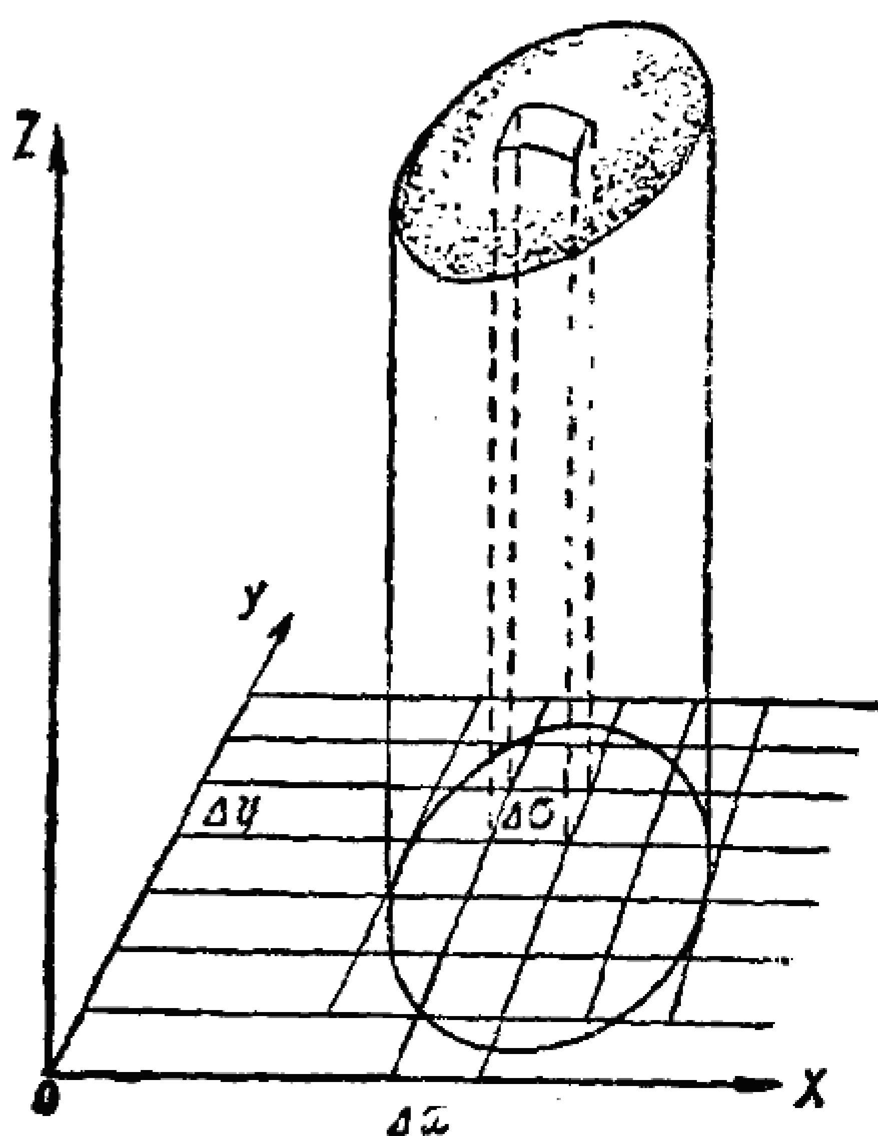


圖 38

$$f(N) = f(x, y), \quad \Delta\sigma = \Delta x \Delta y; \quad d\sigma = dx dy$$

並且

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(x, y)\, \Delta x \Delta y = \iint_{(\sigma)} f(x, y)\, dx dy.$$

另一方面，應用〔54〕中所講的通過兩次積分來計算容積的方法，可以寫成：

$$(7)\quad \iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx,$$

這就給出計算二重積分的法則，而與函數 $f(x, y)$ 的幾何意義無關。

若先對 y 的求積分，則這時 x 算作常數，而積分限 y_1 與 y_2 是 x 的函數，這兩個函數是由 [54] 中公式 (2) 所確定的。若先對 x 求積分，也有類似的情況。只有當積分區域是個矩形而它的邊平行於坐標軸時，在兩次積分中先求的積分的積分限才可能是常數，而不依賴於第二個積分的積分變量。若 (σ) 是界於直線（圖 39）：

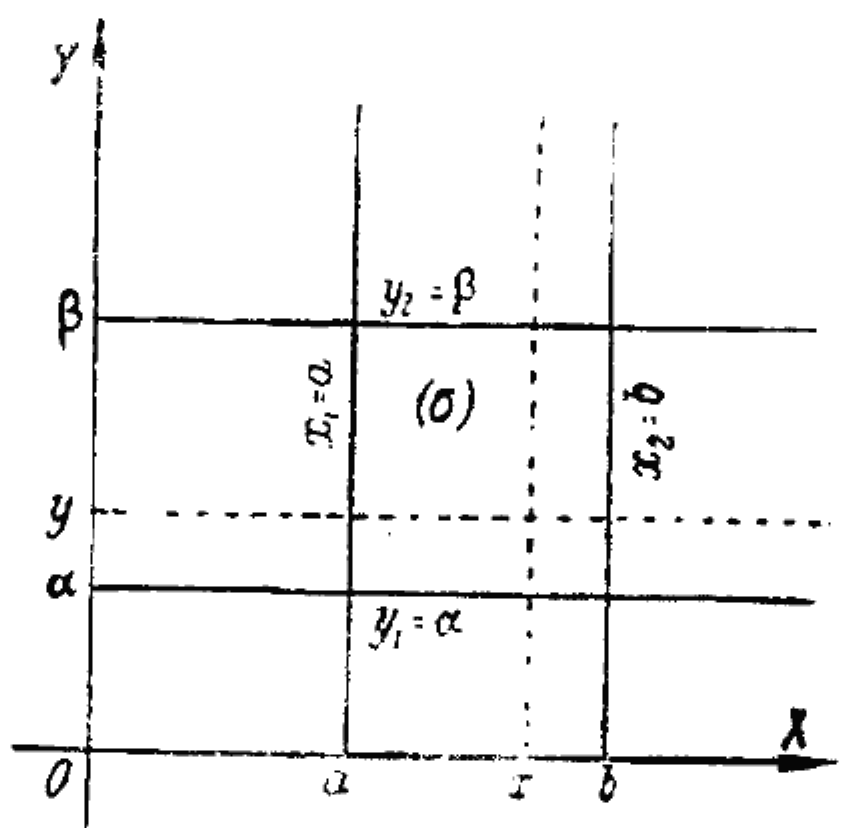


圖 39

$$x=a;\quad x=b;\qquad y=\alpha;\quad y=\beta$$

的矩形區域，則

$$(8)\quad \iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

表達式 $d\sigma = dxdy$ 叫做在直角坐標系中的面積單元。

注意，在公式 (7) 中把 x 看作常數，先對 y 求積分就對應於沿着平行於 OY 軸的一豎條內所含的矩形求和，其中所有的矩形有相同的寬度 dx，它被提出在第一次求積分的記號之外。第二次對 x 求積分對應於把沿平行於 OY 軸各條求和所得的所有結果再相加。在本章最後一節中我們講公式 (8) 與 (7) 的嚴格基礎。

現在我們用極坐標 (r,φ) 來處理區域 (σ)。這時曲面 (S) 的方程應當寫成 $z=f(r,\varphi)$。

由曲線族 $r=$ 常數以及 $\varphi=$ 常數我們得到單元 $\Delta\sigma$，就是同心圓周以及通過原點的半線（圖 40）。半徑為 r 與 $r+\Delta r$ 以及斜角為 φ 與 $\varphi+\Delta\varphi$ 的兩條半線交成的曲線圖形 $\Delta\sigma$ 可以考慮作邊長為 Δr 與 $r\Delta\varphi$ 的矩形，所差的只是高級的無窮小，於是

$$\Delta\sigma=r\Delta r\Delta\varphi,$$

這時可以寫成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(r,\varphi)\,r\Delta r\Delta\varphi=\iint\limits_{(\sigma)} f(r,\varphi)\,rdrd\varphi.$$

這裏我們得到一個二重積分，它的被積函數是 $f(r,\varphi)r$。為要計算它，可以應用化為兩次積分的法則，不過現在只是 r 與 φ 佔有了 x 與 y 的地位。

先對 r 求積分把 φ 算作常數，這對應於沿着界於兩個半線 φ 與 $\varphi+d\varphi$ 之間的單元 $\Delta\sigma$ 求和，$d\varphi$ 被提出在第一次求積分的記號之外。第二次對 φ 求積分對應於把第一次求和所得到的所有結果相加。應用上述法則，我們首先標記出變量 φ 的極端值 α 與 β（對應於 [54] 中 x 的極端值）。以後對於固定的 φ 找出半線 $\varphi=$ 常數穿入與穿出 (σ) 的點的向量半徑 r_1 與 r_2（這對應於在 [54] 中確定 y_1 與 y_2）。確定了這些已知量，就有：

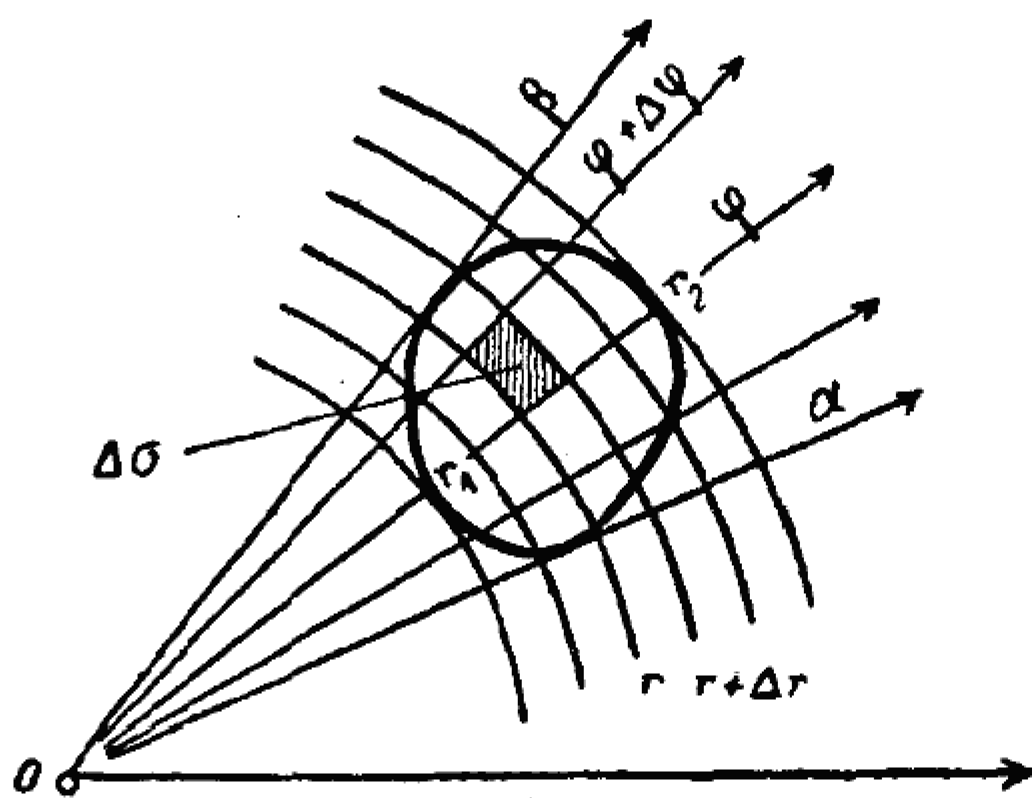


圖 40

$$(9)\qquad \iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(r,\varphi)\,r dr d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi\int_{r_1}^{r_2} f(r,\varphi)\,r dr$$

其中 r_1 與 r_2 是 φ 的已知函數。

圖 40 對應於坐標原點位於界線 (l) 之外的情形。若原點位於界線 (l) 之內，則可以算作 φ 由 0 改變到 2π，並且對於給定的 φ 的值 r 由 0 改變到 r_2，其中 r_2 來自曲線 (l) 的方程：$r_2=\psi(\varphi)$，這就給出（圖 41）：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma=\int_{0}^{2\pi} d\varphi\int_{0}^{r_2} f(r,\varphi)\,r dr.$$

表達式

$$(10)\qquad r dr d\varphi$$

叫做**極坐標系中的面積單元**。

特別是，若 $f(N)=1$，我們就得到在 [I, 102] 中所講的在極坐標中曲線所包的面積的表達式：

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi\int_{r_1}^{r_2} r dr=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2-r_1^2)\,d\varphi.$$

（[I, 102] 中的公式對應於 $r_2=r$，$r_1=0$ 的情形）。

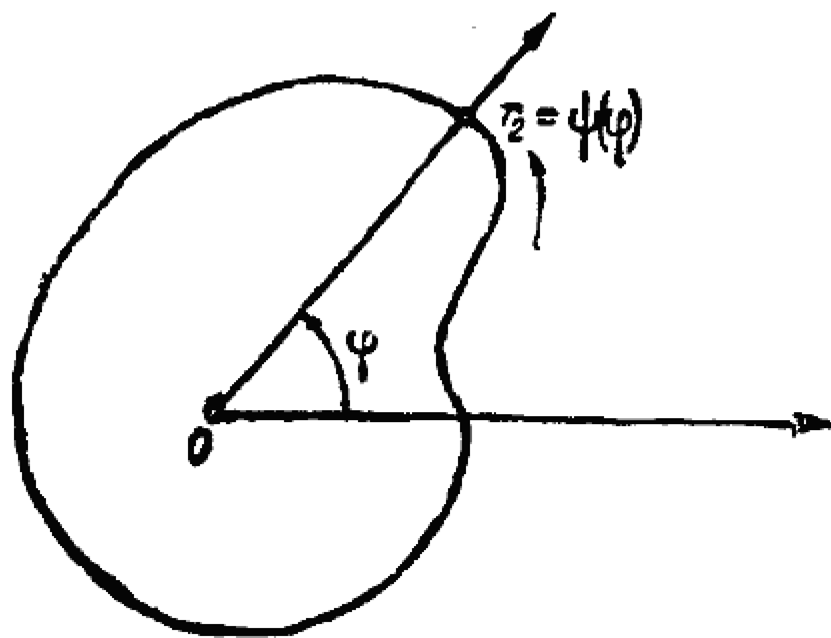


圖 41

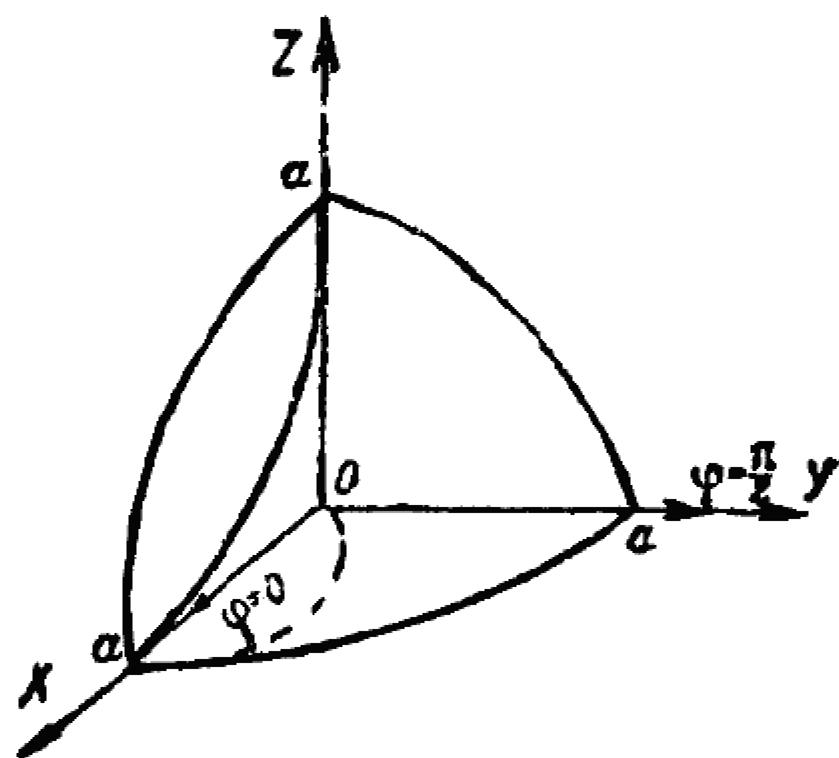


圖 42

例 求界於半徑爲 a 的球與通過球心的底半徑爲 $\frac{a}{2}$ 的正圓柱間的容積（圖42）。取球心作坐標原點，通過球心垂直於圓柱的軸的平面作爲平面 XOY，通過球心以及平面 XOY 與圓柱的軸的交點的直線作爲 OX 軸。根據對稱性，可以說，未知容積是界於平面 ZOX，XOY 以及上半球面之間的一部分圓柱體的容積的四倍。

這裏積分區域是圓柱的半個底，它的界線由半圓周

$$r=a\cos\varphi$$

以及 OX 軸上的線段組成，其中角度 φ 由 0 改變到 $\frac{\pi}{2}$，對應於半線——由 OX 軸到 OY 軸。

球面的方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

在這情形下可以寫成：

$$z^2=a^2-(x^2+y^2), \qquad z=\sqrt{a^2-r^2}.$$

所以，未知容積是：

$$v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}\,a^3\left[\varphi+\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4}{3}\,a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

57. 曲線坐標 在前一段中，我們就直角坐標與極坐標的情形，確定了面積單元，並且考慮了關於積分計算的問題。現在我們對於任何的坐標 (u, v) 來考慮這個問題。依照公式

$$\varphi(x, y)=u; \qquad \psi(x, y)=v. \tag{11}$$

引用任何的新的變量 u 與 v 來替代直角坐標 x 與 y。

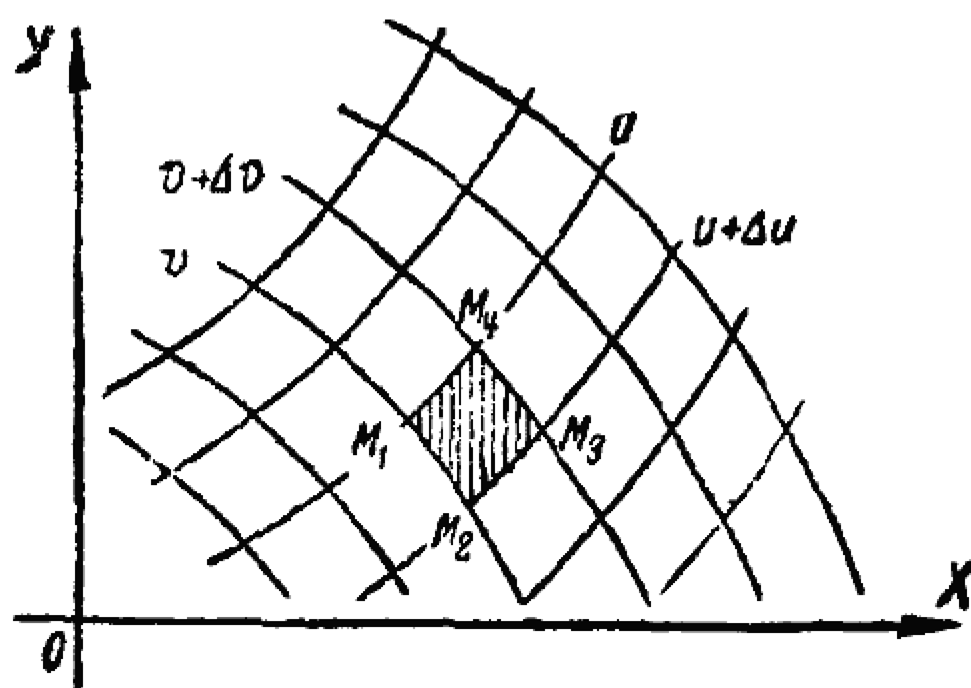


圖 43

給 u 與 v 所有可能的常數值，在平面上就得到兩族線（圖43），一般說來，這些線都是曲線。平面上點M的位置是由一對數(x, y)來確定的，或者根據(11)，它就被一對數(u,v)所確定。這一對數(u, v)叫做點M的曲線坐標。由方程(11)解出 x 與 y，就得到直角坐標(x,y)通過曲線坐標(u, v)的表達式：

(12)
$$x=\varphi_1(u, v); \qquad y=\psi_1(u, v)$$

在極坐標的情形 u 就是 r，v 就是 φ。以上我們講到的 u 爲常數以及 v 爲常數的線叫做曲線坐標(u, v)的坐標線。它們形成兩族線（在極坐標中是圓周族與半線族）。

現在我們來確定在曲線坐標(u, v)下的面積單元 $d\sigma$。

爲此我們考慮兩對很近的坐標線：

$$\varphi(x, y)=u; \qquad \varphi(x, y)=u+du,$$

$$\psi(x, y)=v; \qquad \psi(x, y)=v+dv.$$

形成的面積單元 $M_1M_2M_3M_4$（圖43）。

不計高級無窮小，這個四邊形 $M_1\ M_2\ M_3\ M_4$ 的頂點的坐標就是[I, 68]：

$(M_1)\ x_1=\varphi_1(u,\ v);\qquad y_1=\psi_1(u,\ v).$

$(M_2)\ x_2=\varphi_1(u+du,\ v)=\varphi_1(u,\ v)+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial u}du;$

$$y_2=\psi_1(u+du,\ v)=\psi_1(u,\ v)+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial u}du.$$

$(M_3)\ x_3=\varphi_1(u+du,\ v+dv)=\varphi_1(u,v)+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}dv;$

$$y_3=\psi_1(u+du,\ v+dv)=\psi_1(u,v)+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}dv.$$

$(M_4)\ x_4=\varphi_1(u,\ v+dv)=\varphi_1(u,\ v)+\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial v}dv.$

$$y_4=\psi_1(u,\ v+dv)=\psi_1(u,\ v)+\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial v}dv.$$

由這些公式直接推出，$x_2-x_1=x_3-x_4$ 與 $y_2-y_1=y_3-y_4$，由這兩個等式推知，線段 M_1M_2 與 M_4M_3 相等而且同向。同理線段 M_1M_4 與 M_2M_3 也是如此，就是說，不計高級無窮小的話，$M_1M_2M_3M_4$ 是個平行四邊形，它的面積等於三角形 $M_1M_2M_3$ 的面積的二倍，依照解析幾何學中已知的公式，就有：

$$d\sigma=\left|\ x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)\ \right|.$$

代入以坐標的表達式，就得到在任何曲線坐標下關於面積單元的公式：

$$d\sigma=\left|\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial u}\right|dudv=\left|D\right|dudv,$$

其中 D 叫做函數 $\varphi_1(u,v)$ 與 $\psi_1(u,v)$ 對變量 u 與 v 的函數行列式：

$$D=\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,\ v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,\ v)}{\partial u}$$

結果二重積分中的換元公式就是：

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}F(u,\ v)\,|D|\,dudv,\tag{13}$$

其中 $F(u\ \ v)$ 是 u 與 v 的一個函數，它是由 $f(x\ \ y)$ 經過變換(12)得

到的結果。沿 u 與 v 的積分限由區域 (σ) 的形狀來確定，就像在[56]中對極坐標所講的一樣。

在變換(11)的公式中，我們把 u 與 v 考慮作點的新的曲線坐標，而算作平面是不改變的。反之，可以算作 u 與 v 仍然是直角坐標，那時公式(11)就給出平面的變換，使得具有直角坐標 (x,y) 的點變換爲具有直角坐標 (u,v) 的點。這樣的變換使得區域 (σ) 變形爲新的區域 (Σ)。從這樣的觀點來看，我們應當把公式(13)寫成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\Sigma)} F(u,v)|D|dudv,$$

這裏 u 與 v 是區域 (Σ) 的點的直角坐標，沿 (Σ) 的積分的積分限像在[56]中所講的一樣來確定。若設 $f(x,y)=F(x,y)=1$，則得到區域 (σ) 的面積 σ 的一個表達式，而是寫成沿 (Σ) 的積分的形狀的：

$$\sigma=\iint\limits_{(\Sigma)}|D|\,du\,dv.$$

由此看出，由新的觀點來看，$|D|$ 是當區域 (Σ) 形變爲區域 (σ) 時，在指定點的面積的改變係數，也就是在 (σ) 中的無窮小面積與在 (Σ) 中的對應的面積之比的極限。

例 1. 考慮在平面 XY 上的圓 $x^2+y^2\leqslant 1$，以坐標原點爲圓心，一爲半徑。依照化爲極坐標的公式：$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，引用新的坐標，不過我們不把 r 與 φ 考慮作極坐標，而考慮作直角坐標，就是說，算作具有直角坐標 (x,y) 的點變換爲具有直角坐標 (r,φ) 的點。這時顯然上述的圓變換爲一個矩形，以直線 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=2\pi$（或 $r=0$，$r=1$，$\varphi=0$，$\varphi=2\pi$）爲界，這裏坐標原點 $x=y=0$ 對應於這個矩形的整個一邊 $r=0$，而且這矩形的相對兩邊 $\varphi=0$ 與 $\varphi=2\pi$ 對應於圓的一個相同的半徑。應用公式(8)所表達的在直角坐標系中化二重積分爲兩次積分的法則，直接看出，當在極坐標中沿上述的圓求積分時，對 r 的積分限應當是 $r=0$ 與 $r=1$，對 φ 的是 $\varphi=0$ 與 $\varphi=2\pi$。類似的可以解釋[56]中所講的在極坐標中求積分時確定積分限的法則。

在這情形下

$$D=\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r}=r,$$

像我們以前講過的一樣，$d\sigma=rd\,rd\varphi$.

2.用第二個觀點再看另一個特例，考慮界於坐標軸與直線 $x+y=a$ 之間的直角三角形 (σ)。位於 (σ) 之內的點由下面的不等式確定，就是它們的坐標應當滿足這些不等式：

$$x>0;\qquad y>0;\qquad x+y<a \tag{14}$$

引用新的變量 (u,v)，讓

$$x+y=u;\qquad ay=uv,$$

就是

$$u=x+y;\qquad v=\frac{ay}{x+y},$$

或

$$x=\frac{u(a-v)}{a};\qquad y=\frac{uv}{a}.$$

我們把 (u,v) 也考慮作直角坐標。由最後的公式推知，不等式(14)在新變量下相當於不等式：$0<u<a$，$0<v<a$，它們確定一個正方形 (Σ)，原點是一個頂點，邊是沿坐標軸的方向。(σ) 中任何一點 (x,y) 對應於 (Σ) 中一個確定的點 (u,v)，反之亦然。我們得到關於 D 的表達式：

$$D=\frac{a-v}{a}\cdot\frac{u}{a}+\frac{u}{a}\cdot\frac{v}{u}=\frac{u}{a},$$

於是公式(13)就有下面的形狀：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\Sigma)} F(u,v)\frac{u}{a}\,du\,dv,$$

或者，依照(7)與(8)取積分限：

$$\int_0^a dx\int_0^{a-x} f(x,y)\,dy=\frac{1}{a}\int_0^a u\,du\int_0^a F(u,v)\,dv.$$

58.三重積分 在[55]中所講的二重積分，也可以不解釋作物體

的容積，而作爲分佈在平面區域 (σ) 上的質量。爲此，我們假想在 (σ) 上分佈的有物質。設 Δm 是在單元 $\Delta\sigma$ 上的質量，在 $\Delta\sigma$ 內含有某一點 N。若當 $\Delta\sigma$ 無限縮向點 N 時，比 $\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}$（$\Delta\sigma$ 是上述單元的面積）趨向一個確定的極限 $f(N)$，則這個極限確定出在點 N 分佈的物質的面密度：

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta \sigma}=f(N).$$

若把 (σ) 分爲小的單元 $\Delta\sigma$，則各別單元的質量就近似等於乘積 $f(N)\Delta\sigma$，而且對於在 (σ) 上的全部質量可以寫出近似式：

$$m\approx\sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma,$$

這裏要依照填滿 (σ) 的所有的單元 $\Delta\sigma$ 求和。每一個單元 $\Delta\sigma$ 愈小時，這個近似等式就愈準確。當每一個單元 $\Delta\sigma$ 的各方向都無限縮小並且這些單元的數目無限增加時，取極限，我們就有：

$$m=\lim\sum_{(\sigma)} f(N)\ \Delta\sigma=\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma.$$

用完全類似的方法考慮分佈在空間的物質的質量就引出三重積分的概念。我們假想某一個界於封閉曲面 (S) 的空間區域 (v)。設在這區域中分佈有物質，它的總質量是 m. 把整個區域 v 分成 n 個小單元 Δv，並且把每一個小單元的質量對應的記作 Δm.設當單元 Δv 趨向位於這單元之內的一點 M 時，比

$$\frac{\Delta m}{\Delta v}$$

有極限。這個極限就確定了**分佈的物質在點 M 的（體）密度。**

我們把這個極限記作 $f(M)$：

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta v} = f(M).$$

像以前一樣，可以寫出近似式：

$$m \approx \sum_{(v)} f(M) \Delta v,$$

這裏要依照填滿容積 (v) 的所有的單元求和。

當每個單元 Δv 在各個方向都無限縮小時，取極限，就有：

$$m = \lim \sum_{(v)} f(M) \Delta v.$$

這個物理的例引出了三重積分的一般定義，它與二重積分的定義類似。設 (v) 是三維空間中的有界區域，$f(M)$ 是點的函數，確定於這個區域上，就是說，在區域 (v) 的每一點 M，這函數取確定的值。把 (v) 分爲 n 部分，設 $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$ 是這些部分的容積，而 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 各是出現在這些區域上的任何一點。

作出乘積的和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k) \cdot \Delta v_k$$

當分割的數目 n 無限增加而每一個部分區域無限縮小時這個和的極限叫做函數 $f(M)$ 沿區域 v 的三重積分

$$\iiint_{(v)} f(M)\, dv = \lim \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \Delta v_k.$$

附注：〔參考55〕設 d_k 是部分區域 Δv_k 的兩點間的最大距離（這區域的直徑），而 d 是 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 這些數中的最大的數。每一個部分區域無限減小就有 $d \to 0$ 的意義。若用字母 I 記積分的大小，則上述的定義相當於：當給定任何正數 ε 時，存在有這樣的正數 η，

使得，只要 $d\leqslant\eta$，

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k\right|\leqslant\varepsilon.$$

在本章之末我們再討論三重積分的嚴格理論。

若在整個區域 (v) 上 $f(M)=1$，則得到這區域的容積 v:

$$v=\iiint\limits_{(v)} dv.$$

爲要計算三重積分，需要能把它化爲我們已經講過計算方法的單積分或二重積分。

在空間作出直角坐標系。爲簡單起見，設平行於一個坐標軸的任何一條直線與區域 (v) 的界面 (S) 的交點不多於兩個。作一個柱面，把曲面 (S) 投影到平面 XOY 上，成爲區域 (σ_{xy}) 的形狀（圖 44）。

曲面 (S) 與柱面的切線把它分爲兩部分:

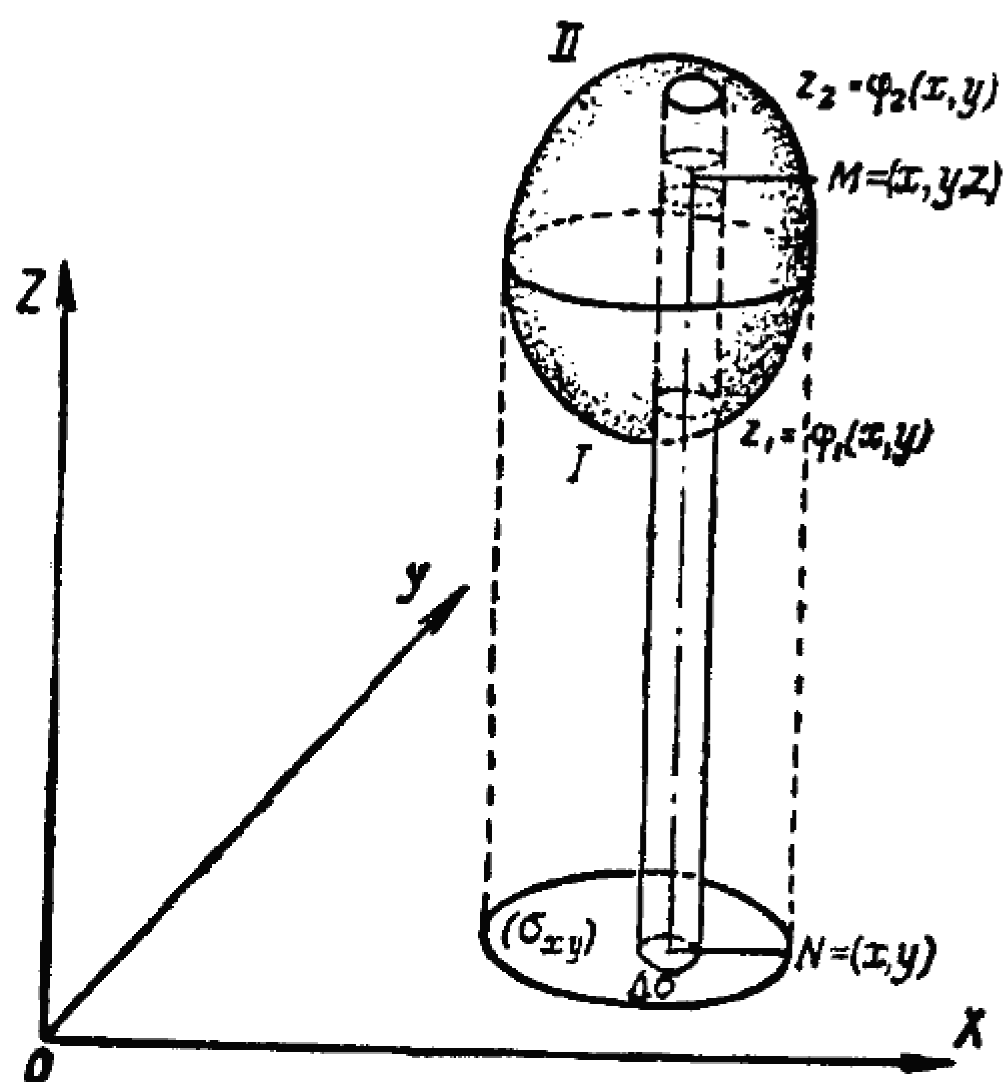


圖 44

(I) $z_1=\varphi_1(x,y)$;

(II) $z_2=\varphi_2(x,y)$.

過區域 (σ_{xy}) 上任何點的平行於 OZ 軸的直線通過部分 (I) 穿入區域 (v)，通過 (II) 穿出它；穿入點與穿出點的縱標 z_1 與 z_2 是 $(x\ y)$ 的已知函數。

現在我們限制用下述的方法把 (v) 分爲單元 Δv：把區域 (σ_{xy}) 分爲很多的小單元 $\Delta\sigma$，以每一個小單

元作底作一個柱體就由 (v) 中分出一個管狀體，再用彼此距離爲 Δz 的平行於 XOY 的平面把這管狀體截割成高度爲 Δz 的單元柱。如此得到的容積單元 Δv 由下面的公式來表達：

$$\Delta v = \Delta\sigma\Delta z.$$

取出一個單元 $\Delta\sigma$ 以及其內一點$N(x,y)$．通過這個點作平行於OZ軸的直線，它與 (S) 交於具有縱標 z_1 與 z_2 的點；在這直線包含於單元 Δv 的每一個線段上取一點$M(x,y,z)$．

在公式 (15) 中出現的和可以寫成：

$$\sum_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,\Delta v = \sum_{(\sigma)} \Delta\sigma \sum_{(z)} f(x,\ y,\ z)\,\Delta z.$$

先固定住 $\Delta\sigma$ 而來減小 Δz．由定積分的基本概念推知：

$$\lim \sum_{(z)} f(x,\ y,\ z)\,\Delta z = \int_{z_1}^{z_2} f(x,\ y,\ z)\,dz,$$

這時 x 與 y 兩個量被考慮作常參變量。於是就有近似式：

$$\sum_{(z)} f(x,\ y,\ z)\,\Delta z \approx \int_{z_1}^{z_2} f(x,\ y,\ z)\,dz = \Phi(x,\ y).$$

再根據二重積分的定義，顯然就有：

$$\sum_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,\Delta v \approx \sum_{(\sigma_{xy})} \Delta\sigma\Phi(x,\ y) \to \iint_{(\sigma_{xy})} \Phi(x,y)\,d\sigma,$$

就是

$$(16)\qquad \iiint_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dv = \iint_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz.$$

由以上的理由抽去幾何的解釋，就引出下面的計算三重積分的法則。

爲要把三重積分

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dv$$

化爲單積分與二重積分：1）把區域(v)的界面(S)投影到平面XOY上得到區域(σ_{xy})；2）確定通過區域(σ_{xy})的點的平行於OZ軸的直線穿入與穿出區域(v)的點的縱標z_1與z_2；3）算作$(x\ y)$是常數，先計算積分

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz,$$

然後再計算二重積分

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz.$$

利用直角坐標(x,y)，二重積分可以再化爲兩次積分，於是結果我們得到：

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dv = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz, \tag{17}$$

其中積分限$(y_1,\ y_2)$與(a, b)像在[54]中一樣的確定。

利用把曲面(S)投影到平面YZ上得到區域(σ_{yz})或投影到平面XZ上得到區域(σ_{xz})，可以取其他的順序把三重積分化爲累次積分，這個以及當平行於坐標軸的直線與曲面的交點多於兩個時的較複雜情形，都留給讀者自己作出來。

公式(17)可以寫成：

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz.$$

因子 $dx\,dy\,dz$ 叫做在直角坐標系的容積單元；用平行於坐標面的平面把容積 (v) 分爲無窮小的長方形就得到它。

若 (v) 是以平行於坐標面的平面

$$x=a;\quad x=b\quad y=a_1\quad y=b_1;\quad z=a_2;\quad z=b_2$$

爲界的長方體，則前兩次積分的積分限成爲常數：

$$(18)\qquad \iiint\limits_{(v)} f(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\int_{a_1}^{b_1} dy\int_{a_2}^{b_2} f(x,\,y,\,z)dz.$$

59. 柱面坐標與球面坐標　有時在空間作直角坐標並不合用，而是其他的坐標系才合用。其他的坐標系中最有用的是**柱面坐標以及球面坐標**，在直角坐標系中，點的位置由它的三個坐標 (a,b,c) 來確定，而這個點就是平行於坐標面的三個平面：$x=a,\ y=b,\ z=c$ 的交點。如此，在這情形下，空間由三族平行於坐標面的平面

$$x=C_1;\quad y=C_2;\quad z=C_3$$

塡滿，其中 C_1,C_2,C_3 是常數，於是空間任何一點是各族中三個平面的交點。保留坐標 z，引用新的坐標 r 與 φ 來代替 x 與 y，讓：

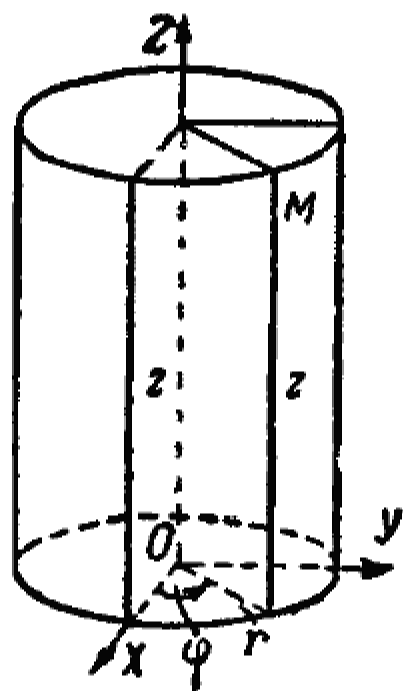


圖 45

$$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi;\quad z=z.$$

坐標 r 是點 M 到 OZ 軸的距離，φ 是通過 OZ 軸及點 M 的平面與平面 XOZ 作成的角（圖 45），這裏 φ 可以由 0 改變到 2π，r 可以由 0 改變到 $(+\infty)$. 坐標 (r,φ,z) 叫做點 M 的柱面坐標。OZ 軸上的點對應於 $r=0$，而對於它們坐標 φ 是不定的。在這情形下，我們有以下三族坐標面：

$$r=C_1;\quad \varphi=C_2;\quad z=C_3.$$

第一族 $r=C_1$ 是圓柱面族，它們的廻轉軸是 OZ 軸。第二族 $\varphi=C_2$ 是

通過 OZ 軸的半平面族，最後，第三族 $z=C_3$ 是平行於平面 XOY 的平面族。

對變量 r, φ 與 z 給以改變量 Δr，$\Delta\varphi$，Δz，對應於所取的變量的值，在每一族中有兩個很近的曲面，這就得到柱面坐標系的容積單元。沿着它的每一邊只是一個坐標改變，而且這些邊一對一對的正交（圖 46）。不計高級無窮小的話，這樣的單元可以看作以

$$\Delta r,\ r\Delta\varphi,\ \Delta z$$

爲邊的長方體，這就給出了柱面坐標系中的容積單元的表達式

$$dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

同時在柱面坐標系中三重積分就有表達式：

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(r, \varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz, \tag{19}$$

這裏，積分限依照像在直角坐標系中一樣的原則來確定。

例　求充滿有不均勻物質的球段的質量，其密度正比於到這球段的底的距離（圖 47）。

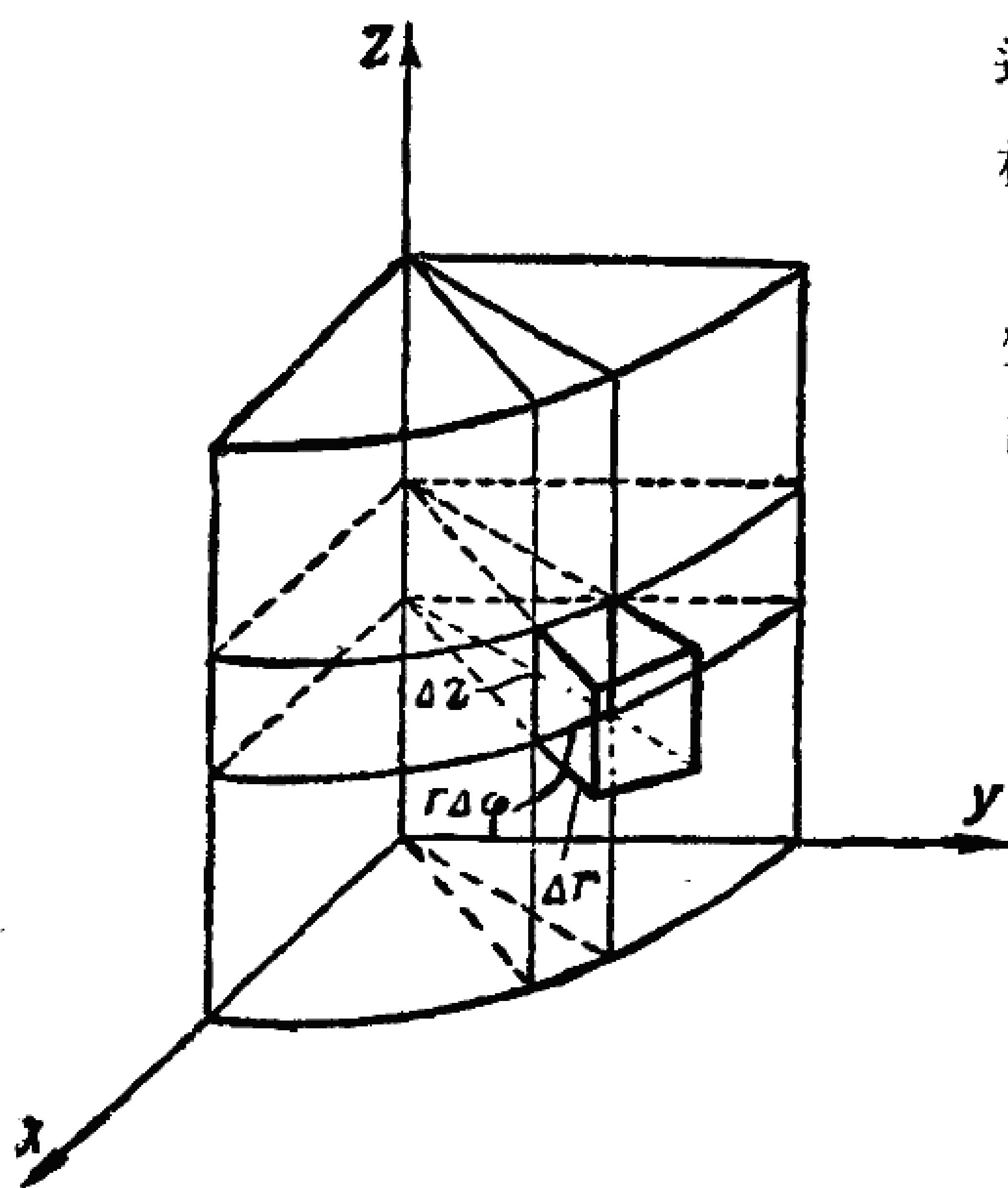


圖 46

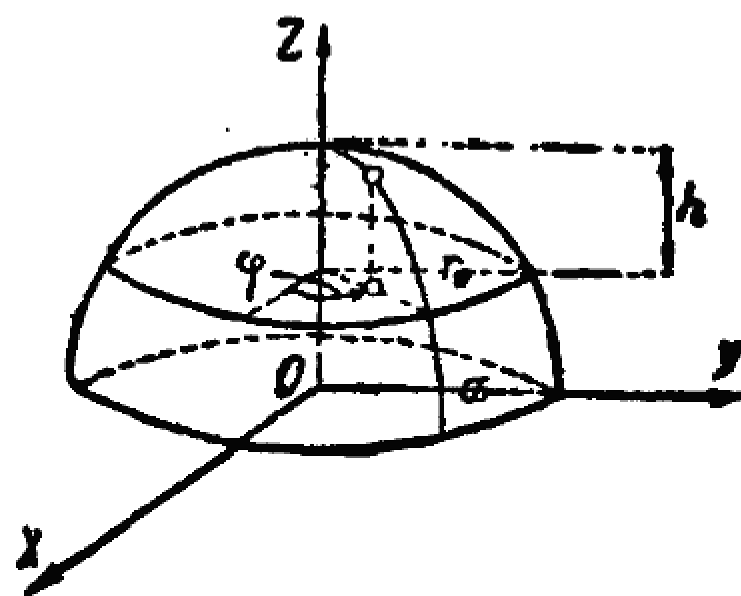


圖 47

取球心作坐標原點，取平行於這球段的底的過球心的平面作 XOY 平面，通過坐標原點垂直於球段的方向作 OZ 軸，用 a 記球的半徑，h 記球段的高，r_0 記球段的底半徑。

在柱面坐標系中球面的方程是：

$$r^2+z^2=a^2 \quad 或 \quad z^2=a^2-r^2。$$

密度的改變率由下面這公式來表達：

$$f(r,\varphi,z)=b+cz$$

其中 b 與 c 是已知的常數。

應用公式(19)得到：

$$m=\iiint\limits_{(v)}(b+cz)r\ dr\ d\varphi\ dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}r\,dr\int_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}}(b+cz)\,dz=$$

$$=2\pi\int_0^{r_0}\left[bz+\frac{c}{2}z^2\right]_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr$$

請讀者自己代入 z 的值再求積分，就得到：

$$m=bv+c\pi\frac{r_0{}^4}{4}。$$

其中 v 是這球段的容積。

再考慮**球面坐標**也有時叫做**空間極坐標**。設 M 是空間某一點，$\overline{OM}$ 是由坐標原點連到點 M 的線段。點 M 的位置可以由下面三個量來確定：線段 $\overline{OM}$ 的長度 ρ；通過 OZ 軸及點 M 的半平面與平面 XZ 作成的角度 φ；線段 $\overline{OM}$ 與正向 OZ 軸作成的角度 θ（圖 48）。這裏，ρ 可以由 0 改變到 $(+\infty)$；角度 φ 由 OX 軸逆鐘針方向計算，可以由 0 改變到 2π；最後，角度 θ 由 OZ 軸的正方向算起，可以由 0 改變到 π.任何點 M 對應於確定的坐標 ρ,φ,θ,

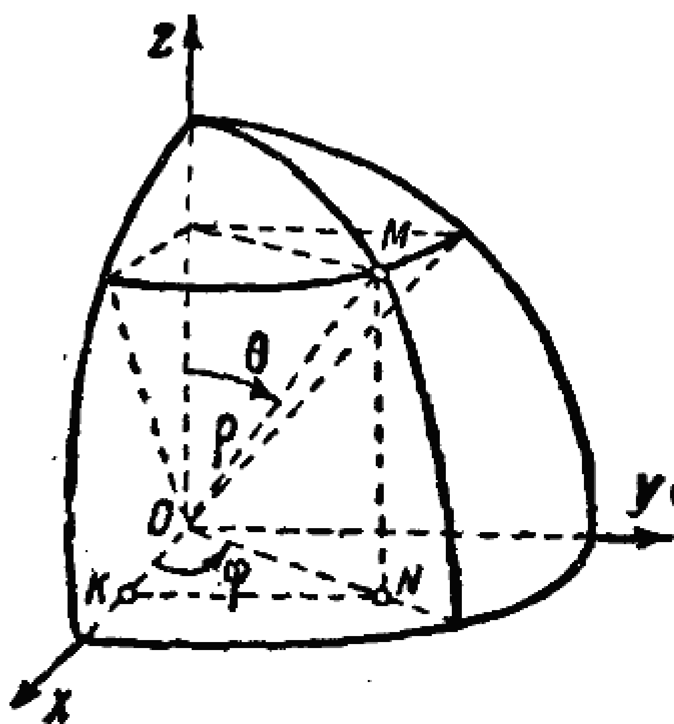


圖 48

反之亦然。由點 M 作平面 XY 的垂線 MN，再由這垂足 N 作 OX 軸的垂線 NK. 線段 $\overline{OK}$, $\overline{KN}$, $\overline{NM}$ 顯然給出點 M 的直角坐標 x, y, z. 由直角三角形 ONM 就有:

$$\overline{ON}=\rho\sin\theta$$

再利用直角三角形 ONK,結果就得到**由直角坐標化爲球面坐標的公式**:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi;\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi;\ z=\rho\cos\theta.$$

我們來考慮坐標曲面族:

$$\rho=C_1;\quad \varphi=C_2;\quad \theta=C_3.$$

第一族顯然是以坐標原點爲心的球面族; 第二族是通過 OZ 軸的半平面族: 第三族是以 OZ 軸爲廻轉軸的圓錐面族。注意，坐標原點 O 對應於$\rho=0$，而另外兩個坐標 φ 與 θ 的値是不定的。對於所有的位於 OZ 軸上的點，坐標 φ 是不定的，而 $\theta=0$ 或 π.

對 ρ, θ 與 φ 給以無窮小改變量 $\Delta\rho$，$\Delta\theta$ 與 $\Delta\varphi$，就得到球面坐標系中的容積單元。沿着它的每一個邊只是一個坐標改變，而且這些邊一對一對的正交（圖 49），不計高級無窮小的話，這樣的單元可以看作以

$$d\rho,\ \rho d\theta,\ \rho\sin\theta\, d\varphi$$

爲邊的長方形，於是這個單元容積的表達式就是:

$$dv=\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

由此得到在球面坐標系中三重積分的表達式:

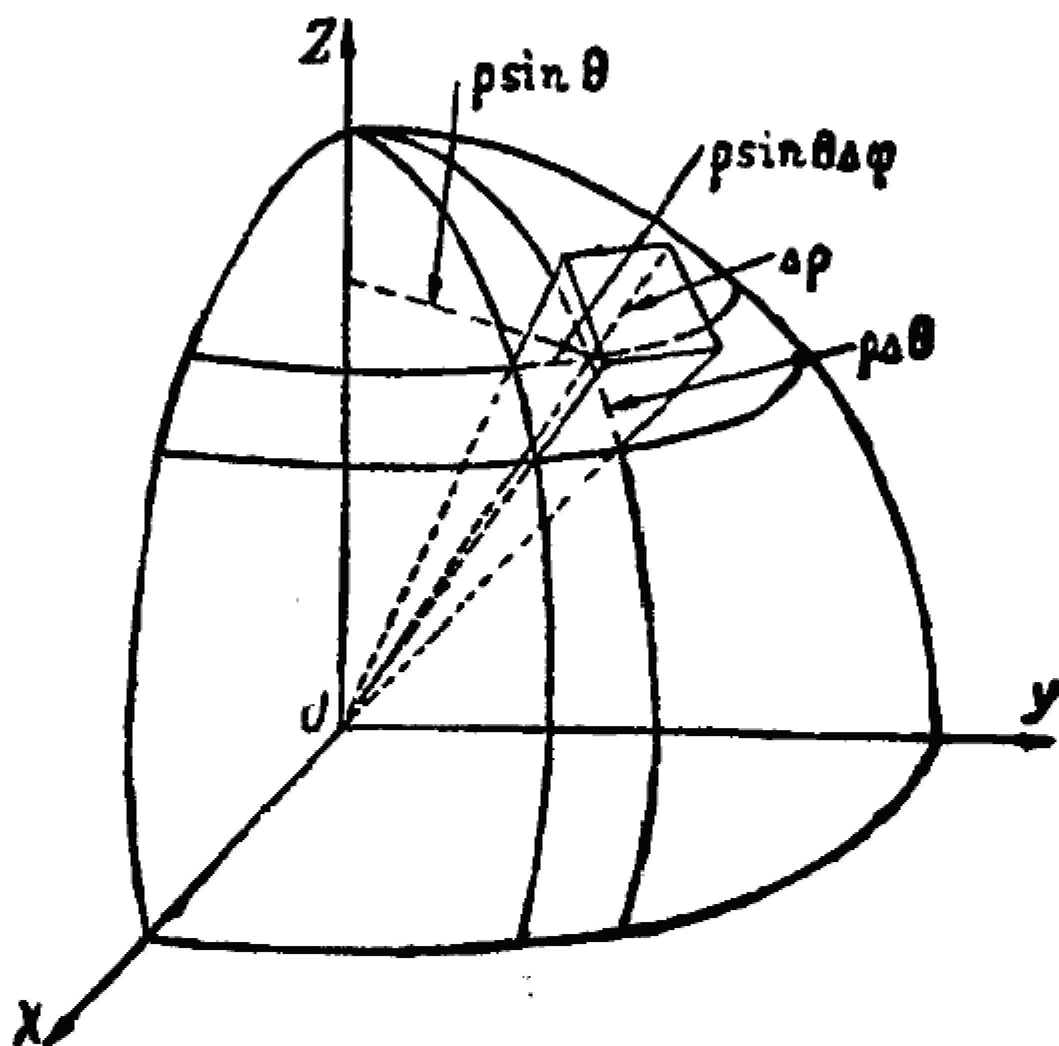


圖 49

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \tag{20}$$

現在可以講把三重積分化爲累次積分法，例如，用下述的方法：求出以坐標原點爲中心容積 (v) 在半徑爲一的球面上的中心投影（圖50）；設這投影是區域 (σ)［若坐標原點在 (v) 內，則 (σ) 與整個球面重合］。過 (σ) 上所有的點引出向量半徑；在簡單的情形下，每一個這樣的半線具有穿入 (v) 的點以及穿出 (v) 的點；把這兩個點的向量半徑各記作 ρ_1 與 ρ_2［當坐標原點位於 (v) 之內時，讓 $\rho_1=0$］。這時我們得到：

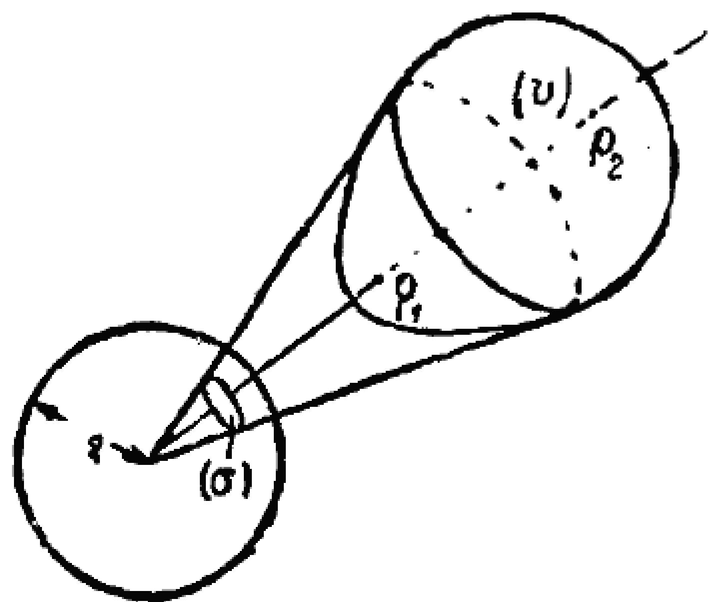


圖 50

$$\iiint\limits_{(v)} f(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \iint\limits_{(\sigma)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\, d\rho,$$

其中 ρ_1 與 ρ_2 是 θ 與 φ 的已知函數。對 θ 與 φ 的積分限依照區域 (σ) 的形狀來確定。

例 求一個密度不均勻的球的質量，設在同心球層上密度相同。在這情形下，依照條件，可以算作密度只依賴於 ρ 而由函數 $f(\rho)$ 來表達，這就給出：

$$m = \iiint\limits_{(v)} f(\rho)\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{a} f(\rho)\rho^2 d\rho = 4\pi \int\limits_0^{a} f(\rho)\rho^2 d\rho.$$

若密度是常數而等於一，就得到球的容積的表達式：

$$v = 4\pi \int\limits_0^{a} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}$$

附註 因子 $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ 具有很重要的幾何意義：這是在半徑爲一

的球面上，由經線及平行的圓所分成的面積單元（圖 51）。如果我們把半徑爲一的球面分爲任意形式的單元 $d\sigma$. 則得到：

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv=$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(M)\,\rho^2\,d\rho,$$

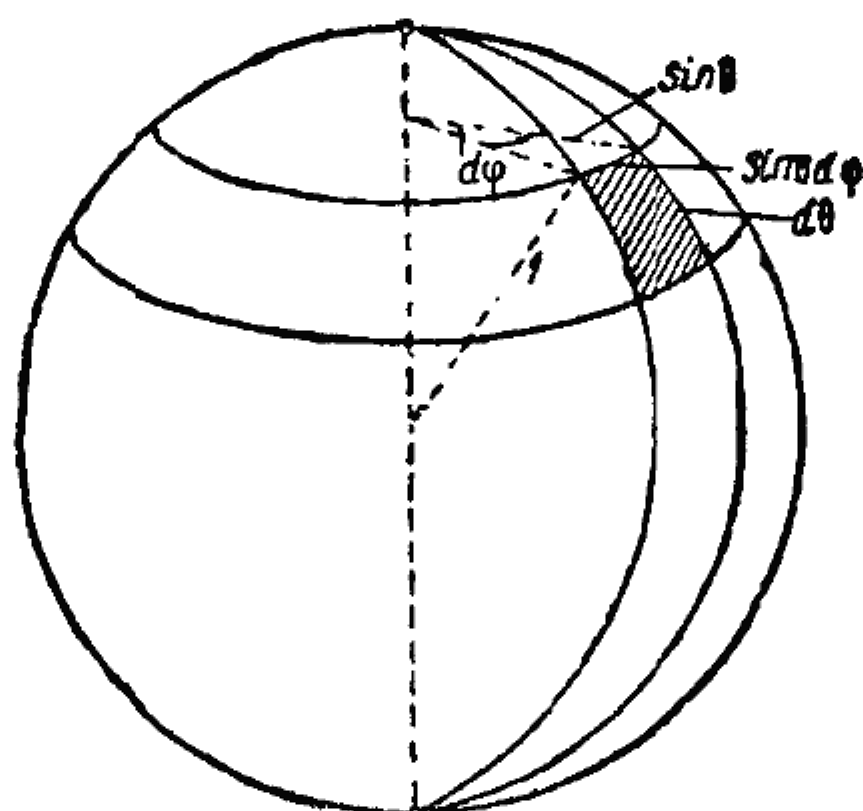


圖 51

其中 (σ) 是利用由坐標原點的中心投影時，所考慮的區域 (v) 在球面上的投影的區域。

以球心爲頂點，以單元 $d\sigma$ 的界線爲導線作出一個單元錐，**這個單元錐的容度由面積 $d\sigma$ 來度量，它叫做立體角，由中心通過它引向被這些單元錐所分的任何曲面 (S) 的單元。**

.空間的曲線坐標　在一般的空間曲線坐標的情形下，點的位置由三個數 q_1, q_2, q_3 來確定，這三個數與直角坐標 x, y, z 由下列的公式連繫着：

$$(21)\qquad \varphi(x,y,z)=q_1;\ \psi(x,y,z)=q_2;\ \omega(x,y,z)=q_3.$$

給 q_1, q_2, q_3 以不同的常數值，就得到三族坐標面。容積單元 dv 是由三對無限逼近的坐標面形成的。我們不給證明，只講結果，它類似於 [57] 中對於兩個變量所講的結果。不計高級無窮小的話，上述容積單元 dv 可以考慮作平行六面體，如果我們由 (21) 解出 x, y, z:

$$(21_1)\qquad x=\varphi_1(q_1,q_2,q_3);\ y=\psi_1(q_1,q_2,q_3);\ z=\omega_1(q_1,q_2,q_3),$$

則 dv 的表達式是：

$$dv=|D|\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

於是三重積分的換元公式就有如:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(v)} F(q_1, q_2, q_3)\,|D|\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

其中 $F(q_1, q_2, q_3)$ 是由 $f(x, y, z)$ 經過變換 (21_1) 的結果得到的，而D是 x, y, z 對 q_1, q_2, q_3 的函數行列式:

$$D = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3} - \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right).$$

像在 [57] 中一樣，公式 (21) 也可以考慮作空間的變形，這時具有直角坐標 (x, y, z) 的點變換到具有直角坐標 (q_1, q_2, q_3) 的點。這樣解釋的話，$|D|$ 就給出當由 (q_1, q_2, q_3) 變換到 (x, y, z) 時，在指定位置的容積改變係數。

對於熟悉行列式的讀者，我們提出，D 的表達式可以寫成下面的三級行列式的形狀:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}, & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}, & \frac{\partial\omega_1}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

在卷 III 中我們再仔細的講這樣的行列式。

例 設有界於坐標平面與平面 $x+y+z=a$ 之間的四面體 (v)，它由下列的不等式來確定:

$$x>0;\ y>0;\ z>0;\ x+y+z<a.$$

引用新的變量

$$x+y+z=q_1;\ a(y+z)=q_1 q_2;\ a^2 z=q_1 q_2 q_3,$$

我們把 (q_1, q_2, q_3) 解釋作爲直角坐標。由上面的公式推知:

$$q_1 = x + y + z;\quad q_2 = \frac{a(y+z)}{x+y+z};\quad q_3 = \frac{az}{y+z}$$

或

$$x = \frac{q_1(a-q_2)}{a},\ y = \frac{q_1 q_2 (a-q_3)}{a^2};\ z = \frac{q_1 q_2 q_3}{a^2}.$$

像在[57]中完全一樣，四面體(v)變換爲立方體(v_1)：$0<q_1<a$；$0<q_2<a$；$0<q_3<a$。這裏不難確定出：$D=\frac{1}{a^3}q_1{}^2q_2$，於是變換的公式就是：

$$\iiint\limits_{(v)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(v_1)} F(q_1,\ q_2,\ q_3)\frac{1}{a^3}\,q_1{}^2q_2 dq_1 dq_2 dq_3;$$

或者，如果確定出積分限的話：

$$\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} f(x,\ y,\ z)\,dz = \frac{1}{a^3}\int_0^a q_1{}^2 dq_1 \int_0^a q_2 dq_2 \int_0^a F(q_1,\ q_2,\ q_3)\,dq_3.$$

61. 重積分的基本性質 以前我們直接利用定積分的定義，就是作爲和的極限，證明了定積分的基本性質[I,94]，同理可以證明重積分的基本性質。爲簡單起見，我們算作所有的函數都是連續的，於是它們的積分無條件是有意義的。

I. 常因子可以由積分號下提出來

$$\iint\limits_{(\sigma)} af(N)\,d\sigma = a\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma.$$

II. 函數的代數和的積分等於各項的積分的和

$$\iint\limits_{(\sigma)} [f(N)-\varphi(N)]\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma - \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma.$$

III. 若區域(σ)分爲有限多個部分區域［例如分爲兩個區域(σ_1)與(σ_2)］，則沿整個區域的積分等於沿各部分區域的積分之和：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(N)\,d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(N)\,d\sigma.$$

IV.若在區域 (σ) 上 $f(N)\leqslant\varphi(N)$，則

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma \leqslant \iint_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma.$$

特別是:

$$\left|\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma\right| \leqslant \iint_{(\sigma)} |f(N)|\,d\sigma.$$

V.若在區域 (σ) 上 $\varphi(N)$ 保持不變號，則由下面公式所表達的中值定理成立:

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\varphi(N)\,d\sigma = f(N_0)\iint_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma,$$

其中 N_0 是位於區域 (σ) 內的某一點。

特別是當 $\varphi(N)=1$時，我們得到

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = f(N_0)\sigma,$$

其中 σ 是區域 (σ) 的面積。

關於三重積分也有類似的性質成立。

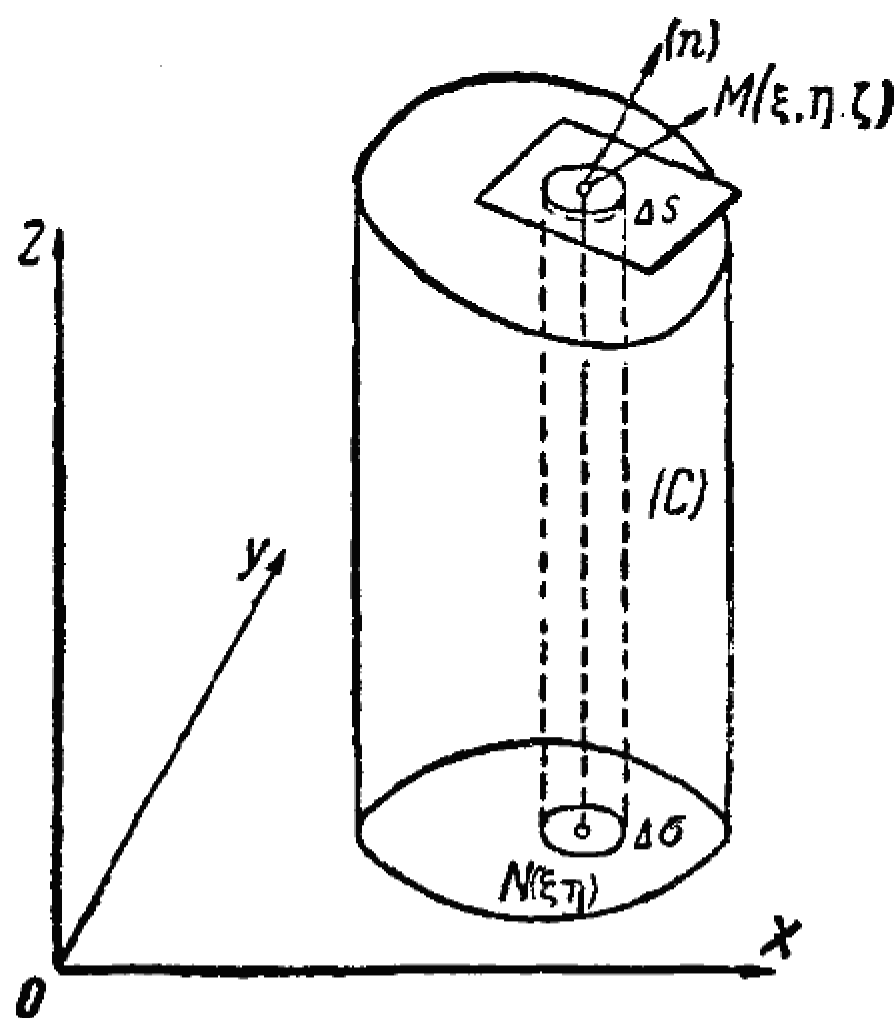


圖 52

注意，對於二重積分與三重積分作爲和的極限的定義，我們總算作積分區域是有界的，並且在任何情形下，被積函數 $f(N)$ 在積分區域上是有界的，就是說，存在有這樣的數 A，使得在積分區域的所有的點 N 保持有條件 $|f(N)|<A$. 若不滿足這個條件，則積分仍可以作爲反常積分存在，就與對於簡單

定積分這個成立時類似[I,97與98]。我們在本章§ 3中再講反常重積分。

62.曲面的面積　我們把給定的曲面(S)的方程寫成:

(22) $$z=f(x,y)$$

並記作

(23) $$\frac{\partial f}{\partial x}=p;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=q.$$

我們知道[I,160],曲面(S)在點(x,y,z)的法線的方向餘弦與p.q.(—1)成比例;就是說,由解析幾何學知道,可以由下列的公式來表達:

(24) $$\cos(n,X)=\frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad \cos(n,Y)=\frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}};$$
$$\cos(n,Z)=\frac{1}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

我們來確定曲面(S)被柱面(C)截下的一部分的面積,這一部分曲面在XY平面上的投影為區域(σ)(圖52)。把面積(σ)分為小單元Δσ;以Δσ為底的柱面就把(S)分為小單元ΔS。

在每一個小單元上取一點N(ξ,η),它對應於曲面(S)上一點M(ξ,η,ζ),其中ζ=f(ξ,η)。過點M作曲面(S)的切面與法線,用ΔS′記上述以Δσ為底的柱面在這切面上截下的一塊小平面的面積。

當單元Δσ的數目無限增加,而每一小單元在任何方向都無限縮小時,這些小平面的面積之和的極限就定義作上述曲面(S)的一部分的面積。以下我們證明,這個極限由沿區域(σ)的二重積分來表達。單元Δσ是平面的單元ΔS′在XY平面上的投影,這兩個單元所在的平面的法線作成角度(n,Z),它的餘弦由公式(23)中第三個來表達,所以[1)](此註在下頁)

$$\Delta\sigma=\Delta S'\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \text{ 或 } \Delta S'=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma,$$

如此，對於上述曲面的面積 S，依定義我們得到：

$$S=\lim\sum\Delta S'=\lim\sum_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma.$$

這等式右邊的極限表示沿 (σ) 的二重積分，於是我們得到：

$$(25)\qquad S=\iint_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma=\iint_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

是要求的公式，用以計算由平行於 OZ 軸的柱面截下的曲面的一部分的面積。

積分號下的表達式表示出曲面面積的單元 dS。利用 $\cos(n,Z)$ 的表達式，可以寫成：

$$(26)\quad dS=\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma_{xy}=\frac{d\sigma_{xy}}{|\cos(n,Z)|} \text{ 或 } d\sigma_{xy}=|\cos(n,Z)|\,dS.$$

這裏 $d\sigma_{xy}$ 是 dS 在平面 XY 上的投影[1]。因為面積單元 $d\sigma_{xy}$ 與 dS 算作正的，所以要取 $\cos(n,Z)$ 的絕對值。

我們假設由公式 (23) 確定的 p 與 q 是 (x,y) 的連續函數。由以前的討論，我們用連續函數的積分 (25) 來表達面積 $\Delta S'$ 的和的極限，

[1]設 (S_2) 是平面曲域 (S_1) 的投影，而 φ 是這兩個平面作成的二面角，或者說是這兩個平面的法線的交角。不難看出，關係式 $S_2=S_1\cos\varphi$ 成立。實際上，用兩個正交的直線族來分這區域，其中一族是平行於平面 (S_2) 與 (S_1) 的交線的直線族。設區域 (S_2) 中的諸矩形是 (S_1) 中矩形的投影。作投影時，平行於平面 (S_2) 與 (S_1) 的交線的兩邊保持原來的大小，而另外兩邊要乘以 $\cos\varphi$，所以若關於 (S_1) 的面積單元是 $dx\,dy$，則關於 (S_2) 的就是 $\cos\varphi\,dx\,dy$，於是推知：

$$S_2=\iint_{(S_1)}\cos\varphi\,dx\,dy=\cos\varphi\iint_{(S_1)}dx\,dy=S_1\cos\varphi.$$

以前也證明了這個極限存在。以上所給的曲面面積的定義具有一點缺陷，在這定義中引入了投影的運用，於是這定義連繫於平面 XY 的選擇。可以證明，曲面面積的大小不依賴於平面 XY 的選擇。還要提出，若平行於 OZ 軸的直線與曲面(S)交於幾個點，則由公式(25) 計算曲面的面積時，要把曲面分爲幾部分，再分別計算每一部分的面積。

例 1.計算 [56] 例中考慮的一部分球面的面積。

我們有

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2};\quad p=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z};$$

$$q=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\frac{a}{z}$$

$$S=\iint_{(\delta)}\frac{a}{z}\,r\,dr\,d\varphi=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=2a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

2.求柱面

$$x^2+y^2=a^2 \tag{27}$$

被柱面

$$y^2+z^2=a^2 \tag{28}$$

截下的一部分的面積(圖 53)。

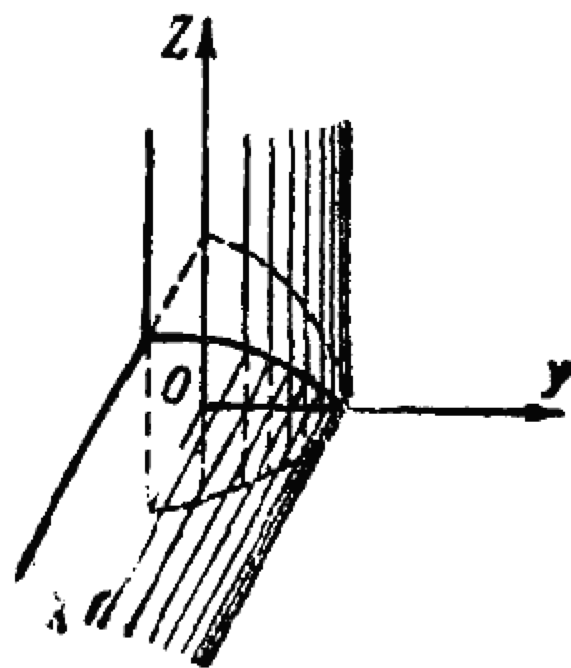


圖 53

在這個問題中，算作 y 與 z 是自變量，而 x 是由方程(27)確定的 y 與 z 的函數比較方便。在平面 YZ 上的積分區域是個圓，它的圓周由方程(28)確定。圖上畫出的面積

顯然等於所考慮的全部面積的$\frac{1}{8}$，所以就有：

$$S=8\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dydz,$$

其中

$$p=\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x};\ q=\frac{dx}{dz}=0$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

於是

$$S=8a\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=8a\int_0^a \arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\,dz=$$

$$=8a\left[z\arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\Bigg|_{z=0}^{z=a}+\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dr\right]=$$

$$=-8a\sqrt{a^2-z^2}\Bigg|_{z=0}^{z=a}=8a^2.$$

63. 曲面積分與奧斯特洛格拉得斯基公式 關於沿平面區域的二重積分的概念，不難推廣到沿曲面的積分的情形。**設 (S) 是某一曲面（閉的或不閉的），而 $F(M)$ 是這曲面上的點的函數。把 (S) 分爲 n 部分，並設 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots\cdots, \Delta S_n$ 是這些部分的面積，而 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 各爲這些部分上任何一點。作出乘積之和**

$$\sum_{k=1}^{n}F(M_k)\cdot\Delta S_k.$$

當分割的數目無限增加而每一部分 ΔS_k 無限縮小時，這個和的極限叫做函數 $F(M)$ 沿曲面 (S) 的積分：

$$\iint\limits_{(S)}F(M)\,dS=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F(M_k)\,\Delta S_k.$$

設平行於 Z 軸的直線與曲面只交於一點(圖 52)，並設 (σ) 是 (S) 在 XY 平面上的投影。利用公式 (26) 所建立的曲面 (S) 的面積單元與對應於它的投影 (σ_{xy}) 的連繫，可以把沿曲面的積分化爲沿平面區域 (σ) 的積分:

$$\iint\limits_{(S)} F(M)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{F(N)}{|\cos(n, Z)|}\,d\sigma_{xy}, \tag{29}$$

這裏算作 $\cos(n,Z)$ 不等於零，並且函數 $F(N)$ 在區域 (σ) 的點 N 的值與曲面上函數 $F(M)$ 在點 M 的值全同，而 M 的投影與 N 重合。若曲面 (S) 的方程由公式 (22) 給定而函數 $F(M)$ 通過坐標來表達 $F(x,y,z)$，則當沿 (σ) 求積分時，只須把 $z=f(x,y)$ 代入到函數 $F(x,y,z)$ 的表達式中，也就是 $F(N)=F[x,y,f(x,y)]$。(29) 右邊的分母由公式 (24) 中第三個來確定。

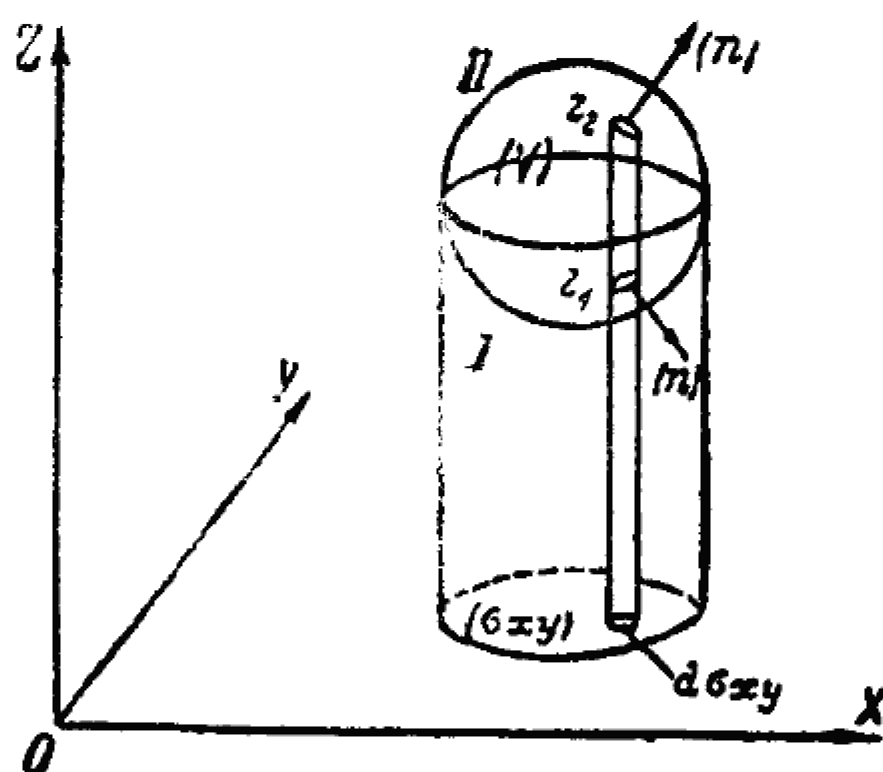


圖 54

注意，顯然曲面積分具有 [61] 中所述二重積分的性質，特别是對於曲面積分中值定理成立。

現在證明重積分理論中的一個基本公式——奥斯特洛格拉得斯基公式，它建立了沿容積 (V) 的三重積分與沿曲面 (S) 的積分之間的關係，其中曲面 (S) 是容積 (V) 的界面。像 [58] 中一樣，我們算作平行於 Z 軸的直線與 (S) 的交點不多於兩個。仍然用 [58] 圖 44 上的記法。在考慮中還要引用方向 (n) ——(S) 的法線，我們算作 (n) 的方向是由容積 (V) 向外的方向(外向法線)(圖 54)。在曲面的上部 (II) 這個方向與 Z 軸作成鋭角，在下部 (I) 成鈍角。所以 $\cos(n,Z)$

在部分（I）上是負的量，在這情形下，$|\cos(n,Z)|=-\cos(n,Z)$.

公式(26)給出:

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
&\text{在(II)上}\quad d\sigma_{xy}=\cos(n,\ Z)\,dS;\\
&\text{在(I)上}\quad d\sigma_{xy}=-\cos(n,Z)\,dS,
\end{aligned}
$$

考慮函數$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$沿（$v$）的三重積分，$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$是某一已知函數$R(x,y,z)$對$z$的偏微商。利用公式（16），就有:

$$
\iiint\limits_{(v)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dv=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}d\sigma_{xy}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz.
$$

不過微商的積分等於原函數在上下限的值的差:

$$
\iiint\limits_{(v)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dv=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}[R(x,y,z_2)-R(x,y,z_1)]\,d\sigma_{xy}
$$

或

$$
\iiint\limits_{(v)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dv=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}R(x,y,z_2)\,d\sigma_{xy}-\iint\limits_{(\sigma_{xy})}R(x,y,z_1)\,d\sigma_{xy}.
$$

由公式（30）用dS來替換$d\sigma_{xy}$，把沿（σ）的積分化為沿（S）的積分，這時，在第一個積分中含有曲面（S）的部分（II）上的變動縱坐標z_2，利用公式（30）的第一個，就得到沿（II）的積分；在第二個積分中，含有z_1，利用公式（30）的第二個，就得到沿（I）的積分:

$$
\iiint\limits_{(v)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dv=\iint\limits_{(\mathrm{II})}R(x,\ y,\ z)\cos(n,\ Z)\,dS+
$$
$$
+\iint\limits_{(\mathrm{I})}R(x,\ y,\ z)\cos(n,\ Z)
$$

這時z的附標就可以不寫了，因為求積分時就是要沿那一部分曲面來

作的。在右邊沿部分（II）與（I）的積分之和就是沿整個曲面（S）的積分：

$$(31)\qquad \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,dv = \iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\cos(n, Z)\,dS.$$

同理，取另外兩個函數 $P(x,y,z)$ 與 $Q(x\,y\,z)$，我們可以證明：

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}\,dv = \iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\cos(n, X)\,dS$$

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y}\,dv = \iint\limits_{(S)} Q(x, y, z)\cos(n, Y)\,dS.$$

這三個公式逐項相加，就引到奧斯特洛格拉得斯基公式：

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \\ &= \iint\limits_{(S)} [P\cos(n, X) + Q\cos(n, Y) + R\cos(n, Z)]\,dS. \end{aligned}$$

爲簡短起見，這裏，我們沒有寫出函數 P, Q, R 的變量 x, y, z，不過需要記住這些函數確定在容積（v）上，它們以及這些微商都是連續的。

下一章中，我們要講很多應用奧斯特洛格拉得斯基公式的例。

推出公式（31）時，我們假設了平行於 OZ 軸的直線與容積（v）的界面（S）的交點不多於兩個。不難推廣這個公式到較普遍的區域。首先，我們提出，若曲面（S），除上部（II）與下部（I）外，還有平行於 OZ 軸的柱形側面，則在這側面上 $\cos(n, Z)=0$，這一部分添在公式（31）的右邊不改變曲面積分的大小，所以這公式的全部證明仍是正確的。在更普遍的情形中，只須用平行於 OZ 軸的柱面把（v）分成有限部分，使每一部分滿足上述的條件，再對每一部分應用公式（31）。如

此得到的公式相加，在左邊就有沿整個容積 (v) 的三重積分，在右邊就有沿 (v) 所分成的各部分的曲面的積分之和。如以上所述，沿各輔助柱面的積分等於零。如此，相加的結果，在右邊就得到沿原來的容積 (v) 的曲面 (S) 的積分。於是，對於更普遍形狀的區域 (v)，公式 (31) 是正確的。

注意，在 (v) 是以幾個曲面爲界的情形：一個曲面在外面，其餘的在裏邊，這些討論仍然是對的。圖 55 上表示出一種這樣的情形：(v) 是以兩個曲面爲界的。這時，在(31) 的右邊需要沿 (v) 的所有的界面求積分，在裏邊的曲面上，方向 (n) 應指向這些曲面的裏邊［也就是由 (v) 向外］。

64. 沿確定一側的曲面積分　有時我們利用另一種定義與另一種形式來規定曲面積分。先考慮如圖54所示的曲面(S)的情形，它滿足上一段開始時所講的條件。在曲面的每一點可以給法線兩個彼此方相反的方向。一個與 OZ 軸作成銳角，另一個作成鈍角。與這相對應，可以把曲面分爲兩側——上側與下側。像以上一樣，設 $R(x,y,z)$ 是 (S) 上的給定的函數。我們考慮積分：

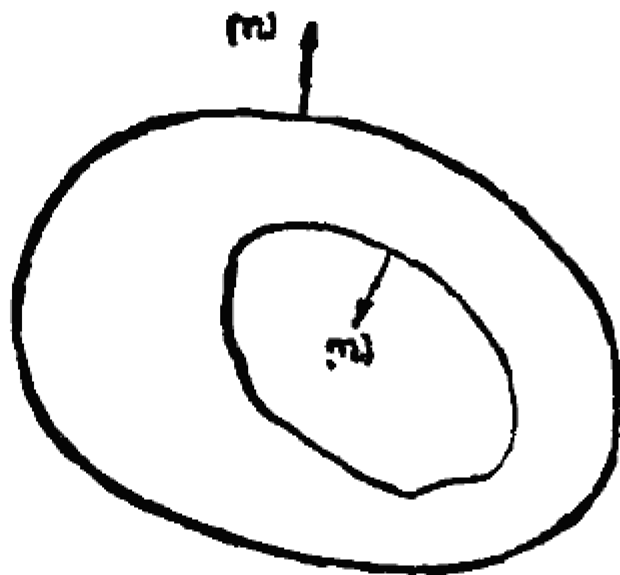


圖 55

$$(33)\qquad \iint\limits_{(S)} R\cos(n,Z)\,dS.$$

這個積分的大小依賴於所選擇的法線的方向，也就等於說要看沿曲面的那一側作積分。當沿上側求積分時 $\cos(n,Z)>0$ 而 $\cos(n,Z)dS=d\sigma_{xy}$，當沿下側求積分時 $\cos(n,Z)<0$ 而 $\cos(n,Z)\,dS=-d\sigma_{xy}$，其中 $d\sigma_{xy}$ 是曲面 (S) 的面積單元在 XY 平面上的投影，也就是公式 (29) 中區域 (σ) 的面積單元。在 (x,y) 的坐標中，我們可以寫成 $d\sigma_{xy}=dxdy$，於是積分 (33) 化爲沿 XY 平面上區域 (σ) 的積分：

$$(34)\qquad \iint\limits_{(\sigma)} R[x,y,f(x,y)]\,dxdy \text{ 或 } -\iint\limits_{(\sigma)} R[x,y,f(x,y)]\,dxdy,$$

這要看是沿曲面的那一側來作積分。但是在一般情形下，有時一律寫成

$$\iint_{(S)} R\,dxdy, \tag{35}$$

而說明是沿曲面的那一側作積分。例如，若沿曲面 (S) 的下側作積分 (35) 就代表 (34) 中的第二個積分。積分 (35) 可以直接定義作乘積之和 $\Sigma R(M_k)\Delta\sigma_k$ 的極限，其中的乘積是，在曲面上的點的函數的值 $R(M)$ 與曲面 (S) 所分成的單元 ΔS_k 在 XY 平面上投影的面積 $\Delta\sigma_k$ 之乘積；這裏，若是沿曲面的上側作積分，則 $\Delta\sigma_k$ 算作正的，若沿曲面的下側作積分，則 $\Delta\sigma_k$ 算作負的。

現在考慮曲面 (S) 的一般情形。設 M_0 是這曲面的某一點。固定好在這點法線 (n) 的確定的方向，再由點 M_0 起始沿曲面 (S) 連續移動，使得法線 (n) 的方向在連續改變。若當無論怎樣連續移動時，在曲線的任何點法線的方向總是一定的，則這曲面叫做兩側的。在這樣的曲面上，如果我們在起始的點 M_0 所確定的 (n) 的方向是另一個方向，則當連續移動時在所有的點我們就要都得到相反的法線方向。如此我們就有可能來談曲面的兩側，按照我們在點 M_0 所確定了的法線的方向，在其餘的點的法線就有一定方向。能夠固定曲面的那一側，對於積分 (33) 以及當這積分寫成 (35) 的形狀並說明沿曲面的那一側作積分時，就有確定的值。

類似的方式可以確定積分：

$$\iint_{(S)} P\,dydz \text{ 與 } \iint_{(S)} Q\,dxdz$$

其中 $P(x,y,z)$ 與 $Q(x,y,z)$ 是 (S) 上的給定的函數。這兩個積分各與積分

$$\iint_{(S)} P\cos(n,X)\,dS \text{ 與 } \iint_{(S)} Q\cos(n,Y)\,dS$$

全同。

當如此確定這些積分時，公式 (32) 可以寫成：

$$\iiint_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \iint_{(S)} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy,$$

其中右邊要沿曲面的外側作積分。

注意，也有一側的曲面存在，在這樣的曲面上，當法線沿曲面連續移動而其方向連續改變時，可以在相反的方向回到起始點。最簡單的例如所謂莫彼阿斯條。它可以這樣做，取矩形紙條 $ABCD$，擰轉一下再把 AB 邊與 CD 對在一起，使得 A 與 C 重合，B 與 D 重合(圖 56)。若是在得到的圈上塗色，則不必經過這個圈的邊就可以把兩面塗滿顏色。

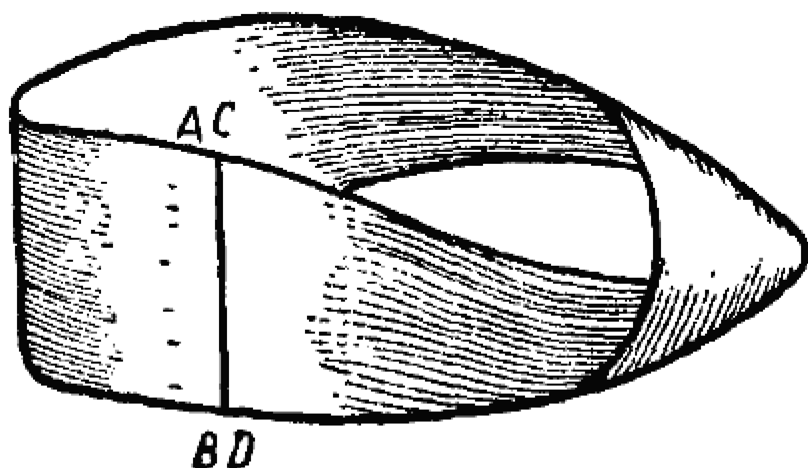


圖 56

65. 矩 討論物質系統的各級的矩的理論時要應用重積分的概念。設給定 n 個質點的質點系：

$$M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n,$$

它們的質量各自等於 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$.

系中每個點到平面 (Δ)，直線 (d) 或點 (D) 的距離的 k 次方冪與該點的質量的乘積之和，

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^k m_i$$

對於 (Δ)，(d) 或 (D) 來講，叫做這個系的 k 級矩。

由這個觀點來看，零級矩就是這個系的總質量

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_i.$$

對於給定的平面 (Δ) 的一級矩，對這個平面來講，叫做這個系的靜矩。在系統的重心的坐標的表達式

$$(36)\qquad x_g=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{m};\quad y_g=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{m};\quad z_g=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}.$$

中我們遇到關於坐標面的靜矩。

在這情形下，到坐標面的距離 x_i, y_i, z_i 要取代數值，就是說，有正有負。

二級矩通常叫做系統的慣性矩。如，表達式

$$\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i m_i;\quad \sum_{i=1}^{n} y^2{}_i m_i;\quad \sum_{i=1}^{n} z^2{}_i m_i$$

是系統對於坐標面的慣性矩；表達式

$$\sum_{i=1}^{n}(y^2{}_i+z^2{}_i)m_i;\quad \sum_{i=1}^{n}(z^2{}_i+x^2{}_i)m_i;\quad \sum_{i=1}^{n}(x^2{}_i+y^2{}_i)m_i$$

是對於坐標軸 OX,OY,OZ 的慣性矩；最後，表達式

$$\sum_{i=1}^{n}(x^2{}_i+y^2{}_i+z^2{}_i)m_i$$

是對於點 O 的慣性距。

除上述的表達式外，還要用到下列的表達式

$$\sum_{i=4}^{n} y_i z_i m_i;\quad \sum_{i=1}^{n} z_i x_i m_i;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i,$$

它們叫做系統對於坐標軸 OX,OY,OZ 的離心矩。

如果我們考慮的不是有限個點的點系，而是連續分佈的質量，則依照質量是沿着直線，平面或是空間分佈的，要把上述的和換成簡單的，二重的或三重的定積分；這時需要用在指定點 M 的密度 $f(M)$ 與單元長度、單元面積或單元容積的乘積來替代因子 m_i。

例如，三維區域 (v) 對於 OX 軸的慣性矩由下面這三重積分表達：

$$\iiint_{(v)}(y^2+z^2)f(M)\,dv.$$

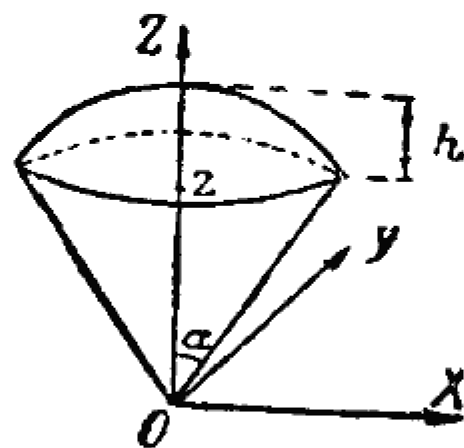


圖 57

若算作密度 $f(M)$ 是常量 f_0，則這個常因子可以由積分號下提出來，於是在公式(36)的分子中的積分具有被積函數 x，y 與 z，而在分母中只是整個區域的容積或面積，這時常數 f_0 就消掉了。

例 1. 求均勻球底錐的重心(圖 57)。這時如圖所示選定好坐標，就只須求縱標

$$z_g = \frac{\iiint\limits_{(v)} z dv}{v}.$$

這裏我們有：

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi a^3 (1 - \cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi a^2 h$$

$$\iiint\limits_{(v)} z dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho\cos\theta \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{8} a^4 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$z_g = \frac{3}{16} a \frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3}{8} a (1 + \cos\alpha) = \frac{3}{8}(2a - h),$$

其中 a 是球半徑。

2.若算作質量只是分佈在錐底的球面 (S) 上，則重心的縱標是

$$z_g = \frac{\int\limits_{(S)} z ds}{S}.$$

其中S是曲面(S)的面積。在這情形下，曲面的方程是$x^2+y^2+z^2=a^2$或$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$

不難驗證：

$$\cos(n,z) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{z}{a}.$$

於是

$$\iint\limits_{(s)} z ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} z \frac{d\sigma_{xy}}{\cos(n, z)} = a \iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma_{xy} = \pi a^3 \sin^2\alpha,$$

其中(σ_{xy})顯然是以原點爲心 $a\sin\alpha$ 爲半徑的圓。

面積S是：

$$s=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma_{xy}=a\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\frac{d\sigma_{xy}}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}=$$

$$=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sin\alpha}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a^2(1-\cos\alpha),$$

結果:

$$z_g=\frac{\pi a^3\sin^2\alpha}{2\pi a^2(1-\cos\alpha)}=a\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

在前一個例中z_g的大小是比較小的

$$\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)=\frac{3}{4}a\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

3.若重心與坐標原點重合，則所有的靜矩等於零，這可以由下列的關係式直接推出來:

$$\iiint\limits_{(v)}xfdv=mx_g;$$

$$\iiint\limits_{(v)}yfdv=my_g,$$

$$\iiint\limits_{(v)}zfdv=mz_g.$$

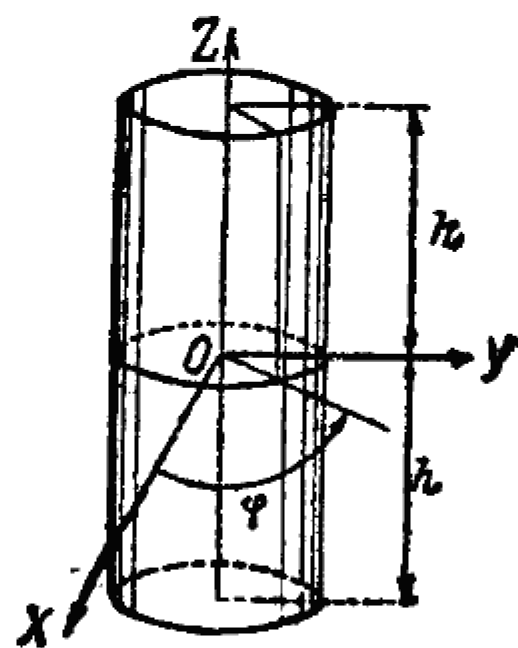


圖　58

4.求均勻正圓柱體(圖58)對於圓柱的軸以及它的正中斷面的直徑的慣性矩。算作密度是常量而等於f_0，我們就有:

$$J_z=f_0\iiint\limits_{(v)}r^2rdrd\varphi dz=2f_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr\int_0^h dz=\pi a^4hf_0=m\frac{a^2}{2}.$$

$$J_x=f_0\iiint\limits_{(v)}(z^2+r^2\sin^2\varphi)rdrd\varphi dz=2f_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h dz\int_0^a(z^2+r^2\sin^2\varphi)rdr$$

$$=2f_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h z^2dz\int_0^a rdr+2f_0\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^h dz\int_0^a r^3dr=\frac{2}{3}\pi h^3a^2f_0+$$

$$+\frac{\pi}{2}ha^4f_0=m\left(\frac{h^2}{3}+\frac{a^2}{4}\right)$$

其中 $2h$ 是柱體的高，a 是它的底半徑，m 是它的質量。

5.求均勻橢圓體的慣性矩：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

用 f_0 來記它的密度，分爲平行於平面 XOY 的層，就有

$$J_{xy}=f_0\iiint\limits_{(v)} z^2dxdydz=f_0\int_{-c}^{+c} z^2\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi abf_0\left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{5}\right)=$$
$$=m\frac{1}{5}c^2.$$

置換字母，不難求出：

$$J_{yz}=m\cdot\frac{1}{5}a^2;\quad J_{zx}=m\ \frac{1}{5}b^2$$

$$J_x=J_{xy}+J_{xz}=m\ \frac{1}{5}(b^2+c^2)$$

$$J_y=m\ \frac{1}{5}(c^2+a^2);\quad J_z=m\cdot\frac{1}{5}(a^2+b^2)$$

$$J_0=J_{xy}+J_{yz}+J_{zx}=m\ \frac{1}{5}(a^2+b^2+c^2).$$

6.求剛體繞 (δ) 軸轉動時的動能。

我們知道，當物體具有角速度 ω 繞 (δ) 軸轉動時，物體的每一點的速度 V 的大小等於角速度與這點到轉動軸的距離之乘積。爲要計算物體的動能，我們把它分成質量單元 Δm，並用 ΔT 來記對應於這單元的動能。於是就有

$$T=\sum\Delta T.$$

由於單元 Δm 的微小性，可以看成它的全部質量集中於它的任何一點 M；這時單元 Δm 的動能 ΔT 就等於

$$\Delta T=\frac{1}{2}V^2\Delta m=\frac{1}{2}\omega^2r_\delta^2f(M)\Delta v,$$

其中 $f(M)$ 是物體在點 M 的密度，而 r_δ 是點 M 到 (δ) 軸的距離。根據三重積分的定義，由此得到：

$$T=\iiint\limits_{(v)}\frac{1}{2}\omega^2r_\delta^2f(M)\,dv=\frac{1}{2}\omega^2J_\delta.$$

其中

$$J_\delta=\iiint\limits_{(v)} r_\delta^2 f(M)\,dv$$

是物體對於轉動軸 (δ) 的慣性矩。

附註 有時計算物體的容積或它的任何級的矩時，全部計算不是利用三重積分來作，而是利用二重積分或者甚至於用單積分來作。這是由於把三重積分表示成單積分的二重積分或二重積分的單積分時，有時內部積分的計算可以由簡單的了解作出來，而不必求積分。這就產生了這樣的效果，使得在計算中不需要三重積分，而只要二重積分或單積分。

例如，界於平面 $z=0$，$z=h$ 以及由曲線 $x=f(z)$ 繞 OZ 軸迴轉而成的曲面之間的容積 (v)，它對於平面 XY 的慣性矩可以用單積分來計算，只要把這物體看成是由平行於平面 XY 的平面圓片組成的。這樣的單元片的容積等於 $\pi[f(z)]^2dz$，於是可以寫成:

$$J_{xy}=\pi\int_0^h z^2[f(z)]^2\,dz.$$

同樣的慣性矩可以由下面這三重積分來表達:

$$J_{xy}=\iiint\limits_{(v)} z^2dxdydz=\int_0^h z^2dz\iint\limits_{(\sigma_z)} dxdy,$$

其中 (σ_z) 是平行於平面 XY 而與它的距離爲 z 的平面在 (v) 上截的斷面。內部的二重積分給出 (σ_z) 的面積，就是說，它等於 $\pi[f(z)]^2$。

§2 曲線積分

66. 曲線積分的定義 設有空間某一曲線 (l)，它具有確定的方向（圖 59）。設 A 是這曲線的起點，B 是端點。在這曲線上，弧長由起點 A 起始計算。我們假設在這曲線上給定一個連續函數 $f(M)$，於是在曲線 (l) 的每一點 $f(M)$ 有確定的數值。由點 $M_0, M_1, \cdots\cdots, M_{n-1}, M_n$ 把 (l) 分爲 n 部分，其中 M_0 與 A 重合，M_n 與 B 重合。在每一部

分 $M_k M_{k+1}$ $(k=0, 1, \cdots\cdots\cdots, n-1)$ 上，取任何一點 N_k，作出和 $\sum_{k=0}^{n-1} f(N_k)\Delta s_k$，其中 Δs_k 是曲線 (l) 上弧 $M_k M_{k+1}$ 的長度。當分割的數目 n 無限增加而每一部分 $M_{k-1}M_k$ 無限減小時，這個和的極限叫做**函數 $f(M)$ 沿 (l) 的曲線積分**並記作：

(1) $$\int_{(l)} f(M)\,ds = \lim \sum_{k=0}^{n-1} f(N_k)\,\Delta s_k.$$

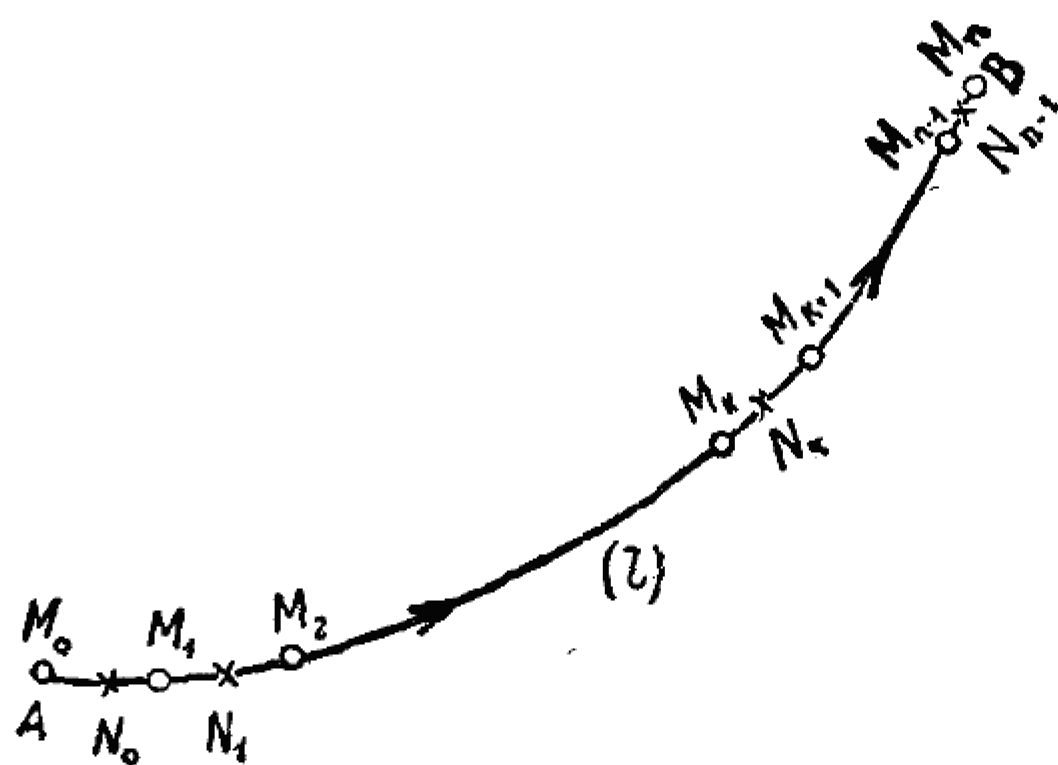


圖　59

假定曲線 (l) 上的變點 M，可以由弧長 $s=\overset{\frown}{AM}$ 來完全確定，於是函數 $f(M)$ 就可以算作自變量 s 的函數，就是說 $f(M)=f(s)$，而且積分 (1) 就是通常的定積分：

$$\int_{(l)} f(M)ds = \int_0^l f(s)ds,$$

其中 l 是曲線 (l) 的弧長。注意，曲線 (l) 可以是封閉的，就是說 B 可以與 A 重合。

到現在爲止，我們沒有用到曲線 (l) 具有方向這件事。以後這是很重要的。引用空間直角坐標軸，設變點 M 由坐標 (x,y,z) 來確定。

設 $F(x,y,z)$ 是沿曲線 (l) 的某一連續函數。把點 N_k 的坐標記作(ξ_k, η_k, ζ_k)，並用 Δx_k 記線段 $\overline{M_kM_{k+1}}$ 在 OX 軸上的投影。量 Δx_k 可以是正的，也可以是負的，甚至於可以是零。不要 Δs_k，而作 Δx_k 與 $P(N_k)=P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ 的乘積之和，也就是和

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k.$$

這個和的極限也叫做 $P(x,y,z)$ 沿 (l) 的曲線積分並記作

$$\int_{(l)} P(x, y, z)\,dx = \lim \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k.$$

完全類似的可以確定積分：

$$\int_{(l)} Q(x,y,z)dy \text{ 與 } \int_{(l)} R(x,y,z)dz,$$

其中 $Q(x,y,z)$ 與 $R(x,y,z)$ 是沿 (l) 的連續函數。這三個積分相加，就得到一般形狀的曲線積分，它被記作：

$$(2)\qquad \int_{(l)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

依照定義，積分(2)是下面的形狀的和的極限

$$(3)\quad \sum_{k=0}^{n-1}[P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k],$$

其中 Δy_k, Δz_k 各爲線段 $\overline{M_kM_{k+1}}$ 在 OY 軸與 OZ 軸上的投影。不難建立起積分(2)與積分(3)的連繫。曲線 (l) 上變點 M 的坐標可以算作是弧長 $s=\overset{\frown}{AM}$ 的函數。我們知道[1,160]，這些函數的微商給出曲線(l)的切線的方向餘弦，就是

$$\frac{dx}{ds}=\cos(t,\ X);\ \frac{dy}{ds}=\cos(t,\ Y);\ \frac{dz}{ds}=\cos(t,\ Z),$$

其中 t 是在變點 M 曲線 (l) 的切線的方向，也就是曲線的方向。我們總是用記號 (α,β) 來記 α 與 β 兩個方向的夾角，這個角的餘弦的值不依賴於讀角的方向，我們也沒有固定它。略去高級無窮小，可以算作：

$$\Delta x_k=\cos(t_k,X)\Delta s_k;\ \Delta y_k=\cos(t_k,Y)\Delta s_k;\ \Delta z_k=\cos(t_k,Z)\Delta s_k,$$

其中 t_k 是在點 N_k 的切線方向，於是作爲和 (3) 的極限的積分 (2) 就化爲 (1) 的形狀：

$$(4)\quad \int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(l)}[P\cos(t,X)+Q\cos(t,Y)+R\cos(t,Z)]ds$$

其中 $P,\ Q,\ R$ 可以算作 s 的沿 (l) 的函數。

設有曲線 (l) 的參變方程：

$$(5)\qquad x=\varphi(\tau);\ y=\psi(\tau);\ z=\omega(\tau),$$

這裏當參變量 τ 由 a 變到 b 時，點 $(x,\ y,\ z)$ 畫出由 A 到 B 的曲線。我們算作在閉區間 $(a\ b)$ 上函數 (5) 連續而有連續的一級微商，並且爲確定起見我們算作 $a<b$。

設點 M_k 對應於參變量的值 $\tau=\tau_k$。考慮 (3) 中第一個和。設 $\tau=\tau_k'$ 是對應於曲線上點 $(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)$ 的參變量的值。依照改變量公式 [I, 63]，可以寫成：

$$\Delta x_k=\varphi(\tau_{k+1})-\varphi(\tau_k)=\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k),$$

其中 τ_k'' 是 τ 在區間 (τ_k,τ_{k+1}) 中的某一個值。如此，所說的和可以寫成：

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\Delta x_k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} P[\varphi(\tau_k'),\ \psi(\tau_k'),\ \omega(\tau_k')]\,\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k).$$

顯然，當差 $(\tau_{k+1}-\tau_k)$ 中之最大的趨向零時取極限，這個和與和

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} P[\varphi(\tau_k''),\ \psi(\tau_k''),\ \omega(\tau_k'')]\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k),$$

都趨向確定的積分

$$\int_a^{\omega} P[\varphi(\tau),\ \psi(\tau),\ \omega(\tau)]\varphi'(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

現在證明和 (6) 與 σ 之差趨向零。由此就直接推出和 (6) 有極限，而且極限等於積分 (7)。所說的差是:

$$\eta=\sum_{k=0}^{n-1}\{P[\varphi(\tau_k'),\ \psi(\tau_k'),\ \omega(\tau_k')]-$$

$$-P[\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k''),\ \omega(\tau_k'')]\}\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k).$$

τ_k' 與 τ_k'' 兩個值既是都屬於區間 $(\tau_k,\ \tau_{k+1})$，根據連續函數 $P[\varphi(\tau),\psi(\tau),\omega(\tau)]$ 的一致連續性，對於任何的小正數 ε，存在一個這樣的 δ，使得只要 $(\tau_{k+1}-\tau_k)<\delta$，就有 [1, 32]

$$|P[\varphi(\tau_k'),\psi(\tau_k'),\omega(\tau_k')]-P[\varphi(\tau_k''),\psi(\tau_k''),\omega(\tau_k'')]|<\varepsilon,$$

如此，η 的絕對值就有下面的估計值:

$$|\eta|<\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}|\varphi'(\tau_k'')|(\tau_{k+1}-\tau_k).$$

但是在區間 (a,b) 上連續的函數 $\varphi'(\tau)$ 在這區間上是有界的，就是說 $|\varphi'(\tau)|<K$，其中 K 是一個確定的數 [1, 35]。由此就有:

$$|\eta|<\varepsilon K\sum_{k=0}^{n-1}(\tau_{k+1}-\tau_k)=\varepsilon K(b-a).$$

由於 ε 的任意性，我們看出 η 實際是趨向零的，於是和 (6) 有極限 (7)。同樣的考慮 (3) 中其他的和，可以證明，在所作的假定之下，積分 (2) 可以化爲普通定積分的形狀：

$$(8)\quad \int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b [P\varphi'(\tau)+Q\psi'(\tau)+R\omega'(\tau)]\,d\tau,$$

其中 P、Q、R 應當依照公式 (5) 通過 τ 來表達。

在 [I. 94] 中所講的某些簡單積分的性質可以直接推廣到曲線積分的情形。例如：

I. 若曲線 (l) 是由各部分 (l_1), (l_2), ……, (l_m) 組成的，則

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(l_1)} Pdx+Qdy+Rdz+$$
$$+\int_{(l_2)} Pdx+Qdy+Rdz+\ldots+\int_{(l_m)} Pdx+Qdy+Rdz.$$

II. 曲線積分的大小不僅是由被積表達式與積分路線來確定，它與所說的曲線 (l) 的方向也有關係，並且**當改變積分路線的方向，曲線積分只是變號。**

若整個的曲線 (l) 不滿足上述的條件，而它可以分成有很多個部分，其中每一部分具有參變方程 (5)，於是公式 (7) 可以應用於每一部分，而沿整個曲線的積分就可以表示成沿各個部分的積分之和。不難證明，這相當於對於整個曲線的和 (3) 的極限。以後我們只考慮滿足上述條件的曲線 (l)。最後還要提出，若 τ 是弧長 $s=\overset{\frown}{AM}$，則公式 (8) 成爲公式 (4)。

若曲線 (l) 是位於平面 XY 上的平面曲線，則積分 (2)有如

$$\int_{(l)} P ds+Q dy,$$

其中 P 與 Q 是沿 (l) 確定的 (x, y) 的函數。

67. 力場作的功. 例 計算功的問題自然的引到曲線積分的概念。設在力 F 的作用下點 M 畫出軌線 (l)， 而 F 是沿 (l) 的點的函數。爲要計算功，把 (l) 分成小的部分，考慮這些部分中的一個 M_kM_{k+1}。由於這部分很小，在這一部分上差不多可以算作力 F 具有常數值，就取它在點 M_k 應有的值，並且可以用弦 $\overline{M_kM}_{k+1}$ 來替代弧 $\widehat{M_kM}_{k+1}$。如此，在這一小部分上，功可以近似的由乘積

$$\Delta E_k \sim |F_k||\overline{M_kM}_{k+1}|\cos(F_k, \overline{M_kM}_{k+1})$$

來表達， 其中用 $|F_k|$ 記在點 M_k 的向量 F 的長度， 用 $|\overline{M_kM}_{k+1}|$ 記線段 $\overline{M_kM}_{k+1}$ 的長度， 用 ΔE_k 記在這一部分 $\widehat{M_kM}_{k+1}$ 上的功。 利用由解析幾何學已知的關於兩個方向的夾角的公式，可以寫成：

$$\Delta E_k \sim |F_k||\overline{M_kM}_{k+1}|[\cos(F_k, X)\cos(\overline{M_kM}_{k+1}, X)+$$
$$+\cos(F_k, Y)\cos(\overline{M_kM}_{k+1}, Y)+\cos(F_k, Z)\cos(\overline{M_kM}_{k+1}, Z)],$$

或者，去掉括號並用 P, Q, R 記 F 在各坐標軸上的投影：

$$\Delta E_k \sim P_k\Delta x_k+Q_k\Delta y_k+R_k\Delta z_k,$$

其中 P, Q, R 的附標指明要取這些函數在點 M_k 的值。作出各部分上功的和再取極限，就得到對於全部的功的正確表達式：

$$E=\int_{(l)} P dx+Q dy+R dz.$$

例 1. 常重力作用在質量爲 m 的質點 M 上，由位置 $M_1(a_1, b_1, c_1)$ 沿任何曲線 (l) 移動到 $M_2(a_2, b_2, c_2)$ 時，所作的功由積分

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{c_1}^{c_2} mgdz=mg(c_2-c_1)$$

表達(我們取 OZ 軸鉛直向下)，由此看出，這個功只依賴於點的起始位置與最終位置，而與點運動所經的路徑無關。這裏我們遇到曲線積分的這樣一個例，它的大小只依賴於求積分的起點與終點，而與路徑無關。

2. 求當質量為 1 的質點由位置 M_1 移動到位置 M_2 時，向着質量為 m 的不動中心的引力所作的功。把不動中心放在坐標原點，用 r 記動點的向量半徑，我們看出，力 F 的方向與 $\overline{OM}$ 的方向相反，而大小等於 $\frac{fm}{r^2}$，其中 f 是引力常數。如此求出：

$$P=-\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{x}{r};\quad Q=-\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{y}{r};\quad R=-\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{z}{r}$$

$$E=-fm\int_{(l)}\frac{xdx+ydy+zdz}{r^3}=-fm\int_{(l)}\frac{r\,dr}{r^3}=fm\int_{(l)}d\left(\frac{1}{r}\right)$$

若用 r_2 與 r_1 各記點 M_2 與 M_1 到引力中心的距離，則

$$E=fm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

這個功，也就是這個曲線積分，只依賴於起點與終點，而與路徑無關。

若引用質點的勢量

$$U=\frac{fm}{r},$$

於是

$$P=\frac{\partial U}{\partial x};\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y};\quad R=\frac{\partial U}{\partial z},$$

則功就由勢量 U 在點 M_2 與 M_1 的值之差來表達，就是說

$$E=U(M_2)-U(M_1).$$

在以下的例中，我們考慮沿平面曲線的曲線積分。

3. 考慮密度均勻的不可壓縮流體的平面穩定流動，我們算作它的密度等於一。在這樣

的運動中，在點 $M(x,y)$ 的流體的質點的速度 $\boldsymbol{v}$ 只依賴於 (x,y)。我們計算這流體在單位時間內通過給定的界線 (l) 的量(圖 60)。用 u 與 v 各記速度 $\boldsymbol{v}$ 在兩坐標軸上的投影。把界線 (l) 分爲單元 $\overset{\frown}{MM'}=ds$。算作這單元上所有的質點的速度近似相同，我們看出，對於非常小的時間單元 dt，在這流動中，這個單元 ds 上的所有的點在向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向移動

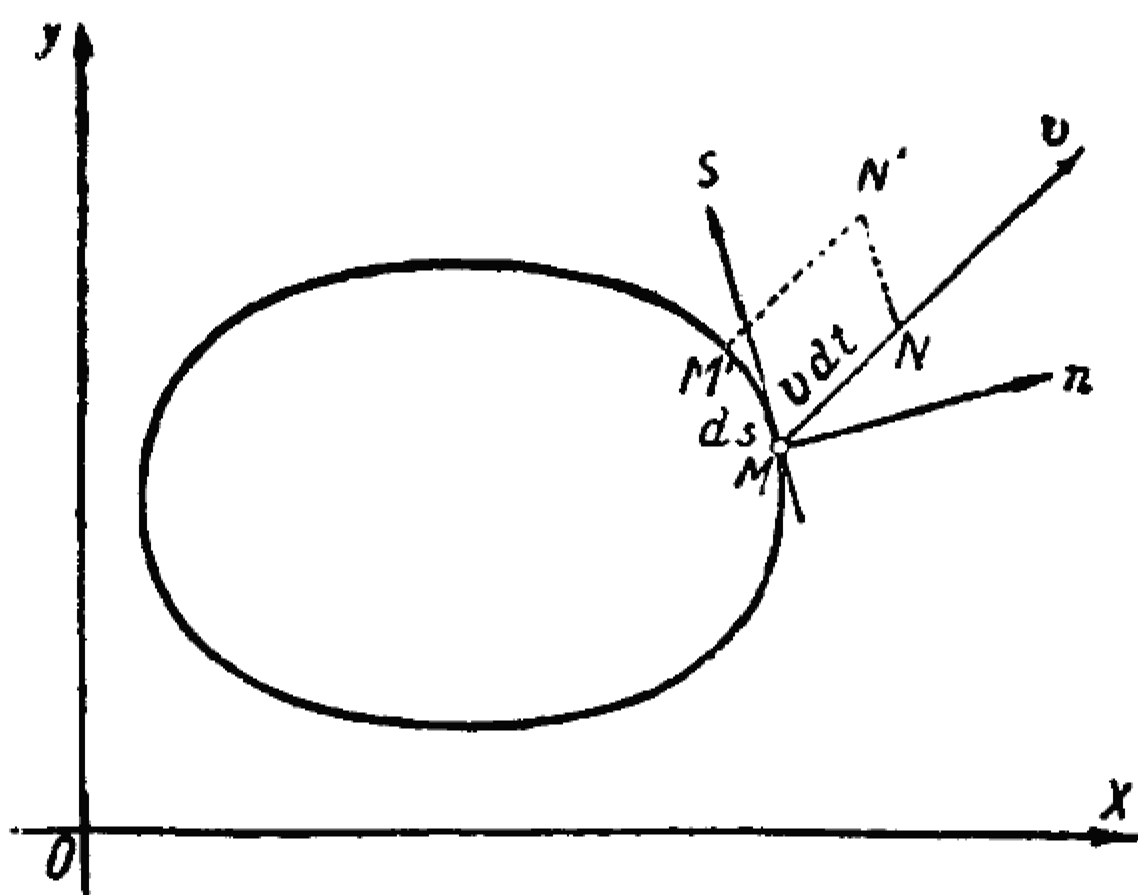


圖 60

一段 $|\boldsymbol{v}|dt$，而達到位置 NN'。平行四邊形 $MNN'M'$ 的面積由底 ds 與一個量的乘積來表達，這個量就是向量 $\boldsymbol{v}\,dt$ 在曲線 (l) 的外向法線的方向 $(\boldsymbol{n})$ 上的投影，就是

$$\text{面積}\ MNN'M'=|\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})\,dt\,ds,$$

其中 $|\boldsymbol{v}|$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 的長度。用 $(\boldsymbol{s})$ 記曲線 (l) 逆鐘針轉時的切線方向，就有:

$$(\boldsymbol{n},X)=(\boldsymbol{s},Y);\quad (\boldsymbol{n},Y)=(\boldsymbol{s},X)-\pi, \tag{9}$$

其中我們用 (α,β) 記由 α 的方向轉到 β 的方向的角度，逆鐘針方向算作正的。如此我們就有:

$$\cos(\boldsymbol{n},X)=\cos(\boldsymbol{s},Y);\quad \cos(\boldsymbol{n},Y)=-\cos(\boldsymbol{s},X).$$

但是，已知兩個方向之間的角的餘弦由公式

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{v},X)\cos(\boldsymbol{n},X)+\cos(\boldsymbol{v},Y)\cos(\boldsymbol{n},Y)$$

來表達，或者根據(9):

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{v},X)\cos(\boldsymbol{s},Y)-\cos(\boldsymbol{v},Y)\cos(\boldsymbol{s},X)$$

代入到面積的表達式中並注意

$$|\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{v},X)=u;\quad |\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{v},Y)=v,$$

$$ds\cos(\boldsymbol{s},X)=\Delta x;\quad ds\cos(\boldsymbol{s},Y)=\Delta y,$$

最後得到:

$$面積 MNN'M'=(-v\Delta x+u\Delta y)dt$$

這裏，若角 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})$ 是鈍角，則 $\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})$ 是負的，於是得到的面積帶有負號，這個號對應於流體流入以曲線 (l) 爲界的區域的情形。

在時間 dt 內，流體通過界線 (l) 的全部的量就是

$$dt\sum(-v\Delta x+u\Delta y)=dt\int_{(l)}-vdx+udy,$$

而在單位時間通過的流體是

$$q=\int_{(l)}-vdx+udy, \tag{10}$$

其中沿曲線 (l) 求積分要取逆鐘針方向。注意，界線 (l) 可以是封閉的。當流體流向法線 $(\boldsymbol{n})$ 所指的一側時，由公式(10)計算出的流體的量 q 帶有(+)號，若流向相反的一側，則帶有(−)號。

若界線 (l) 內沒有放出流體的源泉(正的源泉)，也沒有流入的吸吮點(負的源泉)，則 q 應當等於零，因爲否則出現在 (l) 內的流體或者增多或者減少，這與不可壓縮以及沒有源泉的性質相違背。

如此，不可壓縮流體的穩定的平面流動由等式

$$\int_{(l)}-vdx+udy=0 \tag{11}$$

突出的表示出來，對於任何內部沒有源泉的界線 (l)，這等式應當成立。

4. 在熱力學中任何物體的情况由三個物理的量來確定：壓力 p，容積 v 以及(絕對)溫度 T。這些個量由一個關係式

$$f(v,\ p,\ T)=0$$

連繫；例如，在理想氣體的情形下有克拉玻朗公式：

$$pv-RT=0$$

如此物體的情况就由這三個量中的兩個來確定，例如 p 與 v，也就是由平面 pov 上的點 $M(p,v)$ 來確定。

若物體的情况在改變，則確定它的點在平面 pov 上畫出曲線，這曲線叫做所考慮的過程

的線圖，若物體會回到原始的情況，這種過程就叫做循環過程，而它的線圖就是封閉的曲線(l)。

爲要確定在這過程中，物體所吸收的熱量，把這過程分爲非常小的單元，對應的p, v, T就有非常小的改變量$\Delta p, \Delta v, \Delta T$。若這些量中只有一個改變，則物體所吸收的熱量與對應的變量的改變量近似成比例；若三個變量全都立刻改變，則依照小作用量的原理[I,68]，全改變量ΔQ就等於這些部分改變量之和。換句話說，就是我們有下面形狀的近似等式

$$\Delta Q \approx A\Delta p + B\Delta v + C\Delta T,$$

於是最後得到：

$$Q = \sum \Delta Q = \int Adp + Bdv + CdT. \tag{12}$$

根據物態方程，通過v與p來表達T，我們得到：

$$T = \varphi(v, p); \qquad dT = \frac{\partial \varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv.$$

把T與dT的這兩個表達式代入到(12)的右邊，最後求出

$$Q = \int_{(l)} Pdp + Vdv,$$

其中P與V是v與p的已知函數。

5. 設所考慮的過程是燃氣機或蒸汽機的操作的氣缸中氣體或蒸汽的膨脹或收縮。那時，容積的改變Δv就與在壓力p的作用下氣缸中活塞的位移成比例，所以壓力p產生的功，當適當的選擇單位時，就由乘積$p\Delta v$來表達，而在整個循環過程中全部的功就是

$$E = \int_{(l)} pdv.$$

68. 面積與曲線積分　我們計算在平面XY上界於封閉曲線(l)的區域(σ)的面積σ。爲簡單起見，設平行於OY軸的直線與曲線(l)的交點不多於兩個。用y_1記平行於OY軸的直線進入區域(σ)的點的縱坐標，y_2記它穿出區域(σ)的點的縱坐標，並用a與b各記曲線(l)的兩個極端點的橫坐標（圖61），我們就有[I，101]：

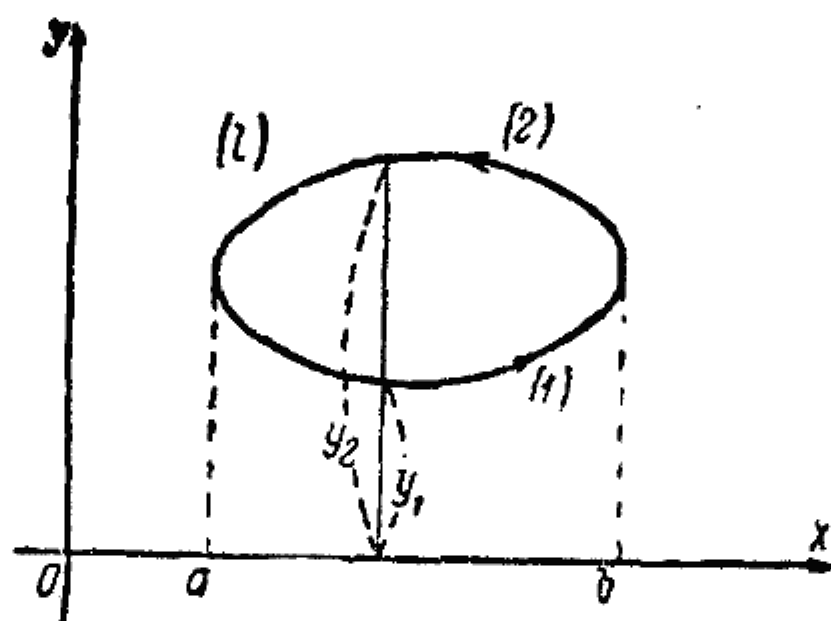


圖 61

$$\sigma=\int_a^b (y_2-y_1)dx.$$

設(1)與(2)各爲對應於進入點與穿出點的曲線的一部。積分

$$\int_a^b y_2 dx$$

就恰好是曲線積分

$$\int_{(2)} y dx,$$

沿由 $x=b$ 到 $x=a$ 的方向就要取相反的符號。同樣積分

$$\int_a^b y_1 dx$$

與曲線積分

$$\int_{(1)} y dx$$

全同，取由 $x=a$ 到 $x=b$ 的方向。

最後就有：

$$(13)\quad \sigma=\int_a^b y_2dx-\int_a^b y_1dx=-\left[\int_{(1)a}^{b} ydx+\int_{(2)b}^{a} ydx\right]=-\int_{(l)} ydx$$

這裏曲線 (l) 取逆鐘針方向。

同樣方法可以求出

$$(14)\quad \sigma=\int_{(l)} xdy.$$

相加再用二除，就得到

$$(15)\quad \sigma=\frac{1}{2}\int_{(l)} xdy-ydx.$$

我們得出公式 (13) 時，假設了平行於 OY 軸的直線與 (l) 的交點不多於兩個。不難看出，對於較普遍的界線，這個公式仍然正確。先考慮區域 (σ) 界於兩個平行於 OY 軸的直線的線段以及曲線 (1)，(2) 的情形(圖62)。重複上面的討論，得到：

$$\sigma=-\left[\int_{(1)} ydx+\int_{(2)} ydx\right].$$

在 CD 與 BA 上，x 是常量，於是 $dx=0$，所以沿這兩個線段 $\int ydx$ 等於零。在上式右邊補充上這兩個等於零的積分，並給它們帶上負號，於是對於所考慮的情形得到公式 (13)。對於具有更普遍形式的界線 (l) 的區域（圖63），我們採取下述的方法。引平行於 OY 軸的直線，把 (σ) 分爲有限個部分，再對每一部分應用公式 (13)。這些公式相加，在左邊就得到全部區域的面積 σ，而右邊是沿界線 (l) 的積分，因爲，如上所述，沿所作的輔助界線的積分等於零。同樣的，對於普遍形狀的界線，公式 (14) 與 (15) 也仍然正確。

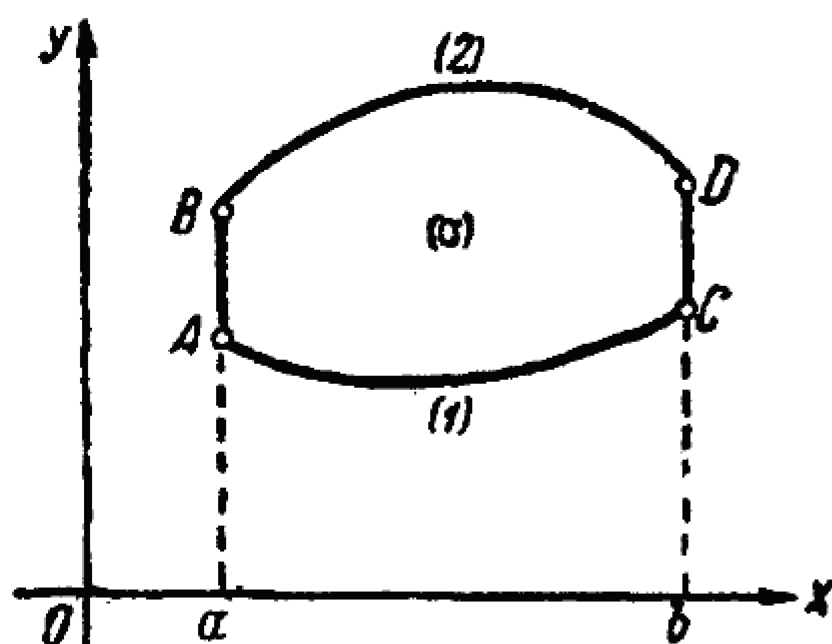


圖 62

圖 63

在橢圓

$$x=a\cos t;\quad y=b\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的情形下，公式(15)給出

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)\,dt=\frac{1}{2}ab\int_{0}^{2\pi}dt=\pi ab.$$

在上述關於面積的公式中，當求沿(l)的積分時，這個界線要取逆鐘針的方向才對。或者，最好是說，界線(l)要取這樣的方向，使得要把OX軸在這方向轉一個角度$\frac{\pi}{2}$時，它與OY軸的方向重合。若OY軸的方向不是向上的，而是向下的，則這個關於面積的公式仍然正確，不過沿(l)求積分時就應當取順鐘針方向。以後我們總保持上述關於平面上封閉界線的方向的條件。

69. 格林公式 現在我們建立一個基本公式，這個公式連繫着沿曲面的積分與沿這個曲面的界線的曲線積分。我們由曲面是平面區域的情形開始。在這情形下，我們所要建立的公式叫做**格林公式**。

應用公式(7)[56]計算二重積分

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}d\tau$$

其中 $P(x,y)$ 是 (x,y) 的函數

先對 y 求積分，並算作平行於 OY 軸的直線與區域 (σ) 的界線 (l) 的交點不多於兩點(圖61)，我們得到：

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\, dx.$$

另一方面，積分

$$\int_a^b P(x, y_1)\, dx, \quad \int_a^b P(x, y_2)\, dx$$

就恰好各自是由點 $x=a$ 到 $x=b$ 沿界線 (l) 的部分 (1) 與 (2) 的曲線積分

$$\int P(x, y) dx$$

改變其中等二個的積分的方向，就得到：

$$\int_a^b P(x, y_2)\, dx = -\int_b^a P(x, y_2)\, dx = -\int_{(2)\,b}^{a} P(x, y)\, dx,$$

由此

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\int_{(2)\,b}^{a} P(x, y)\, dx - \int_{(1)\,a}^{b} P(x, y)\, dx,$$

或

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\int_{(l)} P dx, \tag{16}$$

其中界線 (l) 取逆鐘針方向(圖61)。

用同樣方法計算積分:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, d\sigma,$$

其中 Q 是 (x, y) 的另一個函數。爲簡單起見，設平行於 OX 軸的直線與界線 (l) 的交點不多於兩個，我們得到:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\, dy,$$

這個表達式也可以化爲沿封閉界線的曲線積分

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, d\sigma = \int\limits_{(l)} Q dy. \tag{17}$$

由方程(17)減掉方程(16)，我們就得到格林公式

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \int\limits_{(l)} P dx + Q dy. \tag{18}$$

我們引出公式(16)時，假定了平行於 OY 軸的直線與 (l) 的交點不多於兩個。像上一段中的討論完全一樣，可以證明，對於普遍形狀的區域，這個公式也是正確的。這個附註同樣適用於公式(17)與(18)。

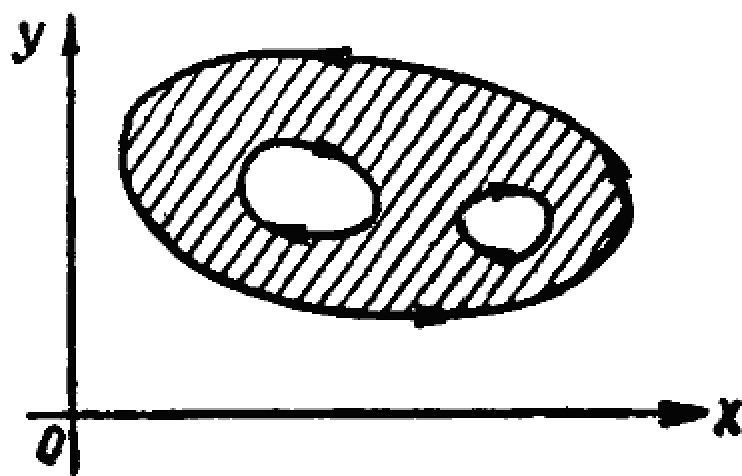


圖 64

當區域 (σ) 界於幾條曲線時（圖 64），這些討論仍然適用。這時，在公式(18)的右邊，需要沿作爲這區域的界線的所有的曲線求積分，並且當坐標軸取如圖 64 的方向時，沿外邊界線的積分應當取逆鐘針方向，

而沿裏面界線的積分應當取順鐘針方向；就是說，沿所有的界線求積分時，區域 (σ) 保持在左邊。

注意，格林公式 (18) 可以寫成另外的形狀。設 t 是曲線 l 的切線，與 l 取相同的方向，而且 n 是 l 的法線，取由 σ 向外的方向。由 n 的方向逆鐘針轉一個直角就得到 t 的方向，於是推知，對於 t 及 n 與坐標軸作成的角，我們有：$(t,X)=\pi+(n,Y)$ 與 $(t,Y)=(n,X)$，若 ds 是曲線的弧單元，則 $dx=ds\cdot\cos(t,X)$，$dy=ds\cdot\cos(t,Y)$。就是，$dx=-ds\ \cos(n,Y)$，$dy=ds\ \cos(n,X)$。代入到公式 (18) 中，並用 $(-Q)$ 替代 P，P 替代 Q，就得到：

$$(18)\quad \iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\sigma=\int\limits_{(\ )}\Big[P\cos(n,X)+Q\cos(n,Y)\Big]ds$$

格林公式的這個形狀表示出在平面情形下的奧斯特洛格拉得斯基公式。

70.司鐸克斯公式　現在講任何具有界線 (l) 的非封閉曲面 (S) 的情形 (圖65)。假設平行於 z 軸的直線與 (S) 只交於一點，並保留 [62] 中所有的記法。l 在平面 XY 上的投影給出區域 (σ_{xy}) 的界線 (λ)。界線 (λ) 的正方向取作逆鐘針方向，並且 (l) 的正方向取對應的方向。(S) 的法線 n 的方向這樣取，使得它與 OZ 軸作成銳角，於是 $\cos(n,Z)>0$。這時，[62] 公式 (24) 中需要取下邊的符號，由這些公式給出：

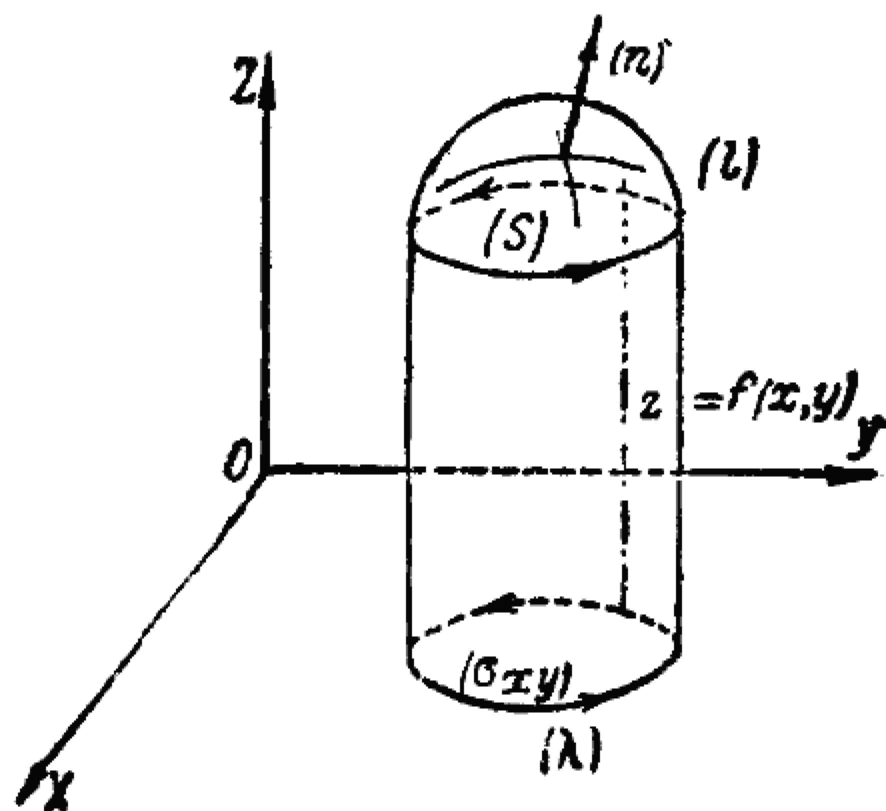


圖 65

(19)　$p\cos(n,Z)=-\cos(n,X)$；$q\cos(n,Z)=-\cos(n,Y)$，

而［63］中公式（26）可以寫成：

(20)
$$d\sigma_{xy}=\cos(n,Z)dS$$

設 $P(x,y,z)$ 是給定的在曲面 (S) 附近的任何函數，並且它以及它的一級微商是連續的。我們考慮積分

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx.$$

曲線 (l) 在 (S) 上，利用這曲面的方程：$z=f(x,y)$，我們可以在積分號下用 $f(x,y)$ 代入作 z。這時被積函數 $P[x,y,f(x,y)]$ 就只含有 x 與 y。(λ) 上變點的坐標 (x,y) 也就是 (l) 上對應點的這兩個坐標，所以沿 (l) 的積分可以用沿 (λ) 的積分來替換：

$$\int_{(l)} P(x,y,z)\,dx=\int_{(\lambda)} P[x,y,f(x,y)]\,dx.$$

對於右邊的積分應用格林公式（18），這裏，在所給的情形下，$P=P[x,y,f(x,y)]$；$Q=0$ 而 (l) 是 (λ)。計算 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 時，需要求 P 直接對 y 的微商，以及通過第三變量 z 對 y 的微商，z 我們已經用 $f(x,y)$ 替換了：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

這裏表達式 P 中的字母 z 的意思應當是 $f(x,y)$。公式（18）給出：

$$\int_{(l)} P(x,y,z)\,dx=\int_{(\lambda)} P[x,y,f(x,y)]\,dx=$$
$$=-\iint_{(\sigma_{xy})}\left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]d\sigma_{xy}.$$

依照(20)，通過曲面(S)的單元dS來表達$d\sigma_{xy}$，這個二重積分就化爲沿曲面(S)的積分[63]:

$$\int_{(l)} P(x,\ y,\ z)\,dx =$$
$$= -\iint_{(S)} \left[\frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,\ y,\ z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right]\cos(n,\ Z)\,dS,$$

於是，利用公式(19)中第三個，最後得到:

$$(21)\qquad \int_{(l)} P\,dx = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(n,\ Y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(n,\ Z)\right] dS.$$

若$Q(x,y,z)$與$R(x,\ y,\ z)$是給定的(S)附近的另外兩個函數，則按照坐標x,y,z的循環排列，得到兩個類似的公式:

$$\int_{(l)} Q\,dy = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(n,\ Z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(n,\ X)\right] dS$$
$$\int_{(l)} R\,dz = \iint_{(S)} \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos(n,\ X) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(n,\ Y)\right] dS.$$

把所得到的三個公式相加，就求出司鐸克斯公式:

$$(22)\quad \int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,\ X) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,\ Y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,\ Z)\right] dS.$$

這個公式連繫了沿曲面的界線的曲線積分與沿這曲面的積分，並且這個關係式類似於連繫着沿某一三維區域的表面的積分與沿這區域的積分的奧斯特洛格拉得斯基公式。格林公式，是當(S)是平面XY上的平面區域時司鐸克斯公式的一個特殊情形。這時，(l)是平面XY上的封閉曲線，$dz=0$，而且(n)與OZ的方向相同，於是

$\cos(n, X)=\cos(n, Y)=0$，$\cos(n, Z)=1$。把所有這些代入到 (22) 中，就得到公式 (18)。

我們引出公式 (21) 時，假定了平行於 OZ 軸的直線與 (S) 只交於一點。若不是這樣，就用輔助曲線把 (S) 分成幾部分，使得每一部分滿足上述條件，於是對每一部分可以應用公式(21)。如此，把對於所有各部分得到的公式相加，左邊就有沿界線 (l) 的積分；因爲沿輔助界線的積分要在相反的方向各取一次，於是相消。在右邊我們得到沿整個曲面 (S) 的二重積分，就是說公式 (21) 在普遍的情形下是正確的。同樣的附註對於一般公式(22)也對。這時，只要對於 (l) 與法線 (n) 的方向保持有下述的條件：**沿 (l) 轉時依法線 (n) 的方向來觀察，曲面 (S) 應當在左邊**。這個法則與圖 65 上所標明的坐標系的選取有連繫。在這系中，依 OZ 軸的方向來觀察，看出當 OX 逆鐘針轉一個角度 $\frac{\pi}{2}$ 時，轉到 OY。假若這樣轉時需要取順鐘針方向，則上面的法則中，"左邊"這兩個字就需要換成"右邊"。

若採用[64]中所述的曲面積分的記法，則公式 (23) 可以寫成下面的形狀：

$$
\int_{(l)} P dx + Q dy + R dz =
$$
$$
(23)\qquad = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.
$$

沿曲面 (S) 的那一側以及 (n) 的方向都依照上述的法則來取。

71. 平面上曲線積分與路徑的無關性 [67] 中所講的幾個曲線積分的例說明了，在某些情形下，曲線積分的大小與積分路徑無關，只依賴於求積分的起點與終點，而在另外的情形下，求積分所沿的弧會影響積分的大小。現在，我們利用格林公式與司鐸克斯公式，來求在什麼條件下積分的大小才不依賴於積分路徑。我們由平面的情形開

始，先求曲線積分

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy$$

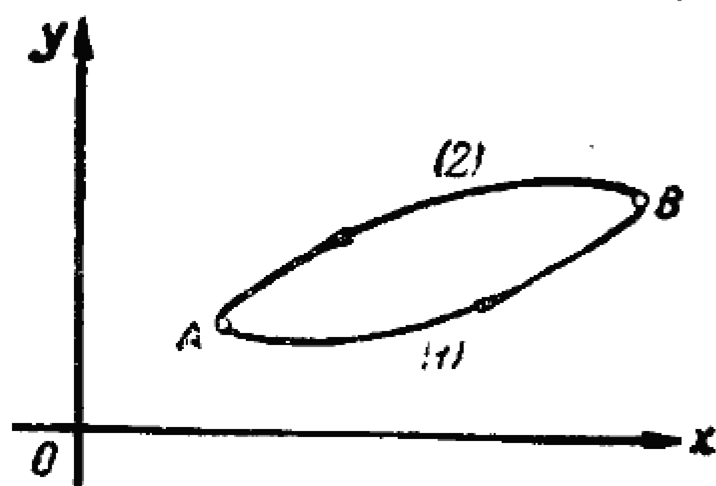


圖 66

與路徑無關的條件。由曲線 (1) 與 (2) 連接點 (A) 與 (B) (圖66)，我們就應當有:

$$(24)\qquad (1)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy=(2)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy,$$

或者利用性質 II [66]:

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy-(2)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy=0,$$

$$(25)\quad (1)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy+(2)\int_{(B)}^{(A)} Pdx+Qdy=\int_{(l)} Pdx+Qdy=0,$$

其中 (l) 是由曲線 (1) 與 (2) 組成的封閉曲線，在 (1) 上取由 (A) 到 (B) 的方向，在 (2) 上取由 (B) 到 (A) 的方向。如此，由於點 (A) 與 (B) 的任意性，我們看出，沿任何封閉界線 (l) 的積分應當等於零。反之，若沿封閉界線 (l) 的積分等於零，則沿 (1) 的積分等於沿 (2) 的積分，因爲由等式 (25) 反回來可以推出等式 (24)。若連接點 A 與 B 的曲線 (1) 與 (2) 相交，則用一條不與曲線 (1) 及 (2) 相交的曲線 (3) 來連接 A 與 B，由等式

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy=(3)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy$$

$$(2)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy=(3)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy$$

就有：

$$(1)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy=(2)\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy.$$

所以，**積分與路徑無關這條件，與沿任何封閉界線 (l) 的積分等於零的條件一致。**

若滿足後面這條件，則由公式 (15) 我們得到：

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0, \tag{26}$$

這裏，積分區域 (σ) 可以任意的取。

以下我們證明，由此推出

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{27}$$

是恒等式，就是說，**對於所有的 x 與 y 的值，這等式成立。**

爲此，設在某一點 $C(a\ b)$ 差

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)$$

不等於零，例如它大於零。根據微商 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 的連續性，我們可以假設上述的差在某一個以 C 爲心的小圓 (σ_0) 上是正的。作出積分

$$\iint_{(\sigma_0)} f(x\ \ y)\,d\sigma=\iint_{(\sigma_0)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma,$$

並對它應用中值定理[61]：

$$\iint_{(\sigma_0)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=f(\xi,\ \eta)\,\sigma,$$

其中 (ξ,η) 是 (σ_0) 中某一點，所以 $f(\xi,\eta)>0$，由此推出，

$$\iint\limits_{(\sigma_0)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma>0,$$

而這與對於任何的區域 (σ) 積分 (26) 等於零相違背。所以條件 (27) 是積分與路徑無關的必要條件。不難看出，它也是充分條件，因爲根據 (18)，由條件 (27) 推出，沿任何封閉曲線，積分 $\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ 等於零，這就相當於積分與路徑無關。

所以，**條件 (27) 是一個必要且充分條件，使得積分**

$$\int\limits_{(A)}^{(B)}Pdx+Qdy \tag{28}$$

與積分路徑無關，而只是點 A 與 B 的坐標的函數。

若這條件滿足，我們固定住點 $A(x_0,y_0)$，而算作只是點 $B(x,y)$ 在變，則積分 (28) 是 $(x\ y)$ 的函數，或者說是點 B 的函數：

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)}Pdx+Qdy=U(x,y). \tag{29}$$

我們來討論這個函數的性質。保持 y 不變，只給 x 一個改變量 Δx。得到：

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x+\Delta x,\,y)}Pdx+Qdy-\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)}Pdx+Qdy$$

由於積分與積分路徑的無關性，我們可以算作，第一個積分的路徑由連接 A 及 B 的曲線 AB 與直線段 BB' 組成（圖67），而第二個積分的路徑就是第一個積分路徑中的曲線 AB。消去沿 AB 的積分就剩下：

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\int_{(x,\ y)}^{(x+\Delta x,\ y)} Pdx+Qdy=\int^{x+\Delta x} P(x,\ y)$$

因爲在直線 BB' 上 y 不改變,於是 $dy=0$. 應用中值定理[1,95],我們求出:

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\Delta x P(x+\theta\Delta x, y) \qquad (0<\theta<1).$$

用 Δx 除並讓 Δx 趨向 0, 得到:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x, y)=P(x, y). \tag{30}$$

同樣方法可以求出:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,\ y) \tag{31}$$

關係式 (30) 與 (31) 告訴我們 [1,68]:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=Pdx+Qdy.$$

如此說明了, 當滿足條件 (27) 時, 被積表達式

$$Pdx+Qdy \tag{32}$$

是由公式 (29) 所確定的函數 $U(x,y)$的全微分。不難證明公式

$$U_1(x,y)=U(x,y)+C \tag{33}$$

給出全微分等於 (32) 的函數 $U_1(x,y)$的一般表達式, 其中 C 是任意常數。事實上, 我們應當有

$$dU=Pdx+Qdy$$

$$dU_1=Pdx+Qdy$$

由此

$$d(U_1-U)=0.$$

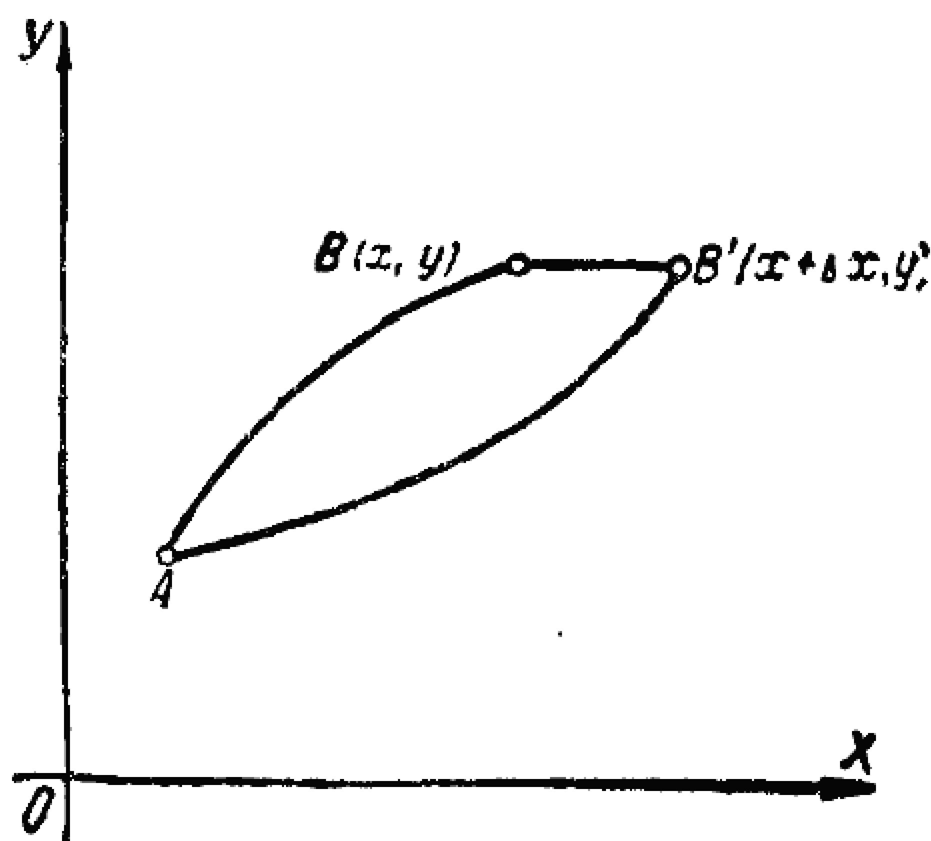


圖 67

但是若某一函數的微分恒等於零，則這函數對所有的自變量的偏微商等於零，於是推知，這函數是個常量，就是說

$$U_1-U=C,$$

於是證完。

注意，當保持有條件（27）時，下面這等式顯然成立：

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy=\int_{(A)}^{(B)} dU_1=U_1(B)-U_1(A). \tag{34}$$

反之，設存在這樣的函數 U_1，使得

$$dU_1=Pdx+Qdy. \tag{35}$$

我們可以證明，條件

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

應當是必要的，並且函數 U_1 由公式

$$U_1(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C.$$

來確定。

爲此，可以把關係式（35）寫成

$$Pdx+Qdy=\frac{\partial U_1}{\partial x}dx+\frac{\partial U_1}{\partial y}dy,$$

並且因爲作爲自變量的微分的 dx 與 dy 是任意的 [I,68]，則這等式只有當 dx 與 dy 在兩邊的係數相等時，才能成立，就是說：

$$P=\frac{\partial U_1}{\partial x};\quad Q=\frac{\partial U_1}{\partial y},$$

由此已經顯示出

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，這時滿足條件(27)，並且根據以前的討論，積分

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy,$$

只依賴於(x,y)，且具有下面這性質：

$$dU=Pdx+Qdy=dU_1,$$

由此推出

$$U_1=U+C,$$

於是證完。所以，**使得表達式$Pdx+Qdy$是某一個函數U_1的全微分的必要且充分條件就是使得恒等式**

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

存在的條件，當滿足這條件時函數U_1由公式

$$U_1(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy+C. \tag{36}$$

來確定。

72.複通區域的情形 條件(27)是使得曲線積分

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy$$

與路徑無關的必要且充分條件，這個證明主要基於下列兩個情況：

1) 函數P與Q以及它們的一級偏微商在所考慮的(x,y)的區域上是連續的。

2) 若在給定的區域上隨意畫出一個封閉的界線(l)，則包含在(l)之內的一部分平面整個屬於那樣一個區域，在那個區域上連續性的條件以及條件(27)成立。

第一個條件主要是因爲當證明時所述的函數出現在積分號下。第二個條件是因爲要應用格林公式，就是要用二重積分來表示曲線積分。它就相當於在這區域上畫出的任何一個封閉界線，可以連續的收縮爲一點而不出乎這個區域，或者換句話說，這個條件相當於這個區域沒有洞。

現在設在某一個有兩個洞的區域 (σ) 上（圖68），函數 P 與 Q 以及所述的微商連續並滿足條件(27)。若在這樣的區域上取一個封閉界線 (l_0)，在其內沒有洞，則對於這樣的界線以及以它爲界的區域，格林公式(18)是適用的，於是根據條件(27)沿這樣的封閉界線 (l_0) 的積分等於零。現在取封閉界線 (l_1)，在其中出現有洞(1)。

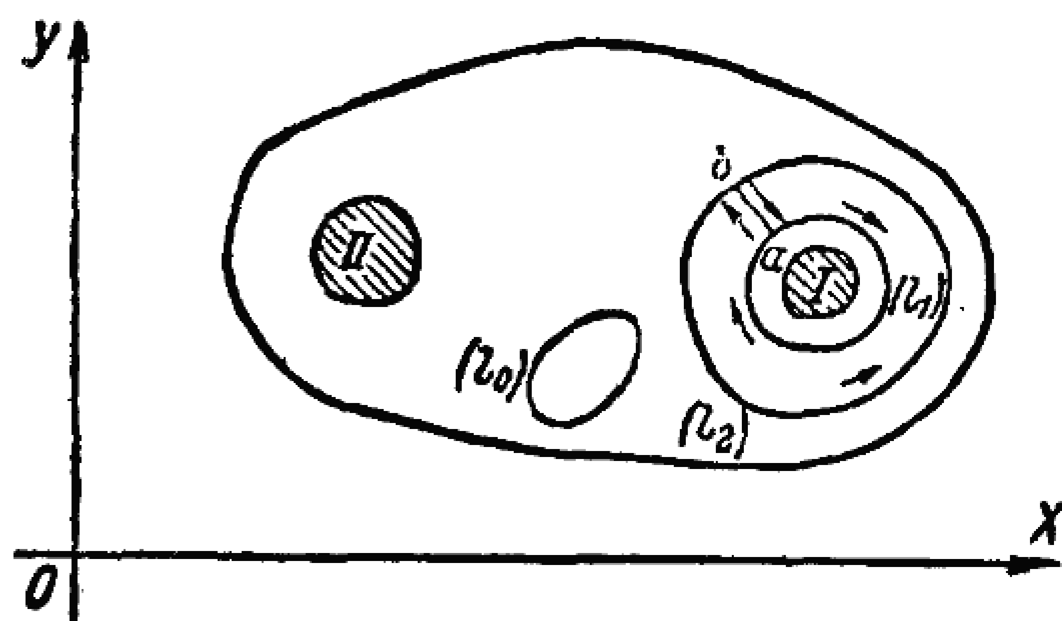


圖 68

這時公式(18)不適用，於是一般說來沿 (l_1) 的積分(28)就不等於零。我們來證明，這個積分的大小不依賴於界線 (l_1) 的形狀，而重要的只是這個界線環繞着一個洞(1)，取出環繞着(1)的兩個界線 (l_1) 與 (l_2)。我們需要證明沿 (l_1) 與 (l_2) 的積分(28)的大小相同。引用連接 (l_1) 與 (l_2) 的輔助界線 (ab)。曲線 (l_1)，(l_2) 以 (ab) 連合起來是一個封閉界線，而且其中沒有洞，並且這個界線應當取箭頭指明的方向。於是推知，對於這個界線公式(18)適用，根據(27)，沿這界線的積分等於零：

$$\oint_{(l_1)} + \int_{(ba)} + \oint_{(l_2)} + \int_{(ab)} = 0.$$

這裏沿 (ab) 與 (ba) 的積分取相反的方向，所以相消，沿 (l_1) 的積分需要取順鐘針方向，沿 (l_2) 的積分取逆鐘針方向。改變沿 (l_1) 積分方向並改變符號，結果不變，我們就得到：

$$\oint_{(l_2)} - \oint_{(l_1)} = 0$$

或，最後得到

$$\oint_{(l_1)} Pdx + Qdy = \oint_{(l_2)} Pdx + Qdy,$$

就是說，實際上，都取逆鐘針方向時，沿 (l_1) 與 (l_2) 的積分的大小相同。如此，洞(I)對應於一個確定的常數 ω_1，它等於沿任何環繞着洞(I)的封閉界線時積分(28)的大小。同理洞(II)對應於另一個常數 ω_2。

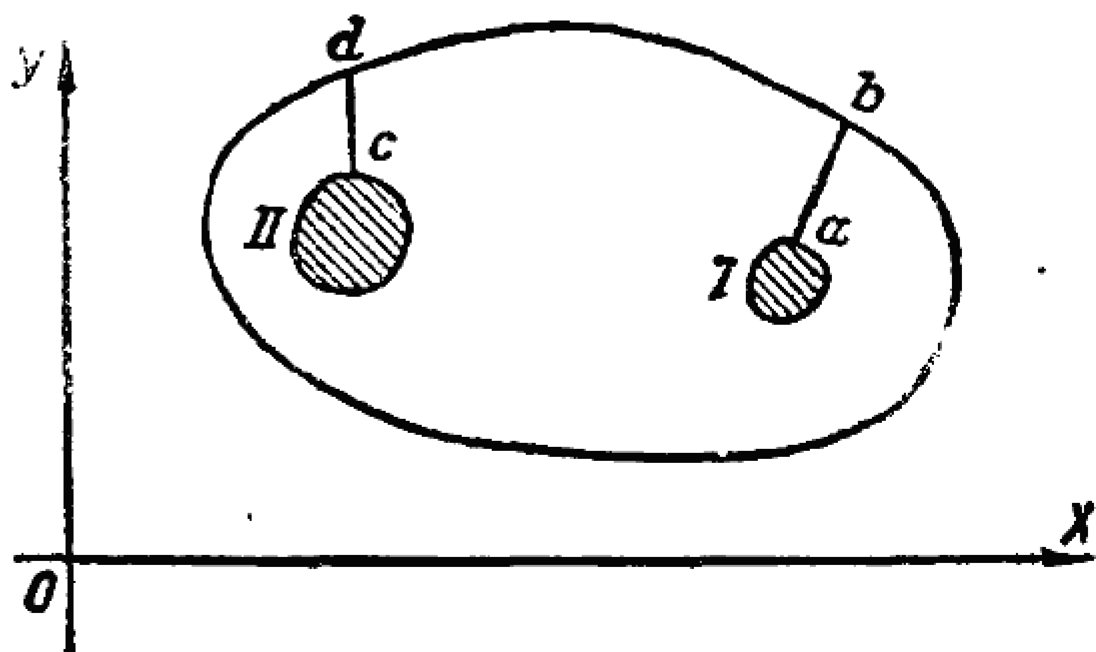


圖 69

若在區域 (D) 上由洞到外界線引出兩條割斷 (ab) 與 (cd)（圖69）。則得到一個新的區域，在其內沒有洞，於是根據(27)在這區域上可以作出一個函數

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy,$$

不過，根據以上所述，在割斷 (ab) 上的相對兩側，這函數的值差一個常數 ω_1，而在 (cd) 上差一個常數 ω_2。若去掉割斷回到最初的區域 (D)，則在這區域上函數 $U(x,y)$ 是多值的。環繞洞一圈這函數就

加一項 ω_1 或 ω_2，就是說，函數 $U(x,y)$ 含有不定項 $n_1\omega_1+n_2\omega_2$，其中 n_1 與 n_2是任何整數。所有我們的討論適用於區域上有任何多個洞的情形，並且洞也可以是一個點，就是說只是由一個點作成的洞。由一起，洞的數目普通叫做**複通區域**(D)**的次數**，具有洞的區域叫做**複通區域**。ω_1 與 ω_2 這兩個數叫做表達式 $Pdx+Qdy$ 的**循環數**或函數 $U(x,y)$ 的**循環常數**。

例　考慮函數

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

它確定於區域 (D) 上，區域 (D) 是界於兩個以坐標原點爲圓心的同心圓周之間的區域。

由公式

$$(37)\qquad \begin{aligned} P&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}\\ Q&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\quad\frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

來確定 P 與 Q。

這兩個函數以及所述的微商在 (D) 上連續，並且不難驗證它們滿足關係式(37)。考慮曲線積分，

$$\int_{(l)}Pdx+Qdy=\int_{(l)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

取積分路徑爲以原點的圓心半徑等於 a 的圓周(l_1)。代入 $x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$，得到

$$\int_{(l_1)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi.$$

在所給的情形下，區域 (D) 有一個洞，並且循環常數 $\omega_1=2\pi$。

$$U_1(x,y)=\int Pdx+Qdy=\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=\varphi$$

當環繞洞一圈時獲得一項 2π。注意，裏邊的圓周的半徑可以算作是零，可以算作洞是個

點。事實告訴我們要除去點(0,0)。在這點函數 P 與 Q(37) 取未定式 $\frac{0}{0}$

73.空間曲線積分與路徑的無關性 像在平面上一樣，空間曲線積分與路徑無關的條件，與沿任何封閉界線的積分等於零的條件一致。考慮積分

$$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz, \tag{38}$$

利用司鐸克斯公式(22)，像前面一樣可以證明，**積分(38)與路徑無關的必要且充分條件由三個恒等式**

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0, \tag{39}$$

來表達。

若滿足這些條件，則可以作出點的函數 $U(x,y,z)$

$$U(x,\ y,\ z)=\int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} Pdx+Qdy+Rdz, \tag{40}$$

並且像以前完全一樣，可以證明：

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P;\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q;\quad \frac{\partial U}{\partial z}=R \tag{41}$$

$$Pdx+Qdy+Rdz=dU \tag{42}$$

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx+Qdy+Rdz=U(B)-U(A). \tag{43}$$

此外，條件(39)是使得表達式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 是某一個函數 U_1 的全微分的必要且充分條件，並且，若滿足這些條件，則 U_1 由公式

$$U_1=\int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} Pdx+Qdy+Rdz+C,$$

來確定，其中 C 是任意常數。

空間複通區域的概念具有某些特點。作爲一個特例，我們考慮一個區域 (D)，由一個球的內部組成，其中挖去兩個管 (I) 與 (II)，這兩個管穿通球面，如圖 70 所示。若取出一個環繞着管 (I) 的封閉界線 (l_1)，則不可能在其上畫出一個完全包含於 (D) 的曲面，於是推知，縱然如果在區域 (D) 上滿足條件 (39)，對於 (l_1) 也不能應用司鐸克斯公式，一般說來，沿 (l_1) 的積分的大小不等於零。但是它的大小不依賴於 (l_1) 的形狀。重要的只是 (l_1) 是一個在 (D) 上的環繞着一個管 (I) 的封閉曲線。如此得到一個關於管 (I) 的循環常數 ω_1。同理，對於第二個管 (II) 我們有第二個循環常數 ω_2。在這情形下，由公式 (40) 所確定的函數 $U(x,y,z)$ 是多值函數，含有不定項 $m_1\omega_1+m_2\omega_2$，其中 m_1 與 m_2 是任何的整數。

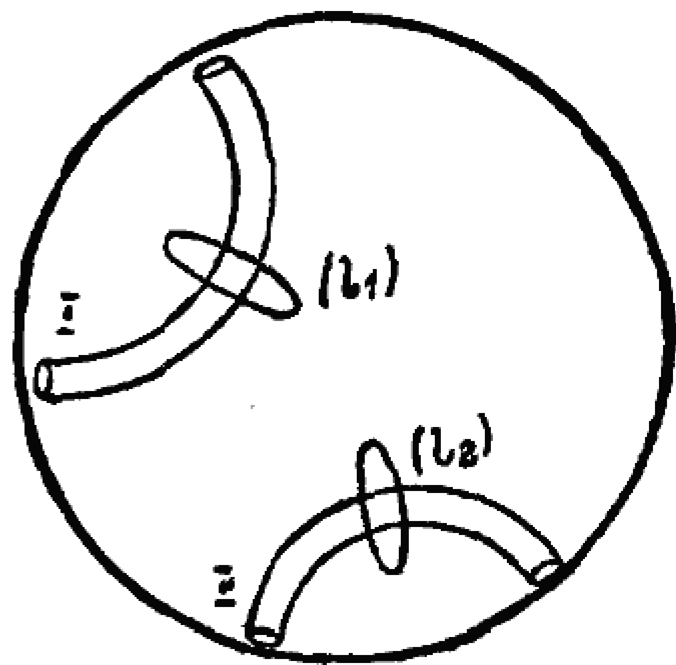


圖 70

注意，若區域 (D) 是界於兩個同心球面之間的一部分空間，而在這區域上滿足條件 (39)，則沒有任何的循環常數，而函數 (40) 是單值的。實際上，由幾何顯見，在這情形下，在任何屬於 (D) 的封閉界線上可以畫出一個屬於 (D) 的曲面，所以對於在 (D) 上的任何封閉界線可以應用司鐸克斯公式，於是由條件 (39) 推出沿這樣的界線的積分等於零。

例　考慮在柱面坐標系以及球面坐標系中出現的角度 φ：

$$\varphi = \text{arc tg}\frac{y}{x}$$

我們由公式(37)來確定 P 與 Q 沿整個 OZ 軸，這些表達式取未定式 $\frac{0}{0}$ 的形狀。考慮空間的曲線積分

$$\int_{(l)} Pdx + Qdy = \int_{(l)} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

時，要除去一個包含有 OZ 軸的管，而且，沿任何環繞着這樣的管的封閉界線求上面寫出的積分的大小時，給出循環常數 2π。

74.流體的穩定流動　設在不可壓縮流體的平面穩定流動中，$v(x, y)$ 是速度向量，$u(x, y)$ 與 $v(x, y)$ 各爲它在兩坐標軸上的投影。在[67]例3中我們看出，沒有源泉出現的條件使得積分

$$\int_{(l)} -vdx + udy \tag{44}$$

沿任何封閉界線等於零，或者說這個積分與路徑無關。根據(27)，爲此必須且僅須，

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},\ 或 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{45}$$

這也是不可壓縮流體的特徵。當滿足條件(45)時，表達式

$$-vdx + udy$$

是某一個函數 $\psi(M)$ 的全微分，這個函數由下面的關係式來確定

$$\psi(B) - \psi(A) = \int_{(A)}^{(B)} -vdx + udy, \tag{46}$$

函數 $\psi(M)$ 叫做流函數，它有簡單的物理意義：差 $\psi(B) - \psi(A)$ 給出，在單位時間內，穿過以點 A 與 B 爲起點與端點的任意一個界線的液體的量。這可以由關於穿出的液體的量的公式(10)[67]直接推出。

若在區域中各別的點有源泉出現，則去掉這些點，就得到一個具有洞的區域，在其上條件(45)成立。對於某一個洞的循環常數等於積分(44)沿環繞着這個洞的一個封閉曲線

的值，顯然這個循環常數給出對應的源泉，在單位時間內放出的液體的量 q。這時，函數 $\varphi(M)$ 是多值的。若 $q<0$，則源泉是負的（吸吮）。

除積分（44）外，我們再考慮積分

$$\int_{(l)} u dx + v dy, \tag{47}$$

這個量通常叫做沿界線（l）的速度環流。假設沿任何封閉界線的速度環流等於零，就是說積分（47）與路徑無關。換句話說，這表示沒有渦旋的流動。所作的假定相當於存在有函數 φ（M）：

$$\varphi = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx + v dy, \tag{48}$$

使得速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的投影 u 與 v 是偏微商

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{49}$$

函數 φ 叫做速度勢。若在一個複通區域（具有洞的區域）積分（48）與路徑無關的條件成立，則一般說來，速度勢就是多值函數。積分（48）關於任何洞的循環常數給出對應於這個洞的渦旋强度。

由等式（46）推出［71］

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

比較（49）與這些等式，得到連繫着速度勢 φ 與流函數 ψ 的兩個方程：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{50}$$

這兩個方程通常叫做勾犀——黎曼方程，它們在複變函數論中具有基本的重要性，較廣泛的應用複變函數理論於平面流體力學的問題時，以這兩個方程在流體力學中的意義爲基礎。

在空間穩定運動的情形下，速度向量 $v(x, y, z)$ 有三個分量：$u(x, y, z)$，$v(x, y, z)$，$w(x, y, z)$，而且替代積分（48）需要考慮積分

$$\int_{(l)} udx+vdy+wdz,$$

於是若滿足與路徑無關的條件

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

則存在有速度勢

$$\varphi=\int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} udx+vdy+wdz,$$

並且

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

在下一章中我們再講不可壓縮的條件（45）推廣到空間的情形。

75.積分因子 若表達式

(51) $$Pdx+Qdy$$

不是全微分，就是說

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\neq 0,$$

則我們可以證明，總可以求出這樣一個函數 μ，它與表達式（51）的乘積是一個全微分。

(52) $$\mu\,(Pdx+Qdy)=dU.$$

任何一個這樣的函數叫做**表達式**（51）**的一個積分因子**。

為要使得函數 μ 是表達式（51）的積分因子，根據（71），必須且僅須滿足等式

(53) $$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=0,$$

這個等式可以寫成

(54) $$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0,$$

這可以考慮作確定因子 μ 的方程。一般說來，這個方程不容易利用，因爲它是偏微分方程，而偏微分方程的求積分問題比常微分方程的求積分問題較複雜。

若表達式 (51) 是全微分，則微分方程

$$Pdx+Qdy=0 \tag{55}$$

叫做**全微分方程**。

可以立刻求出它的積分來。現在，設 U 是一個函數，使得

$$dU=Pdx+Qdy.$$

當作了相當於條件 (27) 的假定時，這個函數總可以由公式 (29) 求出來。方程 (55) 相當於等式 $dU=0$，就是說

$$U=C \tag{56}$$

這樣的等式給出所給的微分方程 (55) 的一般積分。

現在設表達式 (51) 不是全微分。根據存在定理 [51]，微分方程 (55) 總有一般積分，我們把它寫成

$$F(x,y)=C.$$

函數 $F(x,y)$ 應當滿足關係式

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

其中，根據 (55)，應當用 $\left(-\frac{P}{Q}\right)$ 來替代 $\frac{dy}{dx}$，就是說，下面這恒等式成立 [7]：

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q}$$

用 μ 來記這兩個相等的比的共同的量，我們就有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\mu P;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\mu Q,$$

就是說，μ 是表達式 (51) 的積分因子。

這個理由證明了，**任何表達式 $Pdx+Qdy$ 有積分因子**。

求出表達式 (51) 的積分因子，再由它求出函數 F，就可以立刻寫出微分方程 (55) 的一般積分：

$$F=C$$

例：1.流體的平面穩定的流動的流線具有微分方程 [52]

(57) $$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \quad \text{或} -vdx+udy=0.$$

其中 u 與 v 是速度向量 v 在兩坐標軸上的投影。若流體不可壓縮，則滿足條件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

它說明表達式

(58) $$-vdx+udy$$

是某一個函數的全微分；實際上，在 [74] 中我們看到，

$$-vdx+udy=d\psi$$

其中 ψ 是流函數，於是流線的方程是

$$\psi=C,$$

它也是方程

$$-vdx+udy=0$$

的一般積分

2. 在 [67] 例 4 中我們講過關於簡單的熱過程，並且給了在這過程中得到的微小的熱量的表達式，它依賴於壓力 p，容積 v 以及溫度 T 的微小的改變量。

我們寫出，當這三個量中任何兩個算作自變量時，dQ 的三個表達式：

(59) $$dQ=\begin{cases} c_v dT+c_1 dv & (T,v \text{ 是自變量}) \\ c_p dT+c_2 dp & (T,p \text{ 是自變量}) \\ Pdp+Vdv & (p,v \text{ 是自變量}) \end{cases}$$

c_v 與 c_p 這兩個量特別重要，它們各叫做物質的定容比熱與定壓比熱。

若我們在（59）中通過其他的變量來表達一個變量，則得到一套係數間的關係式。

在等式

$$c_p dT + c_2 dp = c_v dT + c_1 dv \tag{60}$$

中算作 T 與 v 是自變量。設：

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T}\, dT + \frac{\partial p}{\partial v}\, dv.$$

把這個 dp 的表達式代入到（60）中，再讓 dT 與 dv 的係數相等，就得到：

$$c_v = c_p + c_2 \frac{\partial p}{\partial T} \tag{61}$$

$$c_1 = c_2 \frac{\partial p}{\partial v}. \tag{62}$$

同樣方法，由等式：

$$c_v dT + c_1 dv = P dp + V dv$$

我們得到：

$$c_v = P \frac{\partial p}{\partial T} \tag{63}$$

$$c_1 = V + P \frac{\partial p}{\partial v}. \tag{64}$$

在理想氣體的情形下，我們有物態方程：

$$p\, v = RT,$$

由此推知

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v};\quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v};\quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{v};\quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{v}{p};\quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R};\quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}.$$

這時關係式（61）——（64）給出：

$$c_v = c_p + c_2 \frac{R}{v};\quad c_1 = -c_2 \frac{p}{v};\quad c_v = P\frac{R}{v};\quad c_1 = -P\frac{p}{v} + V. \tag{65}$$

由這些等式，可以通過基礎的 c_v 與 c_p 來表達 c_1，c_2，P，V 這些個量。

$$c_1 = (c_p - c_v)\frac{p}{R};\quad c_2 = -(c_p - c_v)\frac{v}{R};\quad P = c_v\frac{v}{R};\quad V = c_p\frac{p}{R}. \tag{66}$$

一般說來，dQ 的表達式不是全微分。但是根據熱力學的兩個基本原理，可以肯定:

I. dQ 與壓力 p 作的功 pdv 之差是個全微分:

$$dQ - pdv = dU,$$

這裏函數 U 叫做內能。

II. dQ 被絕對溫度 T 除得的商是個全微分，或者換句話說，$\frac{1}{T}$ 是表達式 dQ 的積分因子;

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

這裏函數 S 叫做熵。

根據(59)中第一個公式，由原理 I 告訴我們:

$$dU = dQ - pdv = c_v dT + (c_1 - p)dv,$$

由此

(67)
$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial (c_1 - p)}{\partial T}\right|_v.$$

記號 T 與 v 用來記求微商時算作非常量的那個變量。

同樣，由原理 II 給出:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v}{T}dT + \frac{c_1}{T}dv,$$

由此

$$\frac{1}{T}\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{c_1}{T}\right)\right|_v = \frac{1}{T}\left.\frac{\partial c_1}{\partial T}\right|_v - \frac{c_1}{T^2},$$

或

(68)
$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial c_1}{\partial T}\right|_v - \frac{c_1}{T}$$

比較方程(67)與(68)，求得:

(69)
$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{c_1}{T}.$$

再應用到理想氣體的情形，由此我們得到結論:

(70)
$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v} = \frac{c_1}{T}; \quad c_1 = \frac{RT}{v} = p.$$

另一方面，由方程(66)說明

$$c_1=p=(c_p-c_v)\frac{p}{R}, \text{ 就是 } c_p-c_v=R \tag{71}$$

以實驗的數據爲基礎，算作：

III. 理想氣體的定壓比熱 c_p 是常量，所以 $c_v=c_p-R$ 也是常量。

由(71)推知，$c_v<c_p$ 並且爲簡短起見，我們記作：

$$\frac{c_p}{c_v}=k.$$

其中 $k>1$，根據公式(66)與(71)，不難求出最後的結果：

$$c_1=p;\quad c_2=-v;\quad P=\frac{v}{k-1};\quad V=p\frac{k}{k-1},$$

據此，由公式(59)給出下面這些關於 dQ，dU，以及 dS 的表達式：

$$dQ=\begin{cases} c_v dT+pdv \\ c_p dT-vdp \\ \dfrac{vdp+kpdv}{k-1} \end{cases} \tag{72}$$

$$dU=c_v dT \tag{73}$$

$$dS=c_v\frac{dT}{T}+\frac{p}{T}dv=c_v\frac{dT}{T}+R\frac{dv}{v} \tag{74}$$

在等溫過程中，溫度保持常量，就是說 $dT=0$，於是

$$dQ=pdv.$$

就是說，全部吸收的熱來自壓力所作的功，當由容積 v_1 轉換到容積 v_2 時，吸收熱量的全部改變量就是

$$\int_{(v_1)}^{(v_2)} pdv.$$

當溫度恒定時，這過程的圖形叫做<u>等溫圖</u>。

不吸入或放出熱量的過程叫做絕熱過程。它的特徵條件是；

$$dQ=0 \text{ 或 } dS=0;\quad S=\text{常量},$$

或熵是常量。熵可以由公式(74)來確定:

$$S=c_v\lg T+R\lg v+C,$$

所以絕熱過程的特徵條件是

$$c_v\lg T+R\lg v=\text{常量},$$

或者，由對數過渡到眞數:

$$T^{c_v}v^{R}=T^{c_v}v^{c_p-c_v}=\text{常量},$$

或者，取 $\dfrac{1}{c_v}$ 次方冪:

$$Tv^{k-1}=\text{常量},$$

於是因爲 $T=\dfrac{pv}{R}$，則得到最後的結果:

(75)　$$pv^k=\text{常量}。$$

最後，當容積是常量時，我們有 $dv=0$，於是

(76)　$$dQ=c_v dT;$$

當氣體由溫度 T_1 轉換到溫度 T_2 時，

(76)　$$dQ=c_v(T_2-T_1)$$

76. 三個變量的全微分方程　由方程(55)推廣到三個變量的情形，得到:

(77)　$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

其中 P, Q 與 R 是給定的函數。若滿足條件(39)，則方程(77)的左邊是某一個函數 $U(x, y, z)$ 的全微分，於是方程(77)的一般積分就是

(78)　$$U(y, x, z)=C,$$

其中 C 是任意常數。方程(78)的幾何意義給出空間的一個曲面族。若(77)的左邊不是全微分，則要求積分因子，就是要求這樣函數 $\mu(x, y, z)$，使得方程

(79)　$$\mu(Pdx+Qdy+Rdz)=0.$$

的左邊是全微分。這時，條件(39)給出：

$$\frac{\partial(\mu R)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}=0;\ \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}-\frac{\partial(\mu R)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=0,$$

它們可以寫成：

$$(80)\left\{\begin{array}{l}\mu\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=Q\frac{\partial\mu}{\partial z}-R\frac{\partial\mu}{\partial y};\ \mu\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)=R\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial z}\\ \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}.\end{array}\right.$$

這些等式各乘以 P, Q, R，相加再消去 μ，就得到 P, Q 與 R 之間的一個關係式：

$$(81)\qquad P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0.$$

如此，假定積分因子 μ 存在，我們推出係數 P, Q, R 應當滿足的一個必要條件。可以證明(我們不證)這個條件也是充分的，就是說，**方程(77)不總有積分因子，等式(81)給出積分因子存在的必要且充分條件**。若 μ 存在，則方程(79)的左邊是某一個函數 U 的全微分，而且等式(78)給出方程(79)與(77)的一般積分。若不滿足條件(81)，則方程(77)就沒有(78)形狀的一般積分。條件(81)有時叫做方程(77)的全可積條件。

如果一般積分存在，我們來看方程(77)及其一般積分的幾何意義。函數

$$P(x,y,z),\ Q(x,p,z),\ R(x,y,z)$$

在每一個點確定了某一向量 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$，它們就是這個向量，在三個坐標軸上的投影。微分方程組

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

確定空間的某一曲線族(L)，在每一個點，對應的向量 $\boldsymbol{v}$ 指向沿切線

的方向。與在[52]中穩定流體的流線有完全類似的作用。方程(77)相當於具有支量，dx, dy, dz 的無窮小位移與向量 $\boldsymbol{v}$ 垂直的條件，就是說，方程(77)在每一個點確定某一個垂直於 $\boldsymbol{v}$ 的平面單元，或者說，這平面單元在通過所取的點的曲線族(L)的一條曲線的法面上。一般積分(78)給出一個曲面族，它們在每一個點的切面滿足垂直於 $\boldsymbol{v}$ 這個條件。換句話說，曲面(78)是正交於曲線(L)的。若給定充滿空間的一個曲線族(L)，則在每一個點由它們的切線確定一個向量 $\boldsymbol{v}$，取它的長度等於一，由它的支量 P，Q，R 作出方程(77)。等式(81)給出，使得所給的曲線族與某一曲面族正交的條件。

77. 二重積分的換元法則 在這一節的末尾，我們講在[57]中所述的二重積分換元公式的推求法。設有變換

$$x=\varphi(u,v);\quad y=\psi(u,v), \tag{82}$$

這裏我們考慮作(x,y)與(u,v)是平面上點的直角坐標。公式(82)給出平面上點的變換，這時點(u,v)變換到點(x,y)。設在平面上有區域(σ_1)具有界線(l_1)，以及區域(σ_1)具有界線(l)。假設：1)函數(82)以及它們的一級微商在區域(σ_1)上連續；2)公式(82)給出具有界線(l_1)的區域(σ_1)以及具有界線(l)的區域(σ)之間的一一對應，就是說，(σ_1)中任何一點(u,v)對應於(σ)中一個確定的點(x,y)，逆之亦然，並且(l_1)上的點對應於(l)上的點；3)函數(82)對於變量(u,v)的函數行列式：

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}=\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} \tag{83}$$

在區域(σ_1)上保持有確定的符號。

若當沿(l_1)取逆鐘針方向轉時，對應的點(x,y)沿(l)也取逆鐘針方向轉，就說是(σ)與(σ_1)**之間的直接對應**。相反的情形，當沿

(l_1) 轉對應於沿 (l) 的相反的方向轉時，就叫做反對應。區域 (σ) 的面積由積分 [68]

$$\sigma=\int_{(l)} x dy,$$

來表達，這裏取逆鐘針方向求積分。

依照公式 (82) 引用新的變量，就得到：

(84)　$$\sigma=\pm\int_{(l_1)}\varphi(u,\ v)\,d\psi(u,\ v)=\pm\int_{(l_1)}\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du+\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv.$$

我們讓沿 (l_1) 的積分取逆鐘針方向。若是直接對應，則變換的結果沿 (l_1) 是取這個方向，所以在公式 (84) 中需要取 (+) 號。若是反對應，則變換的結果沿 (l_1) 取相反的方向，不過我們寫上 (−) 號，仍然可以取逆鐘針方向求積分。

應用格林公式於積分 (84)，讓 $x=u, y=v, P=\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial u},\ Q=\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial v}$ 這時得到：

(85)　$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)},$$

於是推知：

$$\sigma=\pm\iint_{(\sigma_1)}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\,du\,dv.$$

應用中值定理 [61] 於這二重積分，得到：

(86)　$$\sigma=\pm\sigma_1\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]_{(u_0,\ v_0)},$$

其中函數行列式 (83) 取在某一個屬於 (σ_1) 的點的值。根據 σ 與 σ_1 都是正的，由後面這公式推出，若是直接對應，則行列式 (83) 有

（+）號，而當反對應時有（−）號。

現在來推求換元公式。設 $f(x,y)$ 是一個函數，在區域 (σ) 上連續。分 (σ_1) 爲 n 部分，$\tau_1', \tau_2', \cdots, \tau_n'$. 根據（82），這些部分將對應於 (σ) 分成的各部分 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$。這些部分的面積也用同樣的字母 τ_k' 與 τ_k 來記。由公式（86），就有：

$$\tau_k = \tau_k' \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k, v_k)},$$

其中 (u_k, v_k) 是 τ_k' 中某一個點，它對應於某一個點 $x_k = \varphi(u_k, v_k)$，$y_k = \psi(u_k, v_k)$，於是我們可以寫成：

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\tau_k = \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)] \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k, v_k)} \cdot \tau_k'.$$

取極限，得到二重積分的換元公式：

$$(87)\quad \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du\,dv,$$

它與［57］中公式（13）相同。

我們提出公式（86）的一個推理。設區域 (σ_1) 無限縮小於一點 (u, v)。這時 (σ) 將無限縮小於一個對應的點 (x, y)，而且屬於 (σ_1) 的點 (u_0, v_0) 將趨向 (u, v)。取極限，由（86）得到：

$$\left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| = \lim \frac{\sigma}{\sigma_1},$$

就是說，面積的比以函數行列式在對應點的絕對值爲極限，在［57］中我們已經講過這個。同樣，若把一元函數 $x = f(u)$ 考慮作直線上點的變換，它把具有坐標 u 的點變換到具有坐標 x 的點，則微商的絕對值 $|f'(u)|$ 給出所述直線上對應長度比的極限，換句話說就是，它給出，當作所述點的變換時，在具有坐標 u 的指定的點的線性形變

的係數。

注意，當推出公式(85)時，我們利用了二級微商 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$以及它與求微商的順序的無關性。如此，嚴格說來，在這一段開始所作的假定中，需要再補充上 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$ 存在而且連續，我們知道[I,155]，由此就可以推出它與求微商的順序無關。

若(v)是一個空間區域，以曲面(S)為界，則應用奧斯特洛格拉得斯基公式，讓 $P=Q=0$，$R=z$，可以用下面形狀的曲面積分來表達這個區域的容積：

$$v=\iint_{(S)} z\cos(n,Z)dS.$$

利用這個容積的表達式，像以上我們對於二重積分所作的方法差不多，可以證明三重積分的換元公式[60]。

§3　反常積分與依賴於參變量的積分

78. 積分號下求積分法　我們計算重積分時，曾遇到一種定積分，它的被積函數以至於積分限都依賴於一個參變量。現在我們比較仔細的來討論這樣的積分。

我們考慮積分

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx,$$

其中積分變量記作x，被積函數不僅依賴於x，而且也依賴於參變量y，積分限x_1與x_2也依賴於y。在這情形下，顯然，積分的結果，一般

說來，是 y 的函數。由 [56] 中公式 (7)：

$$(1)\qquad \int_a^\beta I(y)dy=\int_a^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$$

這叫做**求定積分對積分號下的參變量的積分的公式**。當積分限 x_1 與 x_2 不依賴於 y 而是常數 a, b 時，它得到特別簡單的形狀 [56]。

$$(2)\qquad \int_a^\beta I(y)\,dy=\int_a^\beta dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_a^\beta f(x,y)\,dy.$$

在所有這些公式中，我們算作被積函數 $f(x,y)$，在積分區域上，是這兩個變量的連續函數，而這個區域算作是有限的。在相反的情形下，我們就要討論反常重積分。以下我們考慮這樣的積分。

例　上述方法有時用來計算一個函數的定積分，而這個函數的不定積分不知道。我們應用它來計算積分

$$(3)\qquad I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

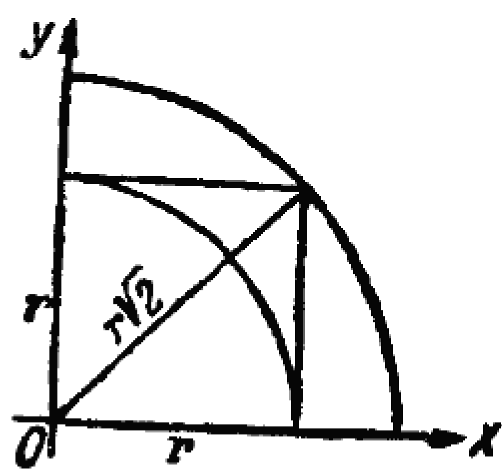


圖 71

設 (D') 是以原點爲圓心 r 爲半徑的圓在第一象限的四分之一，(D'') 是界於直線 $x=o$；$x=r$；$y=o$；$y=r$ 的方塊，最後，(D''') 是以原點爲圓心 $r\sqrt{2}$ 爲半徑的圓的四分之一（圖 71）。顯然，(D') 是 (D'') 的一部分，(D'') 是 (D''') 的一部分。沿這些區域取正的函數 $e^{-x^2-y^2}$ 的二重積分。就有顯明的不等式：

$$\iint\limits_{(D')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<\iint\limits_{(D'')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<\iint\limits_{(D''')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

引用極坐標：$x=\rho\cos\varphi$；$y=\rho\sin\varphi$，就得到 [56]：

$$\iint\limits_{(D')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=r}=\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}).$$

用 $r\sqrt{2}$ 來替換 r，就有：

$$\iint_{(D''')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2r^2})$$

沿方塊 (D'') 求積分，給出：

$$\iint_{(D'')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^r e^{-x^2}dx \int_0^r e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

於是上面寫的不等式化爲下面的形狀：

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}) < \left(\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2r^2}).$$

當 r 趨向無窮時，這不等式兩端的兩項都趨向 $\frac{\pi}{4}$，於是推知，中間的一項也應當趨向這個相同極限，向此推出積分 (3) 的值：

(4)
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

不難看出，[I,96]，

(5)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

如果利用沿整個第一象限的反常積分，就直接得到這個結果，我們把第一象限記作 (P)。實際上：

$$\iint_{(P)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = I^2,$$

再引用極坐標：

$$I^2 = \iint_{(P)} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = \frac{\pi}{4},$$

由此 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，這與上面得到的結果一致。

79.狄義赫利公式 給定公式(1)中 y 的函數 x_1 與 x_2,以及 y 的改變區間 (α,β),在平面 XY 上就確定出某一個區域(σ)。在應用中時常遇到的情形是這樣的區域:由三條直線

$$y=x;\quad y=b\quad x=a$$

作成的等腰三角形(圖 72)。

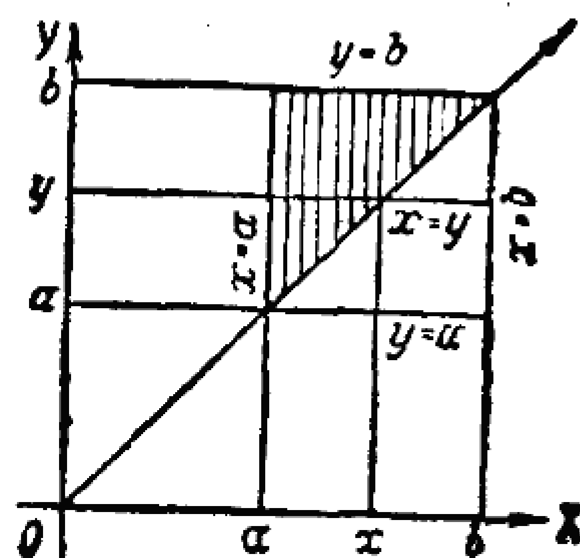


圖 72

把沿這三角形面積的二重積分化為兩次積分時有兩種情形,一種情形是先對 x 求積分,再對 y 求;另一種情形是先對 y 求積分,再對 x 求,得到公式:

$$\int_a^b dy\int_a^y f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_x^b f(x,y)\,dy. \tag{6}$$

它叫做狄義赫利公式

例 亞貝爾問題 確定一條分佈在鉛直平面上的曲線,使之具有下述性質,當有重量的一個質點由曲線上任何高度為 h 的點 M 沿這曲線下降到曲線的最低點 O 時(圖 73),如果沒有初速度,它到點 O 所用的時間 T 是高度 h 的一個已知函數:

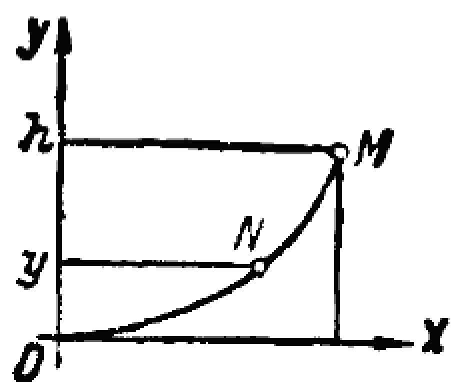


圖 73

$$T=\varphi(h).$$

取鉛直向上的方向作 OY 軸的方向,水平方向作 OX 軸的方向,讓坐標原點位於未知曲線的最低點,把未知曲線的方程寫作

$$x=f(y).$$

設:

$$ds=dy\sqrt{1+[f'(y)]^2}=u(y)dy \tag{7}$$

$$u(y)=\sqrt{1+[f'(y)]^2}$$

依照活力定律,當這點由起始位置 M 移動到 N 時,動能的改變量等於引力所作的功,因為曲線的反作用垂直於點的移動方向,所以不作功,就是

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(h-y);\quad v=\frac{ds}{dt},$$

或者

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=g(h-y)$$

$$dt=\frac{-ds}{\sqrt{2g(h-y)}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{-u(y)}{\sqrt{h-y}}dy,$$

這裏我們取（－）號是因爲當 t 增加時點的高度 h 減小。

由點 M 下降到點 O 所用時間對應於 y 由 h 改變到 O，所以

(8) $$\varphi(h)=T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}.$$

如此，我們就要由方程（8）來確定未知函數 y，它叫做積分方程，因爲未知函數 $u(y)$ 出現在積分號下。

方程(8)兩邊乘以 $\frac{1}{\sqrt{z-h}}$，再由 0 到 z 依 h 求積分：

$$\int_0^z\frac{\varphi(h)}{\sqrt{z-h}}dh=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^z\frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h\frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}.$$

右邊的兩次積分可以依照狄義赫利公式化爲下面的形式：

(9) $$\int_0^z\frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h\frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}=\int_0^z dy\int_y^z\frac{u(y)}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}dh=$$

$$=\int_0^z u(y)\,dy\int_y^z\frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}.$$

裏邊的積分計算起來不怎麼難，只要由公式：

$$h=y+t(z-y)$$

引用新的變量 t。

當 h 由 y 改變到 z 時，變量 t 由 0 改變到 1，並且我們有：

$$z-h=(z-y)(1-t);\quad h-y=(z-y)t;\quad dh=(z-y)dt,$$

由此

$$\int_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$=\arc\sin(2t-1)\Big|_{t=0}^{t=1}=\arc\sin 1-\arc\sin(-1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

於是最後得到:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2g}}\int_0^z u(y)dy=\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}},$$

或

$$\int_0^z u(y)\,dy=F(z), \tag{10}$$

其中$F(z)$是z的一個已知函數，由公式

$$F(z)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

來確定。

由關係式(10)對z求微商，得到:

$$u(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}, \tag{11}$$

它給出這個問題的解，因爲知道了函數$u(y)$，就不難由公式(7)求出$x=f(y)$。

最後我們講一個特殊情形——等時降落曲線，對於它，到最低點的下降時間不依賴於高度h，就是

$$\varphi(h)=\text{常數}=c.$$

這時我們有：

$$F(z)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^z\frac{cdh}{\sqrt{z-h}}=\frac{c\sqrt{2g}}{\pi}2\sqrt{z},$$

$$u(z)=\frac{c\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{z}}.$$

爲要確定 $x=f(y)$，根據(7)，現在有：

$$(dx)^2+(dy)^2=\frac{2gc^2}{\pi^2}\ \frac{(dy)^2}{y}=\frac{A}{y}(dy)^2 \qquad \left(A=\frac{2gc^2}{\pi^2}\right)$$

設：

$$y=a(1+\cos t);\quad dy=-a\sin t dt;\quad A=2a$$

我們就求出：

$$dx=dy\sqrt{\frac{2a}{y}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\cdot(-a\sin t)\,dt=-2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt;$$
$$x=x_0-a(t-\sin t),$$

其中 x_0 是積分常數。讀者容易證明，得到的曲線是旋輪線，只不過它的位置不是像〔I，79〕中所放的一樣。

以後我們再講，在一般公式(11)中怎樣對 z 求微商。

對於求得這個解的理由我們提出下面幾點。注意，我們求得積分方程(8)的解(11)時，假設了這樣的解存在。嚴格說來，我們還應當驗證這個解(11)，就是說，把 $u(z)$ 的表達式(11)代入到方程(8)，再證明左右兩邊一致。還要提出，二重積分(9)是這種意義的反常積分，它的被積函數成爲無窮大。以後我們將看到，它存在，並且不難證明，在所給的情形下，把它化爲二次積分的公式(1)可以應用。

80. 積分號下求微商法　考慮依賴於參變量 y 的積分：

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{12}$$

現在我們算作積分限 a 與 b 不依賴於 y。設在矩形 $a\leqslant x\leqslant b$;

$\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上 $f(x,y)$ 連續而有連續偏微商 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$。我們來證明，在這些假定下，微商 $\frac{dI(y)}{dy}$ 存在，並且可以**在積分號下對 y 求微商**得來，就是

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{13}$$

函數 $I(y)$ 的改變量 $\Delta I(y)$ 由公式

$$\Delta I(y)=I(y+\Delta y)-I(y)=\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx \tag{14}$$

確定。

應用有限改變量公式，得到：

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\,\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}\quad(0<\theta<1). \tag{15}$$

注意到函數 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在所述矩形上的一致連續性，可以寫成

$$\frac{\partial f(x,y+\theta\Delta y)}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\eta(x,y,\Delta y) \tag{16}$$

並且當 $\Delta y\to 0$ 時，對於 x 與 y 來講，$\eta(x,y,\Delta y)$ 一致趨向零，就是說，對於任何一個正數 ε，存在這樣一個 δ，使得只要 $|\Delta y|<\delta$，則 $|\eta(x,y,\Delta y)|<\varepsilon$。由此推出

$$\left|\int_a^b\eta(x,y,\Delta y)\,dx\right|\leqslant\int_a^b\varepsilon\,dx=\varepsilon(b-a),\quad(|\Delta y|<\delta).$$

再由於 ε 的任意小性，我們有：

(17)　　　　當 $\Delta y\to 0$ 時，$\int_a^b \eta(x,y,\Delta y)\,dx\to 0$

回到公式(14)。利用(15)與(16)，並注意 Δy 不依賴於 x，可以寫成：

$$\Delta I(y)=\Delta y\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+\Delta y\int_a^b \eta(x,y,\Delta y)\,dx.$$

用 Δy 除再求極限，根據(17)，我們得到：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta I(y)}{\Delta y}=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx,$$

於是證明了公式(13)。注意，若只是假設這個函數 $f(x,y)$ 連續，則由此以及公式(14)，當 $\Delta y\to 0$ 時，對於 x 與 y 來講，差 $[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$ 一致趨向零，就可以推出 $I(y)$ 是 y 的連續函數。

現在我們在以前的假定下考慮關於 $f(x,y)$ 的積分

$$I_1(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx, \tag{18}$$

其中積分限 x_1 與 x_2，屬於 (a,b)，而依賴於 y，並且我們假設這兩個函數有對 y 的微商，於是它們連續。

當 y 得到改變量 Δy 時，x_1 與 x_2 得到的改變量各記作 Δx_1 與 Δx_2。我們有：

(19)　　　　$\Delta I_1(y)=I_1(y+\Delta y)-I_1(y)=$

$$=\int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} f(x,y+\Delta y)\,dx-\int_{x_1}^{x_2}(x,y)\,dx.$$

注意 [1,94]：

$$\int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2}=\int_{x_1}^{x_2}+\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}-\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1},$$

我們可以把等式 (19) 寫成:

$$\Delta I_1(y)=\int_{x_1}^{x_2}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx+ \tag{20}$$

$$+\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}f(x,y+\Delta y)\,dx-\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}f(x,y+\Delta y)\,dx.$$

在這些計算中，我們假設，當 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 而 x 取屬於所寫的積分的積分區間的所有的值時，函數 $f(x,y)$ 滿足上述的條件。

依照中值定理 [I,95] 可以寫成:

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}f(x,y+\Delta y)dx=\Delta x_1 f(x_1+\theta_1\Delta x_1,y+\Delta y)=\Delta x_1[f(x_1,y)+\eta_1]$$

$$\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}f(x,y+\Delta y)dx=\Delta x_2 f(x_2+\theta_2\Delta x_2,y+\Delta y)=\Delta x_2[f(x_2,y)+\eta_2]$$

$$(0<\theta_1 \text{與} \theta_2<1).$$

若 $\Delta y\to 0$，則 Δx_1 與 Δx_2 也 $\to 0$，根據 $f(x,y)$ 的連續性，可以肯定，這時 η_1 與 $\eta_2\to 0$.

把這兩個表達式代入到公式 (20)中，利用公式 (15) 與 (16)，再除以 Δy，得到:

$$\frac{\Delta I_1(y)}{\Delta y}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx+[f(x_2,y)+\eta_2]\frac{\Delta x_2}{\Delta y}-[f(x_1,y)+\eta_1]\frac{\Delta x_1}{y}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} \eta(x,y,\Delta y)\,dx.$$

取極限，根據(17)，得到下面這個求積分(18)的微商的公式：

$$(21)\quad \frac{d}{dy}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy+f(x_2,y)\frac{dx_2}{dy}-f(x_1,y)\frac{dx_1}{dy}.$$

若x_1與x_2不依賴於y，則得到公式(13)。像(13)這樣的公式，當求二重積分對參變量的微商時，只要積分區域(B)不依賴於這參變量，也是正確的。例如若沿區域(B)的二重積分的被積函數$f(M,t)$，不只是依賴於變點M，而且也依賴於參變量t，則

$$(22)\quad \frac{d}{dt}\iint_{(B)} f(M,t)\,d\sigma=\iint_{(B)}\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}\,d\sigma.$$

這裏我們算作，當M在包含有界線的區域(B)上改變而t在某一區間上改變時，$f(M,t)$與$\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}$是連續函數。

注意，當我們證明公式(13)與(12)成立時，積分區間是有限的，在下面的例中，對於無窮區間我們也要應用公式(13)。以後再講可以這樣應用的條件。

由上面的公式也可以推出，若$f(x,y)$，$x_2(y)$與$x_1(y)$是連續函數，則積分(18)也是y的連續函數。

81. 例　1. 在[28]中我們求過方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=f(t),$$

滿足初始條件

$$(23)\quad y\Big|_{t=0}=\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0$$

的特殊解。

它具有下面的形狀:

$$y=\frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du.$$

依照法則(21)直接求微商，不難驗證這是個解。我們有:

$$\frac{dy}{dt}=\int_0^t f(u)\cos k(t-u)du+\frac{1}{k}f(u)\sin k(t-u)\Big|_{u=t}=\int_0^t f(u)\cos k(t-u)du$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-k\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du+f(u)\cos k(t-u)\Big|_{u=t}=-k^2y+f(t),$$

就是說，實際上，

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=f(t),$$

若設 $t=0$，由上面的公式直接得到等式(23)。

2.設要計算積分 [1,110]

$$I_1=\int_0^1\frac{\lg(1+x)}{1+x^2}dx.$$

引用參變量 α，考慮:

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\lg(1+\alpha x)}{1+x^2}dx.$$

直接看出，

$$I(0)=0;\ I(1)=I_1,$$

對於參變量 α 施用公式(21)，給出:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\alpha\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}dx+\frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.$$

分解這有理分式爲部分分式，得到：

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[-\frac{\alpha}{1+\alpha x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha}{1+x^2}\right],$$

再對 x 求積分：

$$\int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx=-\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha\operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}$$

最後結果：

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha\operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}=\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha\operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}.$$

$$(24)\qquad I(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha+\int_0^\alpha \frac{\alpha\operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

這裏我們沒有寫常數項，因爲 $I(0)=0$。對於第二項應用分部積分法則：

$$\int_0^\alpha \frac{\alpha\operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha\, d\lg(1+\alpha^2)$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\ tg}\alpha\cdot\lg(1+\alpha^2)\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha}-\frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

於是根據 (24) 推知：

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha\cdot\lg(1+\alpha^2),$$

當 $\alpha=1$ 時，由此：

$$I_1=\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\lg 2.$$

5.計算積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx,$$

替代這個積分，我們來考慮外表上較複雜的積分

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \tag{25}$$

對 β 求微商:

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)dx=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x dx.$$

後面的積分不難計算 [I,201]:

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx=e^{-\alpha x}\frac{-\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由此

$$I(\alpha,\beta)=\int\frac{\alpha\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2}+C=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}+C \tag{26}$$

只剩下要確定積分常數 C，它不依賴於 β. 爲此，在等式(25)與(26)中，我們讓 β 逼近 0:

$$\lim_{\beta\to 0}I(\alpha,\beta)=I(\alpha,0)=0;\quad I(\alpha,0)=\operatorname{arctg}0+C=0,$$

由此顯見 $C=0$. 所以我們有:

$$I(\alpha,\beta)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha},$$

當 $\alpha=0$ 時，由 $I(\alpha,\beta)$ 得到所給的積分，這裏 α 需要從正數一方面逼近零，就是 $\alpha\to+0$. 若在上面的等式中讓 α 逼近零，則得到不同的極限，要看 $\beta>0$ 還是 $\beta<0$;

$$\lim_{\alpha\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 當\ \beta>0\ 時\\ -\frac{\pi}{2} & 當\ \beta<0\ 時\\ 0 & 當\ \beta=0\ 時\end{cases}$$

所以最後結果是[1]:

$$I(\beta)=\int_0^\infty\frac{\sin\ \beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 當\ \beta>0\ 時\\ -\frac{\pi}{2} & 當\ \beta<0\ 時\\ 0 & 當\ \beta=0\ 時\end{cases}$$

注意，左邊的積分給出一個β的不連續函數$I(\beta)$。圖74上表示出這個不連續函數的圖形，它的組成部分是兩條半直線與一個點。

4. 由明顯的等式

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\quad(\alpha>0)$$

對α求微商k次，得到:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^k dx=\frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

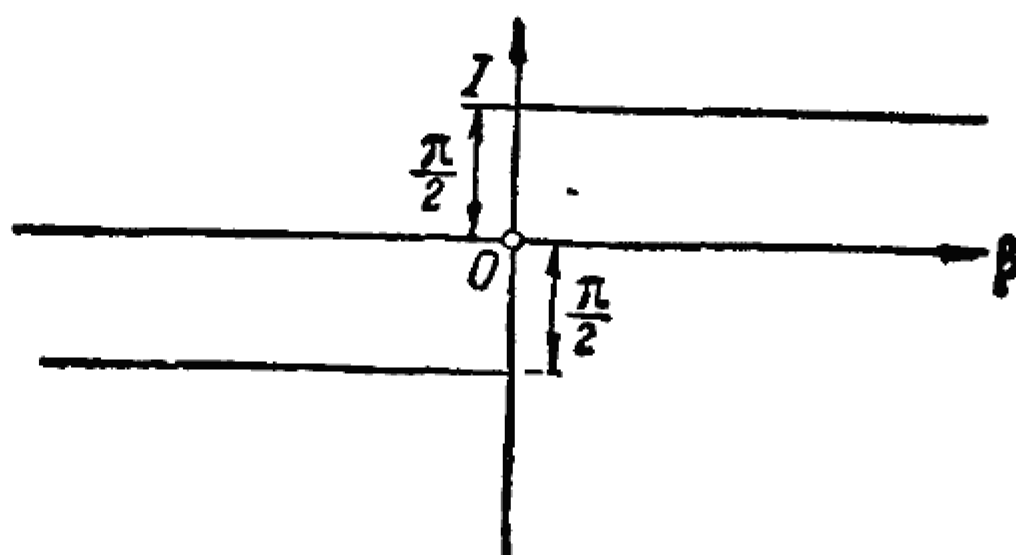


圖 74

現在考慮積分

$$I_n=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^n dx\quad(\alpha>0).$$

---

[1] 以上的討論是不嚴格的，因爲假設了等式$\lim_{\beta\to0}I(\alpha,\beta)=I(\alpha,0)$；$\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)=I(0,\beta)$，若是知道$I(\alpha,\beta)$是$\beta$以及$\alpha$的連續函數，它們才可以算作顯然成立。此外，還要注意，若在積分號下沒有引進因子$e^{-\alpha x}$，則對β求微商後得到的積分$\int_0^\infty\cos\beta\,dx$沒有意義。在[85]中再給$I(\alpha,\beta)$連續的嚴格證明。

若n是奇數：$n=2k+1$，則用替換$x^2=t$來計算I_n：

$$I_{2k+1}=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2k}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}t^k dt=\frac{1}{2}\ \frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

為要考慮n是偶數的情形，在公式(4)中引用新的積分變量$x=\sqrt{r}\ t$.在得到的結果中再用x替換t，就有公式：

$$I_0=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

對α求微商k次，求得：

$$\frac{d^kI_0}{d\alpha^k}=(-1)^k\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2k}dx,$$

由此

$$I_{2k}=(-1)^k\frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^k\cdot\alpha^{k+\frac{1}{2}}}.$$

5.積分

$$I(\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx,\qquad (\alpha>0)$$

依賴於兩個參變量α與β，我們把α考慮作常量。對β求微商：

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta}=-\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\quad x\,dx=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty \sin\beta x\,d e^{-\alpha x^2}.$$

應用分部積分法則：

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta}=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\Big|_{x=0}^{x=\infty}-\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=-\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx,$$

就是

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta}=-\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta).$$

在這個微分方程中分離變量：

$$\frac{dI(\beta)}{I(\beta)}=-\frac{\beta}{2\alpha}d\beta,$$

由此求積分，得到：

(27)
$$I(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},$$

其中常數 C 不依賴於 β. 讓 $\beta=0$，就有：

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

另一方面，根據(27)：

$$I(0)=C.$$

於是推知，$C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$，把這個 C 的表達式代入到(27)中，得到最後結果：

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

在得到的結果中，用 α^2 來替換 α，得到：

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

以後我們討論熱的分佈的方程時要利用它。

82. 反常積分　我們已經不只一次遇到被積函數或是積分限成爲無窮大的積分。在[I,97,98]中，我們講過當滿足某些條件時這樣的積分的確定的意義，現在我們仔細講這種積分。

1. 被積函數成爲無窮大的　設在積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

中，函數 $f(x)$ 當 $a\leqslant x<b$ 時連續，而當 $x=b$ 時成爲無窮大．或者，確切的說，設當 x 由小於 b 的值趨向 b 時，$f(x)$ 不是有界的。那時依照定義[I,97]，我們寫成：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

只是要寫在這等式右邊的極限存在。現在我們來求它存在的條件。依照勾犀基本法則[1,31]，變量的極限存在的必要且充分條件，是使得由改變的某一階段起，這變量的任何兩個值之差的絕對值要小於任何的預先給定的一個正數。在所考慮的情形下，這個差是:

$$\int_a^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx - \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx, \quad (\varepsilon''<\varepsilon')$$

如此我們得到下面的一般條件: **爲要反常積分**

$$\int_a^b f(x)dx$$

存在（收歛），其中被積函數 $f(x)$ **當** $x=b-0$ **時成爲無窮大，必須且僅須，當隨意給定一個正數** δ **時，有這樣一個** η **存在，使得:**

$$當\ 0<\varepsilon'\ 與\ \varepsilon''<\eta\ 時，\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right|<\delta$$

注意已知的不等式[1,95]

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} |f(x)|\,dx,$$

直接斷定，由積分

(28) $$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

的收歛可以推出積分

(29) $$\int_a^b f(x)dx$$

的收歛。

反過來是不對的，就是說，由積分 (29) 收斂不能推出積分 (28) 收斂。若積分 (28) 收斂，則叫做積分 (29) **絕對收斂**。[比較 I,124]。

由一般的判別法推出應用上特別重要的勾犀判別法：**若被積函數 $f(x)$，當 $a\leqslant x<b$ 時連續，當 x 逼近於 b 時滿足條件**

$$|f(x)|<\frac{A}{(b-x)^p},\tag{30}$$

其中 A 與 p 是正的常數，並且 $p<1$，則反常積分 (29) 收斂，而且絕對收斂。

若

$$|f(x)|>\frac{A}{(b-x)^p}\quad \text{而 } p\geqslant 1,\tag{31}$$

則積分 (29) 不存在。

事實上，在 (30) 的情形，我們有：

$$\left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx\right|\leqslant\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''}|f(x)|\,dx<A\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''}\frac{dx}{(b-x)^p}=A\frac{\varepsilon'^{1-p}-\varepsilon''^{1-p}}{1-p}$$

這時，當 ε' 與 ε'' 足夠小時，右邊可以隨意多小，因爲指數 $(1-p)$ 是正的 $(p<1)$。

在 (31) 的情形，首先我們可以相信，在點 $x=b$ 的近傍，連續函數 $f(x)$ 不變號，因爲根據 (31)，$f(x)$ 的絕對值保持大於一個正數，於是推知，$f(x)$ 不能等於零，所以不可以變號。我們限制考慮 $f(x)$ 是正的的情形，就有：

$$\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx>A\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon''}\frac{dx}{(b-x)^p}=\begin{cases}A\lg\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \text{ 當 } p=1 \text{ 時}\\ A\,\frac{\varepsilon'^{1-p}-\varepsilon''^{1-p}}{1-p},\end{cases}$$

由於條件 $1-p<0$，當 ε' 與 ε'' 足够小時，這等式右邊可以隨意多大。

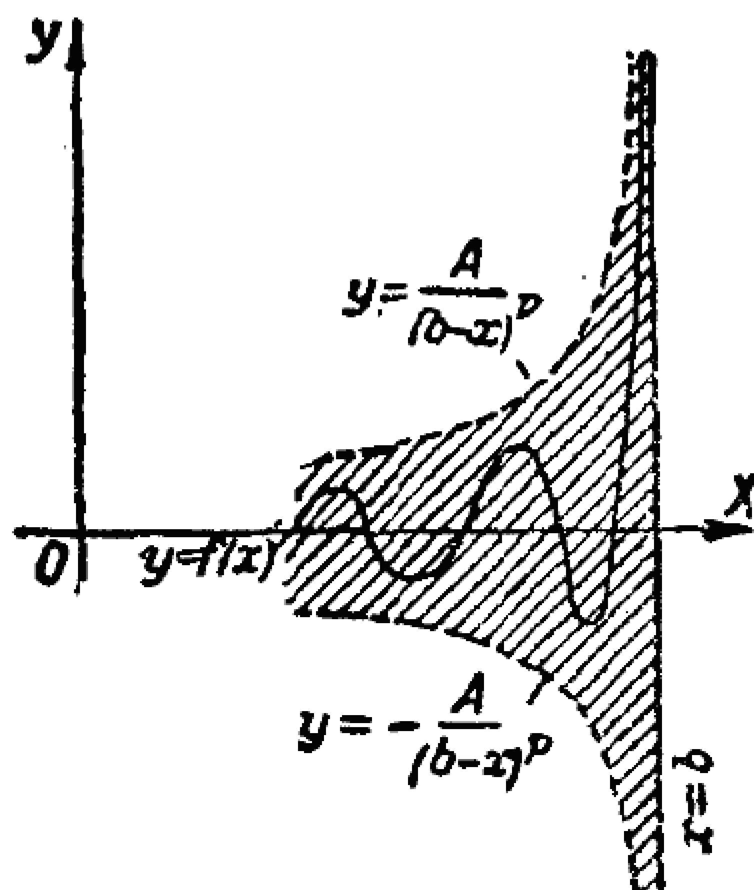


圖 75

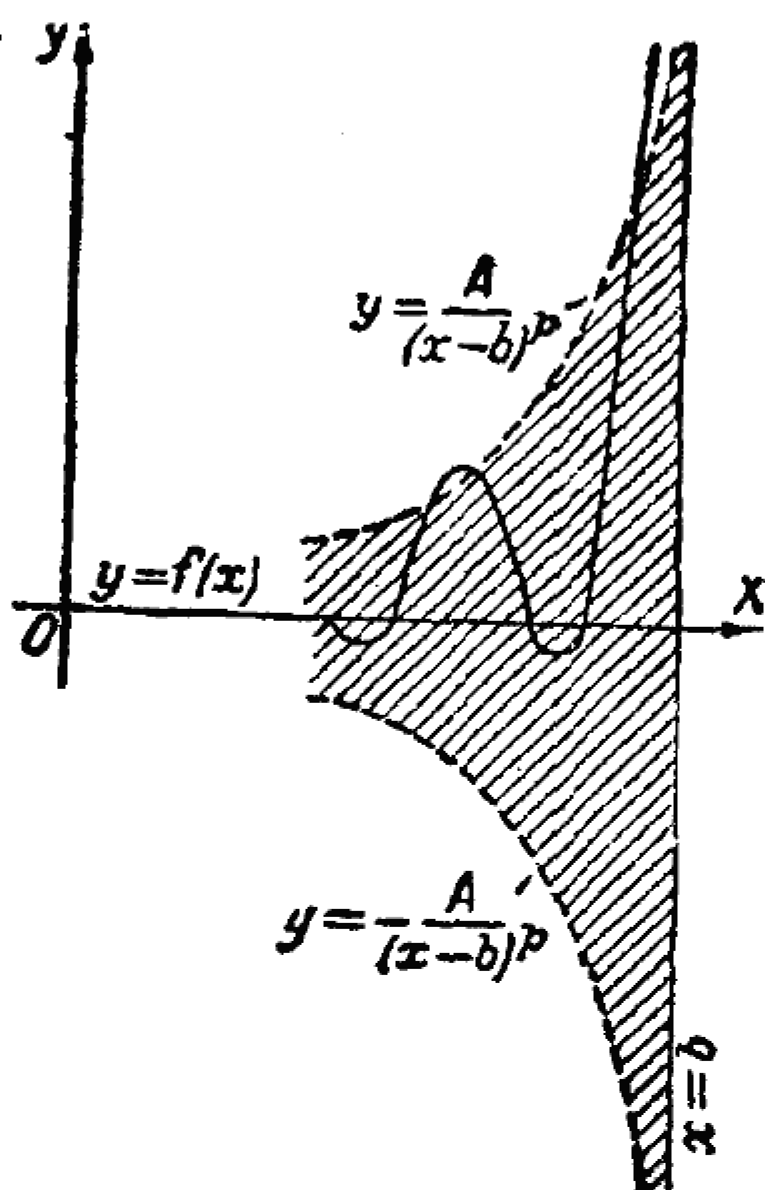


圖 76

勾犀判別法的幾何意義十分清楚，因爲在 (30) 的情形，曲線 $y=f(x)$ 當 x 逼近於 b 時整個出現在一個區域內部，這個區域以兩條對稱的曲線

$$y=\pm\frac{A}{(b-x)^p} \tag{32}$$

爲界 (圖 75)，當 $p<1$ 時，它們有有限面積，所以 $f(x)$ 也有有限面積。在 (31) 的情形，曲線 $y=f(x)$ 在點 $x=b$ 的近傍超出上述的區域，並且因爲曲線 (32) 當 $p\geq 1$ 時沒有有限面積，於是曲線 $y=f(x)$ 也就沒有有限面積(圖 76)。

完全類似的，可以考慮，在下限 $x=a$ 或在積分區間的某一個中間點 $x=c$，$f(x)$ 成爲無窮大時的情形 [1,97]。

2.無窮積分限 現在我們考慮 $b=+\infty$ 的情形，就是反常積分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

假設當 $x\geqslant a$ 時 $f(x)$ 連續。像上面的情形一樣，應用勾犀判別法，得到：**爲要反常積分**

$$(33)\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

存在（收斂），必須且僅須，當隨意給定一個小的正數 δ **時，存在有這樣一個正數** N **，使得**

$$\text{當 } b' \text{ 與 } b''>N \text{ 時，}\quad \left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\delta.$$

特別是，像情形 1 完全一樣，可以證明勾犀判別法：**若被積函數** $f(x)$ **當** $x\geqslant a$ **時連續，並且**

$$(34)\qquad |f(x)|<\frac{A}{x^p}\quad \text{而}\quad p>1,$$

則反常積分（33）**絕對收斂。**

若

$$(35)\qquad |f(x)|>\frac{A}{x^p}\quad \text{而}\quad p\leqslant 1,$$

則積分（33）**不存在。**

用完全類似的方法可以考慮反常積分 [1,98]：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{與} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

現在講應用勾犀判別法時比較方便的方法。先講形狀如（33）的積分。它的收斂條件（34）的特點，是要存在有這樣的一個 $p>1$，使得當 $x\to+\infty$ 時，乘積 $f(x)x^p$ 保持有界。若

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)x^p$$

有有限的極限存在，則這條件自然滿足。

同樣，若極限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)x^p \qquad (p\leqslant 1)$$

存在，而不是零(有限或無窮)，則發散的條件(35)成立。例如，[81]例5中的積分是絕對收斂的，因爲對於任何正數 p，當 $x\to+\infty$ 時，乘積 $e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\cdot x^p$ 趨向零。實際上，因子 $\cos\beta x$ 的絕對值不超過一，而乘積 $e^{-\alpha x^2}x^p\to 0$，這不難由洛畢達法則肯定，例如我們可以設 $p=2$ [I,65]

積分

$$\int_0^\infty \frac{5x^2+1}{x^3+4}\,dx$$

是發散的，因爲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+1}{x^3+4}\,x=5 \qquad (p=1)$$

一般說來，具有一個或兩個無窮限的有理分式的積分，只是當分母的次數比分子的次數至少高兩次時才收斂。此外，這樣的積分收斂還必須當這分式化爲最簡以後分母在積分區間上不等於零。若這區間是 $(-\infty,+\infty)$，則分母應當沒有實根。

完全類似的方法可以應用於被積函數成爲無窮大的積分的收斂與發散的條件。例如，積分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^m}\,dx \qquad (36)$$

當 $m<2$ 時收斂，因爲當 $x\to+0$ 時，乘積 $\dfrac{\sin x}{x^m}x^{m-1}=\dfrac{\sin x}{x}$ 趨向一，而 $p=m-1<1$ 反之，當 $m\geqslant 2$ 時，上面這積分發散。

83. 非絕對收斂積分 勾犀判別法只給出反常積分收斂的充分條

件(30)或(34)。例如，它不能應用於非絕對收斂積分，就是這樣的積分

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 或 } \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收斂，而

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ 或 } \int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$$

不收斂。我們講一個非絕對收斂積分的判別法：**若積分**

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (a>0)$$

當 x 無限增加時保持有界，則對於任何的 $p>0$，積分

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^p}dx$$

收斂。實際上，應用分部積分法則，得到：

$$\int_a^N \frac{f(x)}{x^p}dx = \int_a^N \frac{1}{x^p}dF(x) = \frac{F(x)}{x^p}\Big|_{x=a}^{x=N} + p\int_a^N \frac{F(x)}{x^{1+p}}dx$$

或者，注意 $F(a)=0$：

$$\int_a^N \frac{f(x)}{x^p}dx = \frac{F(N)}{N^p} + p\int_a^N \frac{F(x)}{x^{1+p}}dx.$$

當 N 無限增加時，右邊第一項趨向零，因為由條件 $F(N)$ 保持有界而 $p>0$。依照勾犀判別法，由積分表示的第二項收斂，因為由

條件被積函數的分子當 $x\to+\infty$ 時保持有界，而在分母中 x 的次數高於一次。如此，存在有極限

$$\int_a^{\infty}\frac{f(x)}{x^p}dx=\lim_{N\to\infty}\int_a^N\frac{f(x)}{x^p}dx=p\int_a^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{1+p}}dx.$$

例 1.取在[81]例 3 中我們考慮過的積分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx, \tag{36}$$

注意，當 $x=0$ 時，被積函數取有限值 β，所以這積分的反常性只在於無窮限。再者，顯然

$$\int_0^N \sin\beta x\,dx=\left[\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right]_{x=a}^{x=N},$$

由此

$$\left|\int_a^N \sin\beta x\,dx\right|\leq\frac{2}{\beta}\qquad(\beta>0),$$

就是說，對於任何的 a 與 N，積分 $\int_a^N \sin\beta x\,dx$ 保持有界。於是應用所證明的定理於積分 (36)，知道它收斂。

2.再考慮積分

$$\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx. \tag{37}$$

替換變量 $x=\sqrt{t}$，把它化為

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

象在例 1 中所作的一樣，可以證明它收斂。我們仔細講些使得積分 (37) 收斂的理由。圖 77 上表示出被積函數 $f(x)=\sin(x^2)$ 的圖形，當 $x\to+\infty$ 時，它不趨向零，顯然，勾犀判別法不能用。分區間 $(0,+\infty)$ 爲部分區間：

$$(0,\sqrt{\pi});\ (\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi});\ (\sqrt{2\pi},\sqrt{3\pi});\ \cdots;\ (\sqrt{n\pi},\sqrt{(n+1)\pi});\ \cdots,$$

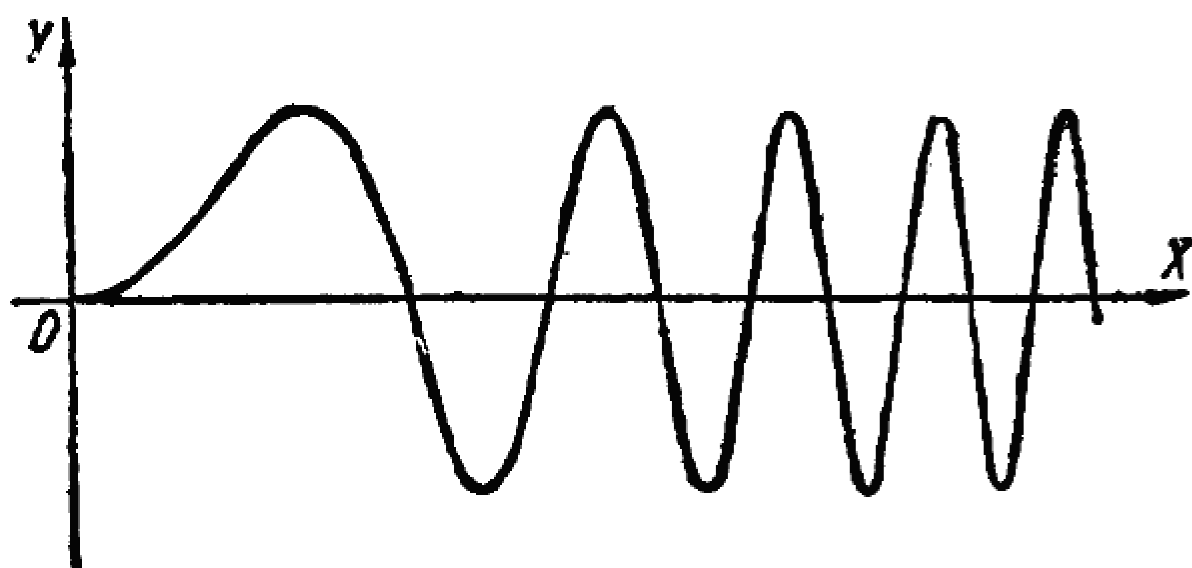


圖　77

在其中每一個區間上，函數 $y=\sin(x^2)$ 保持不變號：在第一個區間 (+)；在第二個 (−)；在第三個 (+) 等等。設

$$u_n=(-1)^n\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin(x^2)\,dx.$$

引用新的變量 t 來替代 x

$$x=\sqrt{t+n\pi}$$

得到：

$$u_n=\frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+n\pi)}{\sqrt{t+n\pi}}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+n\pi}}\,dt;$$

由此看出，數 u_n 是正的，而且當正整數 n 增加時 u_n 減小。此外，由等式

$$u_n<\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{n\pi}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

推知，當 $n\to+\infty$ 時，$u_n\to 0$。由所有以上所述推出，交錯級數

$$u_0-u_1+u_2-u_3+\cdots+(-1)^n u_n+\cdots \tag{38}$$

收斂 [I,123]，

現在設

$$\sqrt{m\pi}\leqslant b\leqslant\sqrt{(m+1)\pi}, \tag{39}$$

並考慮積分

$$\int_0^b \sin(x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(x^2)\,dx+\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\,dx+\cdots+\int_{\sqrt{(m-1)\pi}}^{\sqrt{m\pi}}\sin(x^2)\,dx+$$

$$+\int_{\sqrt{m\pi}}^{b}\sin(x^2)\,dx=u_0-u_1+\cdots+(-1)^{m-1}u_{m-1}+\theta(-1)^m u_m, \tag{40}$$

其中 $0\leqslant\theta<1$， 因爲最後的區間 $(\sqrt{m\pi},b)$ 只是區間 $(\sqrt{m\pi},\sqrt{(m+1)\pi})$ 的一部分，甚至於當 $b=\sqrt{m\pi}$ 時它就沒有了。當 $b\to+\infty$ 時，由不等式(39)確定的整數 n 就趨向 $+\infty$，再由級數(38)的收斂性以及等式(40)推出反常積分

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\sin(x^2)\,dx=u_0-u_1+u_2-u_3+\cdots$$

存在。

在這一個情形下，反常積分存在是由於被積函數的交錯性，也由於出現在 OX 軸上下的一序列的面積，當由原點遠移時，逐漸減小而趨向零，這裏後面這個情況並不是它們的高趨向零，而是面積無限縮小。

同樣可以考慮積分(36)。

在卷 III 中，我們將得到積分(37)的值如下：

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

上面寫的這個積分叫做富列聶積分或折射積分。後面這個名詞是連繫於這些積分在光學中的應用的。

84. 一致收斂積分 [1]　若反常積分的被積函數依賴於一個參變量

1) 讀這一段之前回憶一下卷一中一致收斂級數的定理是有用的。

y，則在［82］1 與 2 的一般判別法中談到的數 η 與 N，一般說來，依賴於 y。**若當 y 在區間 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上改變時，在條件**

$$(41)\qquad \text{當 } 0<\varepsilon' \text{ 與 } \varepsilon''<\eta \text{ 時，}\quad \left|\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x, y)\,dx\right|<\delta$$

$$(42)\qquad \text{當 } b' \text{ 與 } b''>N \text{ 時，}\quad \left|\int_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx\right|<\delta$$

中可以選擇不依賴於 y 的值的數 η 與 N，則叫做反常積分

$$(43)\qquad \int_a^b f(x, y)\,dx,\quad \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

關於 y 一致收斂。

特別是，當應用勾犀判別法時，若常數 A 與 p 不依賴於 y，則所考慮的積分一致收斂。

任何一個收斂的反常積分，可以表示成收斂級數的形狀，它的每一項是一個普通積分。這個道理以上我們已經利用過。我們回到 (43) 中第一個積分。給定一串下降而趨向零的正數

$$(44)\qquad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\cdots,\ \varepsilon_n,\cdots$$

可以寫成：

$$(45)\ \int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^{b-\varepsilon_1} f(x, y)\,dx+\int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2}+\int_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_3}+\cdots+$$

$$+\int_{b-\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_{n+1}}+\cdots=u_0(y)+u_1(y)+u_2(y)+\cdots+u_n(y)+\cdots,$$

其中

$$(46) \qquad u_n(y)=\int\limits_{b-\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_{n+1}} f(x,\ y)\,dx.$$

在(43)中第二個積分的情形，給定一串無限上升的數

$$(47) \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\cdots,\ b_n,\cdots$$

就有：

$$(48) \qquad \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_{a}^{b_1} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_{b_1}^{b_2}+\int\limits_{b_2}^{b_3}+\cdots+\int\limits_{b_n}^{b_{n+1}}+\cdots$$
$$=u_0(y)+u_1(y)+u_2(y)+\cdots+u_n(y)+\cdots$$

由積分與級數一致收斂的定義[I, 143]，直接推出，若反常積分一致收斂，則對應於它的級數，無論數(44)或(47)怎樣選擇，也一致收斂。實際上，例如，級數(45)很靠後的項的和等於一個沿逼近於 b 的線段的積分，對於這樣的積分，不等式(41)成立。

一致收斂積分的性質類似於一致收斂級數的性質[I, 146]爲確定起見，我們對於(43)中第二個積分來敘述這些性質，不過所講的對第一個積分也適用。

1)若函數 $f(x,y)$ 當 $a\leqslant x$ 時連續，而且當 y 在一個有限區間 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上改變時，積分

$$(49) \qquad \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx$$

一致收斂，則當 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 時，它是 y 的連續函數。

2)在同樣條件下，在積分號下求積分的公式成立：

$$(50) \qquad \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy\int\limits_{a}^{\infty} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_{a}^{+\infty} dx\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,\ y)\,dy.$$

3)若 $f(x,y)$ 與 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 連續，積分(49)收斂，而且積分

(51) $$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

一致收斂，則在積分號下求微商的公式成立：

(52) $$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

我們證明性質1)與3)以爲例。依照[80]中的證明，級數(48)的項

(53) $$u_n(y) = \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x,y)\,dx,$$

是連續函數，並且根據積分的一致收斂性，這級數也一致收斂，於是推知，級數的和，就是積分(49)，也是連續函數[1,146]。

爲要證明3)。我們提出，由[80]推知，積分(53)可以在積分號下求微商，就是說

$$u'_n(y) = \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

不過，根據積分(51)的一致收斂性，我們有一致收斂的級數：

(54) $$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(y)$$

所以，級數(48)收斂，而且由微商作成的級數一致收斂。由此推知[1,146]，級數(54)的和是級數(48)的和的微商，這就可以化爲公

式(52)。

我們講一個反常積分的絕對與一致收斂性的簡單判別法，與級數的絕對與一致收斂性的判別法 [I, 147] 類似。我們對(43)中第二個積分來作。對於第一個積分有類似的判別法成立。

像以前一樣，設 $f(x,y)$ 當 $a\leqslant x$ 而且 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 時連續。**若存在有一個當 $a\leqslant x$ 時連續而且是正的函數 $\varphi(x)$，使得當 $a\leqslant x$ 而且 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 時，$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)$，並且積分**

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx \tag{55}$$

收斂，則積分(49)**絕對收斂而且一致收斂（關於 y）。**根據收斂性(55)，當給定任何 $\delta>0$ 時，存在這樣一個 N，使得

$$\text{當 } b' \text{ 與 } b''>N \text{ 時}\quad \int_{b'}^{b''}\varphi(x)dx<\delta,$$

這裏這個 N 不依賴於 y，因為 $\varphi(x)$ 不含有 y。於是由 $|f(x,y)|\leqslant\varphi(y)$ 推出：

$$\text{當 } b' \text{ 與 } b''>N \text{ 時，}\left|\int_{b'}^{b''}f(x,y)\,dx\right|\leqslant\int_{b'}^{b''}|f(x,y)|\,dx\leqslant\int_{b'}^{b''}\varphi(x)dx<\delta,$$

就是說，這個不依賴於 y 的 N，對於積分(49)，甚至於對於積分

$$\int_a^{+\infty}|f(x,\ y)|\,dx,$$

都適用，於是證明了我們的肯定。

85. **例** 1.再仔細考慮 [81] 中例 3：

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx. \tag{56}$$

現在算作 α 是固定的正數，而把積分(56)考慮作依賴於參變量 β 的積分。注意，當 $x=0$ 時，商式 $\frac{\sin\beta x}{x}$ 保持連續，而且當 $x=0$ 時，它等於 β，所以積分(56)的反常性只在於無窮限。對於正的 $x>1$ 我們有 $\left|\frac{\sin\beta x}{x}\right|<1$，從而

$$\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right|<e^{-\alpha x},$$

而且積分

$$\int_1^\infty e^{-\alpha x}dx=\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_{x=1}^{x=\infty}=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha}$$

收斂，於是推知，依照所證明的判別法，積分(56)關於 β 一致收斂。在積分號下求它對 β 的微商，得到積分

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx,$$

根據 $|e^{-\alpha x}\cos\beta x|<e^{-\alpha x}$，它也一致收斂。由此推出，積分(56)是 β 的連續函數，並且它可以在積分號下求微商爲要斷定這個例中的所有計算，只剩下要證明 $\lim\limits_{\alpha\to+0}I(\alpha,\beta)=I(0,\beta)$，就是說，當固定住 β 時，在零的右邊，積分(56)是 α 的連續函數。我們來證明，當 $\alpha\geqslant0$ 時，它是 α 的連續函數。以前我們已經證明了當 $\alpha=0$ 時它收斂。

可以算作 $\beta>0$，這並不限制一般性，因爲 $\beta<0$ 的情形只要改變積分的符號就化爲 $\beta>0$ 的情形，在 $\beta=0$ 的情形這個肯定是顯然的。

以下的作法與在[83]中我們對於富列聶積分所作的類似。分全部區間 $(0,+\infty)$ 爲部分區間：

$$\left(0,\ \frac{\pi}{\beta}\right),\ \left(\frac{\pi}{\beta},\ \frac{2\pi}{\beta}\right),\cdots,\left(\frac{n\pi}{\beta},\ \frac{(n+1)\pi}{\beta}\right),\cdots$$

在第一個部分區間上，被積函數

$$f(x)=e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\qquad(\alpha\geqslant 0 \text{ 而 } \beta>0)$$

有(+)號，在第二個上有(−)號等等。設

$$u_n(\alpha)=(-1)^n\int_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx.$$

引用新的變量 $t=x-\frac{n\pi}{\beta}$ 來替代 x，得到：

$$u_n(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\alpha t-\frac{n\alpha\pi}{\beta}}\frac{\sin\beta t}{t+\frac{n\pi}{\beta}}dt,$$

由此看出，$u_n(\alpha)$ 是正的，而且當 n 增加時 $u_n(\alpha)$ 下降。

此外，由不等式：

$$|u_n(\alpha)|<\int_0^{\frac{\pi}{\beta}}\frac{1}{\frac{n\pi}{\beta}}dt=\frac{1}{n}\tag{57}$$

推知，當 $n\to\infty$ 時，$u_n(\alpha)\to 0$.

所以，當 $\alpha\geqslant 0$ 時，我們可以把這積分表示成交錯級數之和的形狀：

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=u_0(\alpha)-u_1(\alpha)+u_2(\alpha)-\ldots+(-1)^n u_n(\alpha)+\ldots\tag{58}$$

根據(57)與[I,123]中的定理，這級數的餘項有估計值：

$$|r_n(\alpha)|<|u_{n+1}(\alpha)|<\frac{1}{n+1},$$

$\frac{1}{n+1}$ 不依賴於 α，並且當 $n\to+\infty$ 時，$\frac{1}{n+1}\to 0$。由此推出，當 $\alpha\geqslant 0$ 時這級數一致收斂，於是推知[I,146]它的和是連續的，因爲根據[80]，這級數的項 $u_n(\alpha)$ 是連續函數。

注意，只由級數(58)當 $\alpha\geq 0$ 時的一致收斂性，沒有補充的理由，還不能推知積分的一致收斂性。在所給的情形下，可以證明，當 $\alpha\geq 0$ 時，這積分一致收斂。

注意，當 $\beta>0$ 時，積分：

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx$$

等於 $\frac{\pi}{2}$，當 $\beta<0$ 時等於 $(-\frac{\pi}{2})$，當 $\beta=0$ 時等於零。這個積分給出一個 β 的函數，當 $\beta=0$ 時，有連續性的間斷點。由此推出，在含有 $\beta=0$ 的 β 的改變區間上，所寫的積分關於 β 不可能一致收斂。若我們取零的右邊這個區間，則積分的量 $\frac{\pi}{2}$ 對 β 的微商等於零，不過這個積分不能在積分號下求微商，因爲這樣求微商之後得到 $\cos\beta x$ 沿區間 $(0,\infty)$ 的積分，它沒有意義。

2.在 [81] 例 4 中，我們在積分號下求過積分

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\qquad(\alpha>0)$$

對 α 的微商 k 次。爲要證明這個運算合理，只要證明，當 k 是正整數時，在任何區間 $c\leq\alpha\leq d$ 上，其中 $c>0$，積分

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,x^k dx$$

一致收斂。因爲在積分區間 $x\geq 0$ 上，顯然 $e^{-\alpha x}\leq e^{-cx}$ 而且 $e^{-\alpha x}x^k\leq e^{-cx}x^k$，根據在 [84] 中所證的一致收斂性的判別法，我們只須證明積分

$$\int_0^\infty e^{-cx}\,x^k dx$$

收斂。不過若記作，$f(x)=e^{-cx}x^k$，則應用普通的洛畢達法則 [I,65]，可以肯定，當 $x\to+\infty$ 時，$f(x)x^2=e^{-cx}x^{k+2}\to 0$，於是依照 [82] 所講的法則，我們看出，所寫的積分實際上收斂。

3.在 [79] 中我們得到下面形狀的亞貝爾問題的解

$$u(z)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}}.$$

現在我們證明，可以計算這等式右邊的微商。記作：

$$I(z)=\int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}}$$

如果在積分號下對 z 求微商，在積分號下我們就得到 $(z-h)^{-\frac{3}{2}}$，它給出發散積分 [82]，所以需要換個作法。用分部積分法則來表示積分 $I(z)$，假設當 $h>0$ 時存在有連續微商 $\varphi'(h)$，並且它在 $h=0$ 近傍是有界的：

$$\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}=-2\int_0^z \varphi(h)\,d\sqrt{z-h}=-2\varphi(h)\sqrt{z-h}\Big|_{h=+0}^{h=z}+$$

$$+2\int_0^z \varphi'(h)\sqrt{z-h}\,dh=2\varphi(+0)\sqrt{z}+2\int_0^z \varphi'(h)\sqrt{z-h}\,dh.$$

記住 $\varphi(+0)=\lim\limits_{h\to+0}\varphi(h)$。這是個常數，一般說來，它不等於零，這裏依照所給的定義 $\varphi(0)=0$。由上面寫的公式求微商，根據 [80] 中 (21)，我們求得：

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}=\frac{\varphi(+0)}{\sqrt{z}}+\int_0^z \frac{\varphi'(h)}{\sqrt{z-h}}\,dh. \tag{59}$$

若 $\varphi(h)$ 是常量，則 $\varphi'(h)=0$，我們就有以前已經得到的公式。若 $\varphi(+0)=0$，則得到：

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}}=\int_0^z \frac{\varphi'(h)dh}{\sqrt{z-h}} \tag{59_1}$$

對於反常積分 $I(z)$ 應用 [80] 中公式 (21)，我們以前沒有證明過。注意，若依照公式

$h=zu$ 引用新的變量 u 來替代 h，則對於 $I(z)$ 得到一個帶有常數限的積分：

$$I(z)=\sqrt{z}\int_0^1 \frac{\varphi(zu)\,du}{\sqrt{1-u}}$$

像以上一樣，假設當 $h>0$ 時存在有連續的而且有界的微商 $\varphi'(h)$，不難驗證，在積分號下可以求微商：

$$\frac{dI(z)}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\int_0^1 \frac{\varphi'(zu)\,du}{\sqrt{1-u}}+\sqrt{z}\int_0^1 \frac{\varphi'(zu)\,u\,du}{\sqrt{1-u}}.$$

用分部積分法則求出第一個積分，再回到原來的變量 h，仍然得到公式(59)。

86.反常重積分　現在我們來考慮反常重積分，由二重積分開始。像以上一樣，反常積分可以有兩種類型：或是被積函數沒有界或是積分區域沒有界。先講第一種情形。設在一個有限區域 (σ) 上，除點 C 外，$f(M)$ 是連續的，並且在點 C 的近傍 $f(M)$ 沒有界。除掉一個包含點 C 在內的某一個小區域 (Δ)。在剩下的區域 $(\sigma-\Delta)$ 上，函數 $f(M)$ 是連續的，而且沒有例外，於是積分

$$\iint\limits_{(\sigma-\Delta)} f(M)\,d\sigma$$

有意義。

若當 Δ 無限縮向點 C 時，這個積分趨向一個確定的極限，而不依賴於 Δ 是怎麼樣縮向 C 的，則這個極限叫做函數 $f(M)$ 沿區域 (σ) 的反常積分：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(M)\,d\sigma=\lim\iint\limits_{(\sigma-\Delta)} f(M)\,d\sigma. \tag{60}$$

先假設在點 C 的近傍 $f(M)$ 是正的，或者確切的說，它不是負的。

設 (Δ') 與 (Δ'') 是這樣的兩個小區域，使得 Δ'' 出現在 Δ' 內部。這時，沿 $(\sigma-\Delta'')$ 的積分與沿 $(\sigma-\Delta')$ 的積分差一個正數，它等於沿區域 $(\Delta'-\Delta'')$ 的積分，而在這區域上 $f(M)\geqslant 0$。由此直接看出，當 (Δ) 無限縮向 C 時，積分 (60) 上升（若相繼的區域是前一個的部分區域），於是推知，或者趨向一個極限，或者無限上升。若當 (Δ) 按照某一個確定的規律縮向 C 時，有有限的極限，則當按照任何規律縮小時，就有相同的極限。對於這個情形，極限存在的突出事實是，沿不包含點 C 而出現在使得 $f(M)$ 是正的的點 C 的近傍中的任何區域的積分保持小於某一個正數（這時，若近傍縮向 C，積分就趨向零）。若在點 C 的近傍 $f(M)\leqslant 0$，則由積分中提出一個負號，就化爲以上的情形。現在設在點 C 的任何的小的近傍，$f(M)$ 有不同的符號。在這情形下，我們只考慮絕對收斂的積分，就是這樣的積分

$$\iint\limits_{(\sigma)} |f(M)|\,d\sigma \tag{61}$$

有意義的，也就是收斂的。在其中被積函數已經不是負的，於是對於它以上的討論適用。特別是，由這些討論推知，若 $f_1(M)$ 與 $f_2(M)$ 是兩個正的函數，$f_1(M)\leqslant f_2(M)$，並且 $f_2(M)$ 的積分收斂，則 $f_1(M)$ 的積分也收斂。我們的函數 $f(M)$ 可以表示成兩個正的函數之差的形狀：$f(M)=|f(M)|-[|f(M)|-f(M)]$。由條件積分 (61) 收斂。於是函數 $2|f(M)|$ 的積分也收斂。在 $f(M)\leqslant 0$ 的點，函數 $[|f(M)|-f(M)]$ 等於 $2|f(M)|$，在 $f(M)>0$ 的點，它等於零，就是說，正的函數 $[|f(M)|-f(M)]\leqslant 2|f(M)|$，於是推知，它的積分也收斂。這時差 $|f(M)|-[|f(M)|-f(M)]$ 的積分收斂，就是 $f(M)$ 的積分收斂。所以，若積分 (61) 收斂，則 $f(M)$ 的積分收斂。

我們講一個積分(61)收斂的充分條件：**若在點 C 的近傍，函數滿足條件 $|f(M)|\leqslant \frac{A}{r^p}$，其中 r 是由 C 到變點 M 的距離，A 與 p 是常數，並且 $p<2$，則積分 (61) 收斂**。依照以上所述，我們只須證明，沿任何不含有 C 而包含於以 C 爲圓心具有某一個半徑 r_0 的圓中的任何區域 (σ')，積分 (61) 保持有界。引用原點在 C 的極坐標，並注意上面寫的對於 $|f(M)|$ 的不等式，得到：

$$\iint\limits_{(\sigma')}|f(M)|\,d\sigma\leqslant A\iint\limits_{(\sigma')}\frac{1}{r^p}\,rdrd\varphi=A\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{r^{p-1}}\,drd\varphi.$$

區域 (σ') 一定包含於某一個界於圓周 $r=\eta$ 與 $r=r_0$ 之間的某一個圓環中；其中 η 可以隨意多小。被積函數是正的，於是沿所有的這樣的環求積分，結果只可以增加，就是說

$$\iint\limits_{(\sigma)}|f(M)|\,d\sigma\leqslant A\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\eta^{r_0}\frac{1}{r^{p-1}}\,dr=\frac{2\pi A}{2-p}\left(r_0^{2-p}-\eta^{2-p}\right)$$

注意，$2-p>0$，我們得到對於 (σ') 的積分的估計值：

$$\iint\limits_{(\sigma')}|f(M)|\,d\sigma\leqslant\frac{2\pi A}{2-p}\,r_0^{2-p}. \tag{62}$$

於是證明了以上所講的肯定。

完全類似的方法，可以確定，沿一個有限區域 (v) 的積分，如果 $f(M)$ 在某一點 C 的近傍沒有界的話，所有以上的理由對於這樣的積分都適用。只是所講的積分的絕對收斂性的充分條件在所給的情形要敍述如下：**若在點 C 的近傍，函數滿足條件 $|f(M)|\leqslant\frac{A}{r^p}$，其中 r 是由 C 到變點 M 的距離，A 與 p 是常數，而且 $p<3$，則積分**

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)dv$$

絕對收歛。在所給的情形下，條件 $p<2$ 換成條件 $p<3$，因爲在空間極坐標中，容積單元有表達式 $dv=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$（$r^2$ 替代了 $d\sigma=rdrd\varphi$ 中的 r）。

現在考慮積分區域 (σ) 在所有的方向伸展到無窮遠的情形，或簡單說是積分區域 (σ) 無界的情形。設 (σ_1) 是包含於 (σ) 中的一個有限區域，它無限擴展，使得區域 (σ) 中任何一點 M，由在擴展的某一階段起，會屬於 (σ_1)。算作 $f(M)$ 在 (σ) 上連續，可以作出積分

$$\iint\limits_{(\sigma_1)} f(M)d\sigma \tag{63}$$

若當 (σ_1) 無限擴展時，這個積分趨向一個確定的極限，它不依賴於 (σ_1) 擴展的方式，則這個極限叫做 $f(M)$ 沿無窮區域 (σ) 的積分：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(M)d\sigma=\lim\iint\limits_{(\sigma)} f(M)d\sigma. \tag{64}$$

若對於所有的足够遠的點 M，$f(M)\geqslant 0$，則當 (σ_1) 擴展時，或者有確定的極限，或者無限上升。對於第一個情形突出的事實是，沿任何在 (σ) 內而在一個以原點爲圓心具有某一個半徑 r_0 的圓外的任何區域或任何有限多個區域，積分保持有界（這時，若 $r_0\to\infty$，它將趨向零）。用 (σ') 記上述區域的全部。還要提出，由反常積分的定義推知，若積分

$$\iint\limits_{(\sigma)} |f(M)|d\sigma \tag{65}$$

收歛，則積分 (64) 收歛。在這情形下，它叫做絕對收歛的，我們只考慮這樣的積分。不難證明下述的收歛性的充分條件：**若對於所有的**

足夠遠的點，函數滿足條件 $|f(M)|\leqslant\frac{A}{r^p}$，**其中** r **是由任何一個固定點（原點）到變點** M **的距離，** A **與** p **是常數，而且** $p>2$，**則積分**(64) **收斂**。利用所寫的不等式，並引用極坐標，得到：

$$\iint_{(\sigma')}|f(M)|d\sigma\leqslant A\iint_{(\sigma')}\frac{1}{r^{p-1}}drd\varphi$$

全部區域 (σ') 一定包含於一個界於圓周 $r=r_0$ 與 $r=R$ 之間的圓環，其中 R 可以隨意多大。沿所有這樣的環求積分，得到：

$$\iint_{(\sigma')}|f(M)|d\sigma\leqslant A\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{r_0}^{R}\frac{1}{r^{p-1}}dr=\frac{2\pi A}{p-2}\left(\frac{1}{r_0^{p-2}}-\frac{1}{R^{p-2}}\right)$$

注意，$p-2>0$，就得到所要求的沿 (σ') 的積分的估計值：

$$\iint_{(\sigma')}|f(M)|d\sigma\leqslant\frac{2\pi A}{p-2}\frac{1}{r_0^{p-2}}.$$

於是證明了上述的肯定。

類似的可以確定沿無窮區域的反常三重積分。在對於二重積的最後一個定理中，條件 $p>2$ 需要換成 $p>3$。還要提出，以上所講的關於 $f(M)$ 成爲無窮大的情形的反常積分，對於沿曲面的積分也可以應用。

像我們以上所看到的，反常絕對收斂積分可以化爲不負的函數 $|f(M)|$ 與 $[|f(M)|-f(M)]$ 的積分，而且對於這樣的積分，(Δ) 以什麼方式趨向點 C 或 (σ_1) 以什麼方式擴展是無關緊要的。總可以算作 (Δ) 是以 C 爲心的圓或球 $(\Delta\rho)$，它的半徑 ρ 趨向零，並且 (σ_1) 是 (σ) 的一部分，它包含於某一個圓 (K_R) 中，這個圓以原點爲心，它的半徑無限增長。利用這些附註，不難確定依賴於參變量的反常積分的一致收斂性的概念。例如，積分 (60)，**設它的被積函數依賴於參**

變量 α，若對於任何正數 δ，存在有這樣的不依賴於 α 的 η，使得當 (σ') 是 (σ) 的一部分而包含於圓 $(\Delta\eta)$ 中時

$$\left|\iint\limits_{(\sigma')} f(M)d\sigma\right|<\delta,$$

則叫做這積分關於 α 一致收歛。類似的可以確定別的反常積分的一致收歛性。特別是，由估計值(62)推出，若數 A 與 p 不依賴於 α，則積分絕對而且一致收歛。

在(84)中所講的絕對與一致收歛性的判別法與性質對於一致收歛的積分成立。

較複雜的反常積分是被積函數不是在各別的點成爲無窮大，而是例如沿某一條線 (l) 成爲無窮大。這時需要用一個區域 (Δ) 除去這條線，再讓 (Δ) 縮向這條線 (l)。

算作 $f(M)$ 在 (l) 的近傍是正的，可以肯定，這時，沿剩下的區域的積分，或者趨向一個有限的確定的極限，或者趨向無窮大，這裏並不依賴於 (Δ) 以什麼方式縮向 (l)。

87. 例 1.考慮積分

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha},\quad (\alpha\neq 1)$$

其中 (σ) 是整個平面。引用極坐標，沿以原點爲心半徑爲 R 的圓 (K_R) 求積分，得到：

$$\iint\limits_{(K_R)} \frac{rdrd\varphi}{(1+r^2)^\alpha}=\frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}}-1\right]$$

若 $\alpha<1$，則當 R 無限增加時，右邊無限上升，於是這積分發散。若 $\alpha>1$，則右邊有有限的極限 $\frac{\pi}{\alpha-1}$，就是說，這積分收歛而等於 $\frac{\pi}{\alpha-1}$。在後一個情形下，可以利用前一段所講

的充分條件來證明收斂性。

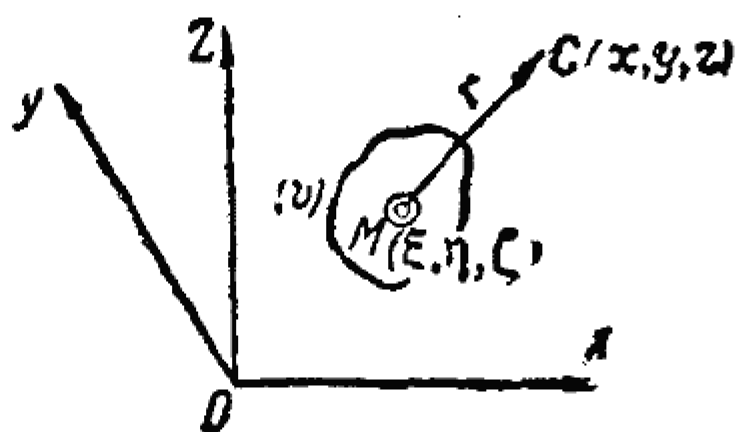


圖　78

2.考慮積分

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}},$$

其中 (σ) 是界於直線 $x=0$; $x=1$; $y=0$; $y=1$ 之間的方塊。沿邊 $x=0$，被積函數成爲無窮大。用狹的豎條除掉這個邊，就是說，沿界於直線 $x=\varepsilon$; $x=1$; $y=0$; $y=1$ $(\varepsilon>0)$ 的矩形 (σ_ε) 求積分:

$$\iint\limits_{(\sigma_\varepsilon)}\frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}}=\int_0^1 y\,dy\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=1-\sqrt{\varepsilon},$$

當 $\varepsilon\to0$ 時，有極限，等於一，就是說，這個積分收斂而等於一。

3.物質對其外或其內一點的引力（圖 78）。設被引點 $C(x,y,z)$ 的質量是一。分吸引物體 (v) 爲物質單元 Δm，並於其中每個單元上取一點 $M(\xi,\eta,\zeta)$。用 r 記距離 CM，我們得到單元 Δm 對點 C 的引力的大小的近似表達式（所有的質量 Δm 集中於點 M）:

$$\frac{\Delta m}{r^2},$$

這裏我們算作吸力常數等於一。因爲所述的引力在線段 CM 的方向，則這個引力單元在坐標軸上的投影是:

$$\frac{\Delta m}{r^2}\cdot\frac{\xi-x}{r};\quad\frac{\Delta m}{r^2}\cdot\frac{\eta-y}{r};\quad\frac{\Delta m}{r^2}\cdot\frac{\zeta-z}{r}.$$

全部引力的投影就有近似表達式:

$$X\sim\sum\frac{\xi-x}{r^3}\Delta m;\quad Y\sim\sum\frac{\eta-y}{r^3}\Delta m;\quad Z\sim\sum\frac{\zeta-z}{r^3}\Delta m.$$

用 $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ 記物質在點 M 的密度，我們有近似表達式

$$\Delta m\sim\mu\Delta v,$$

增加單元的數目並使其中每一個單元無限縮小，得到結果:

$$(66)\quad X=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\xi-x}{r^3}dv;\quad Y=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\eta-y}{r^3}dv;\quad Z=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\zeta-z}{r^3}dv.$$

注意，在所寫的積分中，積分變量是區域 (v) 中變點 M 的坐標 (ξ,η,ζ)，並且密度 $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ 是這些變量的函數。點C的坐標 (x,y,z) 在積分號下直接在分子中出現，並且也間接通過中間變量

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

出現，它們是參變量，所以量 X,Y,Z 是 x,y,z 的函數。

若點 C 出現在吸引物體之外，則 r 的大小無論如何不等於零，於是我們要作普通的積分。若點 C 出現在物質的內部，則當積分變點 M 與 C 重合時，表達式(66)中的被積函數成為∞，於是我們遇到反常積分。若我們算作 μ 是連續函數，大體說來，它仍然有意義，因為引用 μ_0 來記函數 $|\mu|$ 的值的上界，就得到：

$$(67)\quad \left|\mu\frac{\xi-x}{r^3}\right|=\left|\mu\frac{1}{r^2}\frac{\xi-x}{r}\right|<\frac{\mu_0}{r^2},\quad \left|\mu\frac{\eta-y}{r^3}\right|<\frac{\mu_0}{r^2};\quad \left|\mu\frac{\zeta-z}{r^3}\right|<\frac{\mu_0}{r^2},$$

在這情形下以前的法則中的數 p 等於 2，而 $A=\mu_0$。

表達所考慮的物質在點 C 的勢量的積分

$$(68)\qquad U=\iiint\limits_{(v)}\frac{\mu dv}{r},$$

就也有意義。（以下我們仔細介紹這些概念。）

4.我們有明顯的公式

$$\frac{\xi-x}{r}=-\frac{\partial r}{\partial x};\quad \frac{\eta-y}{r}=-\frac{\partial r}{\partial y};\quad \frac{\zeta-z}{r}=-\frac{\partial r}{\partial z};$$

$$\frac{\xi-x}{r^3}=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\left(-\frac{\xi-x}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right);\quad \frac{\eta-y}{r^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right);\quad \frac{\zeta-z}{r^3}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),$$

所以積分(66)可以寫成：

$$X=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv;\quad Y=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dv;$$

$$Z=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dv,$$

就是說，這些積分可以由積分(68)在積分號下對 x,y 與 z 求微商得來。對點的坐標 (x,y,z) 求微商時，其中被積函數遇有間斷點，並且所考慮的情形，不是以上[84]所講的關

於連續性以及可能在積分號下求微商的情形。以後［200］我們將看到，當$\mu(\xi,\eta,\zeta)$連續時，積分X,Y,Z在整個空間是(x,y,z)的連續函數，U是連續函數而有連續一級偏微商，並且這些微商可能由積分(68)在積分號下求微商得來，就是說

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

由勢量U在積分號下對x,y,與z求微商兩次，並回憶$\mu(\xi,\eta,\zeta)$不依賴於(x,y,z)，就得到：

(69)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv;\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv;$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv.$$

這些公式只是當點$C(x,y,z)$在吸引物質之外時正確，就是在(v)之外時正確。這時，所有的積分都不是反常的。若C在(v)之內，則直接求微商不難驗證，由$\frac{1}{r}$求微商兩次給出：

(70)
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\xi-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3};\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\eta-y)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\zeta-z)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}.$$

並且對於積分(69)不能應用［87］中收斂性的判別法，就是說，若C在(v)之內，則勢量U的二級微商不能在積分號下求微商兩次得來。

等式(70)相加，就有：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0,$$

於是推知，若C在(v)之外，由等式(69)相加恰好得到方程：

(71)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

所以：佔有容積的物質的勢量，在出現於這物質之外的點$C(x,y,z)$滿足方程(71)。以後我們再求，若點C出現於物質的內部，這方程需要怎樣改變。

5. 考慮半徑爲a密度均勻的球的情形（μ是常量）。取OZ軸在直線OC的方向，其中

O 是球心，再引用球坐標 (ρ,θ,φ)：

$$U=\iiint_{(v)}\mu\,\frac{dv}{r}=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho^2\sin\theta}{r}\,d\varphi\,d\theta\,d\rho \tag{72}$$

不過顯然

$$r^2=\rho^2+z^2-2\rho z\cos\theta. \tag{73}$$

我們先求依 θ 的積分：

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{r}.$$

引用變量 r 來替代 θ，這時算作 ρ 與 φ 是常量。現在分爲兩種情形：若 $z>\rho$，則當 ρ 與 φ 是常量而 θ 由 0 改變到 π 時，r 的大小由 $(z-\rho)$ 改變到 $(z+\rho)$。若 $z<\rho$，則 r 由 $(\rho-z)$ 改變到 $(\rho+z)$（圖80）。此外，根據(73)，當 ρ 與 φ 是常量時：

$$rdr=\rho z\sin\theta d\theta;\quad \frac{\sin\theta d\theta}{r}=\frac{dr}{\rho z}$$

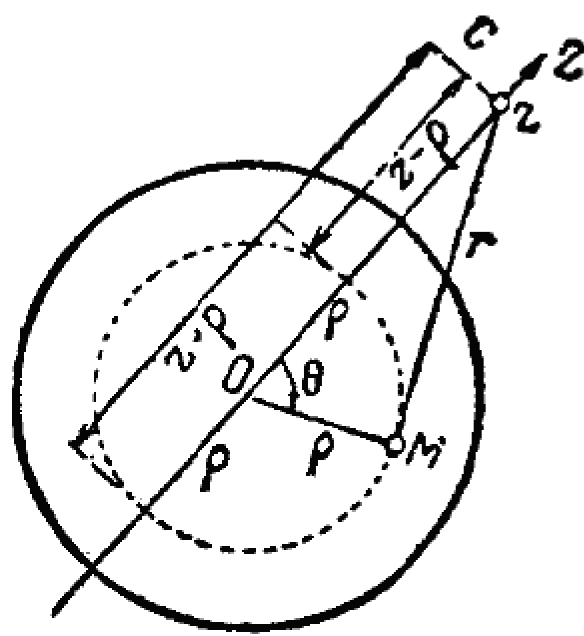


圖 79

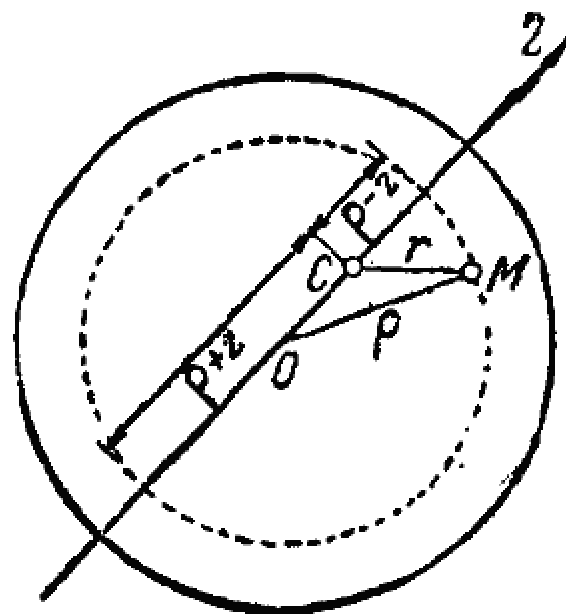


圖 80

所以，得到結果：

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{r}=\begin{cases}\displaystyle\int_{z-\rho}^{z+\rho}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{z} & (z>\rho)\\ \displaystyle\int_{\rho-z}^{\rho+z}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{\rho} & (z<\rho).\end{cases}$$

代入到(72)中，我們應當分爲兩種情形：

1)點 C 出現在球外或在它的表面上；這時 $a\leqslant z$，於是所有的在區間 $(0,a)$ 上的 ρ 的值 $\leqslant z$，在這情形下我們有：

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{2\rho^2d\rho}{z}=\frac{4\pi a^3\mu}{3z}=\frac{m}{z}. \tag{74}$$

其中 m 是球的全部質量。

2)點 C 出現在球內(80圖)；這時區間 $(0,a)$ 需要分爲兩個：$(0,z)$ 與 (z,a)，於是我們得到：

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\int_0^z\frac{2\rho^2d\rho}{z}+\int_z^a\frac{2\rho^2d\rho}{\rho}\right]=2\pi\mu\left(a^2-\frac{1}{3}z^2\right); \tag{75}$$

當 $z=a$ 時，就是點 C 出現在球的表面上時，兩個公式(74)與(75)對於 U 給出同一個值，這證明了函數 U 的連續性。

再來計算引力。根據對稱性，它應當是在沿 OZ 軸的方向，所以只需要計算

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

當點 C 出現在球外時，我們利用公式(74)：

$$Z=-\frac{m}{z^2} \tag{76}$$

當點 C 出現在球內時，應用公式(75)：

$$Z=-\frac{4}{3}\pi\mu z \tag{77}$$

當 $z=a$ 時，兩個公式(76)與(77)一致，於是證明了引力 Z 的連續性。

公式 (74)，(76)，(77)說明：均勻球對於球外一點的勢量與引力可以由集中球的全部質量於球心得來。對於球內一點的引力與被引點到球心的距離成比例。

爲計算簡單起見，我們取了特殊方式的坐標軸，OZ 軸的方向定在 OC 的方向，所以在以上的公式中 z 是點 C 到球心的距離。對於原點在球心的任何位置的坐標軸，需要用 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 來替代 z，其中 (x,y,z) 總是 C 的坐標。公式(74)與(75)給出：

$$U=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad (C在球外);$$

$$U=2\pi\mu\left[a^2-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right]\qquad (C在球內)。$$

對於 U 的第一個表達式，顯然滿足方程(71)。由第二個表達式對 x,y 與 z 求微商兩次，得到:

(78)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi\mu\qquad (C在球內)。$$

以後我們將看到，對於具有變密度的任何的容積 (v)，若 C 出現在 (v) 內，這個方程被滿足。

6.設吸引的物質分佈在曲面 (S) 上，具有密度 $\mu(M)$，它是曲面 (S) 上點 M 的函數。像上面一樣，用 $C(x,y,z)$ 來記質量爲一的被引點，用 r 來記距離 $|CM|$，對於勢量 U 得到表達式:

(79)
$$U=\iint\limits_{(S)}\frac{\mu(M)}{r}dS,$$

並且對於引力的投影:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dS;\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dS;$$

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=\iint\limits_{(S)}\mu(M)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS.$$

勢量(79)通常叫做單層的勢量。在這個例中，我們只考慮 C 出現在曲面 (S) 之外的情形，所以所有的積分都是正常的。這時，像上面一樣，勢量(79)滿足方程(71)。

§4 關於重積分理論的補充知識

88. 預備概念 討論重積分的理論時，我們是由直覺的面積與容積的表示法出發的。在這一節中我們給出這些概念的基礎以及重積分理論的基礎的嚴格討論。我們先建立一些概念，並證明一些關於點集合的定理，這些都是以後需要的。我們只對於平面情形的討論來講。所有以下講的很容易推廣到空間的情形。

考慮作好直角坐標軸 XY 的平面。以點 M 爲心 ε 爲半徑的圓叫做點 M 的 ε 近傍。我們來考慮在這平面上的所有的點集合，其中的點集合可能是由有限個點或無窮多個點組成的。設有某一個點集合 (P)。若點 M 的任何一個 ε 近傍總含有 (P) 中的一個無窮點集合，則點 M 叫做集合 (P) 的極限點。這個點 M 可以屬於 (P) 或者不屬於 (P)。若 (P) 的所有的極限點都屬於 (P)，則集合 (P) 叫做閉的。若點 M 屬於 (P)，而且點 M 的某一個 ε 近傍的點都屬於集合 (P)，則點 M 叫做 (P) 的內點。

例如，我們考慮所有出現在正方形：$0<x<1$，$0<y<1$ 之內的點的集合。在這情形下，所有的點都是這集合的內點。所有它們也都是這集合的極限點。此外，屬於這正方形的界線（就是它的邊）的所有的點也都是極限點。由於它們是不屬於 (P) 的，所以這個集合不是閉集合。

所有的點都是內點的集合叫做開集合。如果開集合 (P) 中的任何兩點總可以由所有的點都屬於 (P) 的折線連接的話，這樣的集合我們就叫做是區域。在這樣的定義下，一個正方形的內點自然形成一個區域，不過兩個分離開的正方形的內點就不形成一個區域。上述的把區域從所有可能的開集合中區別出來的性質，通常叫做連通性。有時把以上所謂的區域叫做開區域。所謂區域 (P) 的界線是指具有下述性質的點 M' 的集合 (l)：點 M' 不屬於 (P)，不過在點 M 的任何一個 ε 近傍中總有屬於 (P) 點。由於 (P) 是由內點組成的，可以肯定，在 M' 的任何一個 ε 近傍中總有 (P) 中的點的一個無窮集合，於是區域 (P) 的界線 (l) 可以確定作不屬於 (P) 的 (P) 的極限點的集合。不難看出，(l) 是閉集合。實際上，設 N 是 (l) 的一個極限點。我們來證明它屬於 (l)。依照極限點的定義，在點 N 的任何一個 ε 近傍中有 (l) 中的點 M' 出現，於是點 N 不可能屬於 (P)，因爲 (P) 的所有的點都是內點。不過點 M' 的任何一個 ε 近傍中有區域 (P) 的點出現（依照界線的定義），於是推知，點 N 的任何一個 ε 近傍中有 (P) 的點出現，就是說，N 實際上是屬於 (l) 的。如果我們把區域 (P) 的界線 (l) 加到區域 (P) 上，顯然就得到一個閉集合 $(\bar{P})$，有時它叫做閉區域。注意，把界線 (l) 的點加到區域 (P) 上之後，界線的點可能成爲新集合 $(\bar{P})$ 的內點。例如，若 (P) 是具有斑痕的正方形（中間缺少點或線），則斑痕上的點是 (l) 的點，不過把 (l) 加到 (P) 上之後，這些點就成爲內點了。

現在我們講一些概念，這些概念不是連繫於區域的，而是連繫於平面上點的任何集合 (P) 的。集合 (P) 的所有的極限點的集體叫做集合 (P) 的導集合 (P')，像我們證明 (l) 是閉集合完全一樣，可以證明任何一個導集合是閉集合。設 (P_1) 是平面上不屬於 (P) 的所有

的點的集合。通常它叫做 (P) 的補集合 (P_1)。屬於 (P) 或 (P_1) 中之一而且屬於另一個集合的導集合的點，也就是屬於 (P) 及 (P_1) 或屬於 (P_1) 及 (P') 的點，所組成的集合叫做集合 (P) 的界線 (l)。對於區域來講，這就相當於以前的界線的定義。對於界線可以給另一個定義，與以上所講的相當的。如果點 M 屬於 (P)，而且存在有一個點 M 的 ε 近傍，它不含有 (P) 的其他的點，則點 M 叫做這個集合的孤立點。不難看出，集合 (P) 的界線，是由 (P) 的孤立點以及 (P) 的非內點的極限點組成的。像以上一樣，可以證明，(l) 是閉集合。以後我們將重點的來講區域。

注意，所有以上所講的可以應用於直線上點的集合，例如 OX 軸上的點。這時，區間 $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ 叫做點 $x=c$ 的 ε 近傍，這個區間就是中點在給定的點而長度爲 2ε 的區間。

89. 集合論中的基本定理　若集合 (P) 中所有的點都出現在平面的一個有界部分上，則這個集合叫做有界的。這個平面的有界部分總可以算作是邊平行於坐標軸的正方形。所以可以說，如果集合 (P) 中所有的點都屬於某一個邊平行於坐標軸的正方形，則集合 (P) 叫做有界的。

定理I　任何一個無窮有界點集合 (P) 至少有一個極限點。我們先就 (P) 的點位於一條直線上的情形來證明這個定理，例如都在 OX 軸上。依照條件，集合 (P) 是無窮的，就是說，集合中有無窮多的點，再根據 (P) 的有界性，所有這些點都屬於某一個有限區間 (a,b)。分 (a,b) 爲兩半。至少有一半 (a_1,b_1) 中含有 (P) 的無窮多個點。把 (a_1,b_1) 再分爲兩半。至少在一個新的一半 (a_2,b_2) 中含有 (P) 的無窮多個點，如此作下去。我們就得到一序列的區間：

$$(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots(a_n,b_n),\cdots$$

其中每一個在後面的是它前面的一半，而且所有的區間都含有 (P) 中無窮多個點。我們知道，a_n 與 b_n 有一個共同的極限 p [I,42]。對於任何的 $\varepsilon>0$，區間 $(p-\varepsilon,p+\varepsilon)$ 含有自某一個 n 起以後的所有的 (a_n,b_n)，於是它含有 (P) 中無窮多個點，就是說，p 是 (P) 的極限點，於是證完。

再回到平面的情形來證明這個定理。根據 (P) 的有界性，這個集合中所有的點屬於一個正方形：$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$，我們把這個正方形記作 $[a,b;c,d]$。把這個正方形分爲四個相等的部分。至少其中有一個 $[a_1,b_1;\ c_1,d_1]$ 含有 (P) 中無窮多個點，如此作下去。就有兩序列的區間

$$(a, b),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n), \cdots$$
$$(c, d),\ (c_1, d_1),\ (c_2, d_2), \cdots, (c_n, d_n), \cdots,$$

其中每一個在後面的區間是它前面的一半。如此，a_n 與 b_n 有某一個共同的極限 p，c_n 與 d_n 有某一個共同的極限 q。作出點 (p,q) 的任何一個 ε 近傍，總含有由某一個 n 起以後的所有的正方形 $(a_n,b_n;c_n,d_n)$，於是推知，它含有 (P) 中無窮多個點，就是說，(p,q) 是 (P) 的一極限點，於是證完。

取出點 (p,q) 的任何一序列的 ε 近傍，其中 ε 取一序列的下降的値：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$，這些値趨向零。在點 (p,q) 的 ε_1 近傍中取出某一個屬於 (P) 的點 M_1。再在 ε_2 近傍取出某一個屬於 (P) 的點 M_2，不過不要是 M_1。在 ε_3 近傍中再取一個點 M_3，不要是 M_1 或 M_2，等等。如此就得到某一序列的點 M_n，它們趨向點 $M(p,q)$，就是說，距離 $M_n M$ 趨向零，或者說，點 M_n 的坐標 (x_n, y_n) 趨向極限：$x_n \to p$，$y_n \to q$。換句話說就是，由無窮有界點集合 (P) 中可以選出一序列的點，它們趨向一個極限點。

以下我們將只考慮有界集合，而不再做特殊聲明。設 (P) 與 (Q) 是兩個任何的集合。取出 (P) 中任何一點 M 到 (Q) 中任何一點 N 的所有可能的距離 MN。如此我們就得到一堆的數 MN，它們不是負的，這些數應當有一個下確界 δ[I,42]。這個數 δ 不是負的，它叫做集合 (P) 與 (Q) 之間的距離

定理 II 若 (P) 與 (Q) 是沒有公共點的閉集合，則它們之間的距離 δ 是正的。

我們用反證法。設 $\delta=0$，集合 (P) 與 (Q) 沒有公共點，所以不可能使得 $MN=0$. 由下確界的定義推知，對於任何的 $\varepsilon>0$. 存在有這樣的 (P) 中的點 M 以及 (Q) 中的點 N，使得 $MN<\varepsilon$。如此，我們可以由 (P) 中取出這樣的一序列的點 M_n $(n=1,2,3,\cdots)$，由 (Q) 中取出一序列的點 N_n，使得 $M_nN_n \to 0$。點 M_n 可以有兩種情形：或者點 M_n 中有無窮多個相同的，或是不是這樣。在第一種情形下，只保留 M_n 相同的那些對 $M_n N_n$（若是這樣的相同點的無窮羣有幾個，就取任何的一羣），並把這些對按照整數附標排列好。在第二類情形下，無窮有界點集合 M_n 一定有一個極限點 M，依照以上所述，可以選出一個趨向點 M 的分序列。只保留 M_n 出現在分序列中的那些對 $M_n N_n$，並把它們按照整數附標排列。對 M_n 作過後，再同樣的對 N_n 這樣作。此後就只保留了這樣的點對 M_n 與 N_n，使得：1) $M_n N_n \to 0$; 2) M_n 趨向點 M（或所有的 M_n 與 M 重合），而且 N_n 趨向點 N（或所有的 N_n 與 N 重合）。取極限就得到 $MN=0$，就是說 M 與 N 重合。另一方面，作爲屬於 (P) 的 M_n 的極限點 M，也就是 (P) 的一個極限點，根據 (P) 是個閉集

合，它就應當屬於(P)。同理N應當屬於(Q)。不過M與N是重合的，就是說(P)與(Q)有公共點，這與定理的條件違背，於是推知，$\delta=0$這個假定不正確，這就是所要證明的。

以上我們證明了M_n及N_n不與M及N重合的情形。若所有的M_n與M重合，而M_n不與N重合，則我們有$MN_n \to 0$，其中M屬於(P)。取極限仍然有$MN=0$，於是以上的證明仍然有效。至於M_n與M重合，而且N_n與N重合的情形，顯然是與(P)，(Q)沒有公共點這假定違背的。

重複以上的證明，可以證明這樣一個定理：若(P)與(Q)是閉集合，則至少可以找出一對這樣的點：M在(P)中，N在(Q)中，使得$MN=\delta$。

我們再講一個概念。設(P)是某一個集合。取出所有可能的距離$M'M''$，其中M'與M''是(P)中任何兩點。根據集合(P)的有界性，$M'M''$這些數不是負的，而且全部這些數是有上界的，於是推知〔I,42〕，必有上確界d，它叫做集合(P)的直徑。若(P)是閉集合，則像以上一樣可以證明，在(P)中至少可以找這樣一對的點M'與M''，使得$M'M''=d$。

對於具有坐標軸XYZ的三維空間，所有以上所述都是正確的。這時，點M的ε近傍需要取以M爲心ε爲半徑的球，並且替代正方形$a \leqslant x \leqslant b$，$c \leqslant y \leqslant d$需要考慮立方體$a \leqslant x \leqslant b$，$c \leqslant y \leqslant d$，$e \leqslant z \leqslant f$。

在OX軸的情形，需要用區間來替代正方形。

90. 外面積與內面積　我們取邊平行於坐標軸的正方形的面積作爲測量面積的基礎，這樣的正方形的面積就等於邊長的平方。作平行於坐標軸的直線，用相等的正方形的網把平面分割開。由網中有限多個的正方形組成的區域，我們叫做(α)型區域。

組成這樣的區域的正方形的面積和叫做這個區域的面積。作平行於坐標軸的直線，任何一個(α)型區域可以用無窮多的方法把它分爲邊平行於坐標軸的正方形。可以證明，對於所給定的(α)型區域，這些正方形的面積和是相同的，我們現在不證。此外，若一個或沒有公共點的幾個(α)型區域出現在區域(A)之內，則這些區域的面積和小於(A)的面積。還要提出，以後我們談到正方形時了解作連同它的界線的正方形。

設(P)是任何一個有界區域。用相等的正方形的網來分割面積。設(S)這個網有下述性質的正方形的全體，這些正方形的點（包括它們的界線的點）都是(P)的內點。

用同一個字母S來記這些正方形的面積的和。顯然，(S)形成一個或幾個（有限多個）

(α)型區域，而 S 是這些區域的面積的和（圖 81）。點集合 (S) 的界線 (l') 是這些各別的(α)型區域的界線的全部，並且這個界線顯然是個閉集合。再設 $(S+S')$ 是網中與 (P) 或它的界線 (l) 有公共點的正方形的全體。用 $S+S'$ 記這些正方形的面積和。顯然 $(S+S')$ 與 (S) 具有相同的構造，而 (S) 是 $(S+S')$ 的一部分。後一個集合中，除去在 (S) 中出現的正方形之外，還含有與 (l) 有公共點的那些正方形的全部。

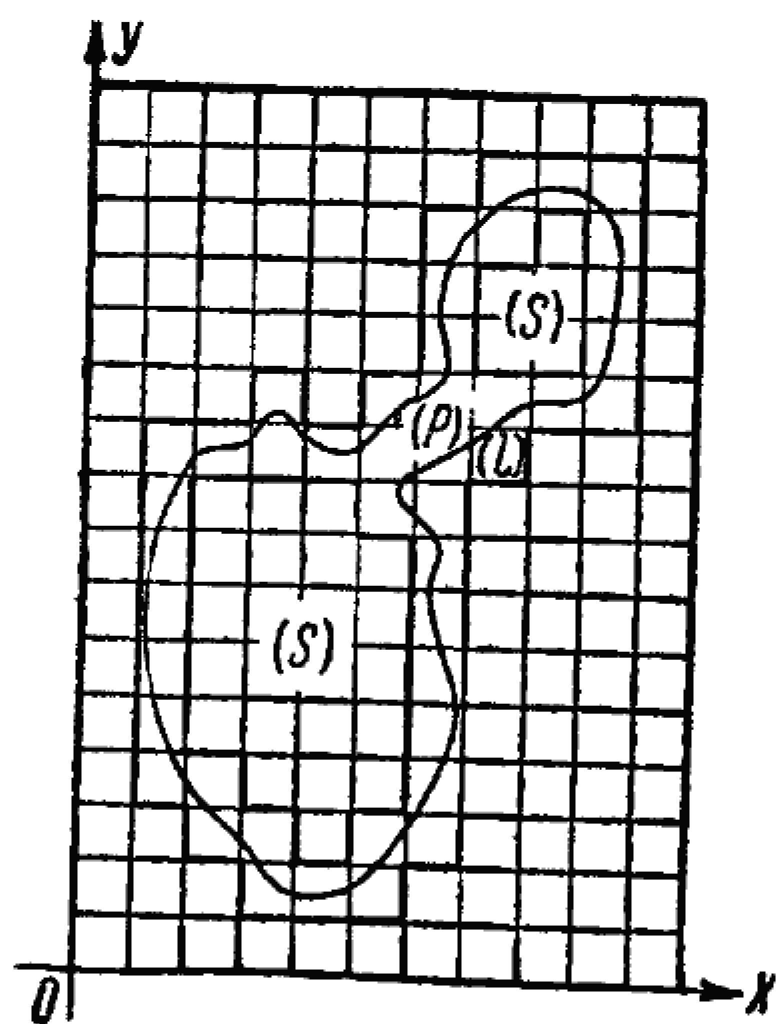


圖 81

取所有可能的相等正方形的網，就得到無窮多的數 S。所有這些數 S 小於一個正方形的面積，這個正方形把有界區域 (P) 包含在它的內部。數 S 的集合的上確界叫做區域 (P) 的內面積。我們把它記作 a，同理 $(S+S')$ 這些數的集合具有一個下確界，它叫做區域 (P) 的外面積，用 A 來記。最後，我們用 r 來記網中的正方形的邊長。現在我們來證明下面這個定理：［參考 I,155］：

定理　若 $r\to 0$，則 $S\to a$ 而 $S+S'\to A$，就是說，當網中正方形的邊長無限縮小時，S 趨向內面積，而 $S+S'$ 趨向外面積。

依照上確界的定義，任何的 $S\leqslant a$。我們需要證明，對於任何的正數 ε，存在有這樣的 η，使得只要 $r<\eta$，則 $a-S<\varepsilon$。依照上確界的定義，當給定 ε 時，存在有這樣的網，使得對應的 S，我們把它記作 S_0，滿足不等式 $a-S_0<\varepsilon$。設 (l_0) 是 (S_0) 的界線，並且像以上一樣，(l) 是 (P) 的界線。集合 (l_0) 與 (l) 是沒有公共點的閉集合，所以它們之間的距離 δ 是正的。取 $r<\frac{\delta}{2}$（就是讓 $\eta=\frac{\delta}{2}$），我們來證明，這時 $a-S<\varepsilon$，(S_0) 的任何一點屬於所取的邊長為 r 的網中某一個正方形，因為這個正方形的對角線長 $r\sqrt{2}$ 小於 $\frac{\sqrt{2}\,\delta}{2}<\delta$，就是說小於 (l_0) 到 (l) 的距離，所以它所有的點都是 (P) 的內點，就是說，(S_0) 中任何的點都是 (S) 的點，也就是說，(S_0) 是 (S) 的一部分［或者與 (S) 重合］，由此推知，$S_0\leqslant S$，再由 $a-S_0<\varepsilon$ 推出 $a-S<\varepsilon$，於是證完。同理可以證明 $S+S'\to A$。

系　(S) 是 $(S+S')$ 的一部分，就是說 $S<S+S'$，取極限於是推知 $a\leqslant A$，就是說，內面

積不大於外面積。

證明上面這個定理時，我們利用了下述的顯然事實：若(S_0)是由(P)的內點組成的某一個集合，δ 是由(S_0)的界線到(P)的界線的正的距離，而(Q)是任何一個集合（在定理中是一個正方形），它的直徑$<\delta$ 而與(S_0)有公共點，則(Q)的所有的點是(P)的內點。以後我們還要利用這個事實。

以上所給的外面積與內面積的定義，以及所證明的定理，完全適用於(P)是任何有界集合的情形。若(P)沒有內點，則需要算作內面積等於零。若有內點，則在內點的某一個 ε 近傍中，就存在有邊平行於坐標軸的正方形，而且它的所有的點都是(P)的內點，於是(P)的內面積就大於零。若(P)的外面積等於零，則內面積也就等於零，於是(P)就沒有內點。外面積等於零的集合以後對我們是有重要意義的。由以上所述推知，這是那樣的集合(P)，對於它們，當 $r\to 0$ 時，與(P)具有公共點的網中的正方形的面積和趨向零。

可以證明，存在有這樣的封閉曲線，它不自交而有參變方程：$x=\varphi(t), y=\Psi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 與 $\Psi(t)$ 是連續函數，可是它的外面積大於零。還可以證明，這樣的曲線確定是某一個區域的界線，不過這個區域的內面積小於外面積。

91. 可求面積的區域　如果區域(P)的內面積與外面積相等，就是若 $a=A$，這個區域就叫做是可求面積的。這時，a 與 A 的公共值叫做這個區域的面積。由前一段中的定理直接推出下面這個定理。

定理　區域(P)可求面積的必要且充分條件是，當 $r\to 0$ 時，網中與區域(P)的界線(l)具有公共點的正方形的面積和趨向零。

這個定理中的面積和用我們以前的記法就是 S'，由下述事實可以直接推出這個定理，可求面積性相當於 S 與 $S+S'$ 具有共同的極限。

這個定理可以換個說法：(P)的可求面積性的必要且充分條件是界線(l)的外面積等於零。

可求面積性這個概念以及所證明的定理對於任何有界集合(P)都成立，只是爲更明確起見，我們就區域來談。這個附註對於以下的討論都適用。

設利用某一個外面積等於零的集合 l（線）把可求面積的區域(P)分爲兩個區域(P_1)與(P_2)。這就指出(P_1)與(P_2)的內點是(P)的內點，而不屬於(l)。由以上推出，(P_1)與(P_2)是可求面積的，並且它們的面積和等於(P)的面積。這樣把(P)分爲任何有限多個區域時，這仍然是正確的。反之，若由有限多個沒有公共內點的可求面積的閉區域（或集合）(P_k)

組成一個集合，則這個新的集合 (P) 是可求面積的，並且它的面積等於組成它的各個集合的面積和。這樣組成時，(P_k) 的界線的某些點可能成爲內點。若可求面積的區域（或集合）(Q_1) 是可求面積的區域（集合）(Q_2) 的一部分，就是說，(Q_1) 的任何點都屬於 (Q_2)，則 (Q_1) 的面積 $\leqslant (Q_2)$ 的面積。所有這些可以由以上的定義以及最後的定理直接推出來。

以後我們把可求面積的區域分爲幾部分時，總是了解作是利用外面積等於零的點集合來分的。

現在我們講一個可以作爲曲線 (l) 的簡單的例，曲線 (l) 所具有的外面積等於零，就是說，網中與 (l) 有公共點的正方形的面積和與 r 一齊趨向零。我們設曲線 (l) 有顯示方程：$y=\varphi(x)$，這裏 x 在某一個區間 (a,b) 上改變，$\varphi(x)$ 在這區間上是連續函數。根據一致連續性，當給定正數 ε 時，存在有這樣的 δ，使得只要 x' 與 x'' 在 (a,b) 中而且 $|x''-x'|<\delta$，則 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ [I, 45]，取這樣的數 r，使得它既小於 δ 也小於 $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$。作出正方形的網時，區間 (a,b) 就被分爲幾部分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，這裏中間部分的長度 (x_k-x_{k-1}) 等於 r，而長度 (x_1-a) 與 $(b-x_{n-1})$ 可能小於 r（圖82）。取出這個網的在 $x=x_{k-1}$ 與 $x=x_k$ 之間的一條的正方形。根據 $x_k-x_{k-1}<\delta$，可以肯定，在區間 (x_{k-1},x_k) 上 $\varphi(x)$ 的最大值與最小值之差 ω_k［就是 $\varphi(x)$ 在區間 (x_{k-1},x_k) 上的擺動］要小於 $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$。在這一條上，與曲線 $y=\varphi(x)$ 的最低點具有公共點的正方形中的點最多再低一段 r（正方形的邊長），與曲線的最高點具有公共點的正方形的點最多再高一段 r。如此，網中與 (l) 具有公共點的且包含在 $x=x_{k-1}$ 至 $x=x_k$ 這一條上的正方形的高的和小於 $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}+2r$，或者，根據 $r<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$，這高的和就 $<\frac{\varepsilon}{b-a}$，而這些正方形的面積和就 $<\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})$。由 $k=1$ 到 $k=n$ 依 k 求和，我們看出，與 (l) 具有公共點的正方形的面積和小於 ε，由於 ε 的任意性，於是推知，曲線 (l) 的外面積等於零。同理可以證明，具有顯示方程 $x=\Psi(y)$ 的曲線，其中 $\Psi(y)$ 是連續函數，它的外面積也等於零。任何的曲線，如果可以分爲有限多個部分，使得每一部分具有方程 $y=\varphi(x)$ 或 $x=\Psi(y)$，其中 $\varphi(x)$ 或 $\Psi(y)$ 在對應的自變量改變的有限區間上是連續函數，我們就叫它做<u>簡單曲線</u>。由以上推出，<u>簡單曲線的外面積等於零</u>。由此推出區域的可求面積性的充分判別法。

定理 若區域(或集合)(P)的界線是簡單曲線，則(P)是可求面積的。

由以上的理由推出，若把可求面積的區域分爲有限多個部分區域，而用簡單曲線來分(或用有限多個簡單曲線來分)，則每一個新的區域也是可求面積的，而且新區域的面積和就等於原來的區域的面積。注意，以上所述只是當任何的可求面積的集合分爲有限多個可求面積的部分集合時成立。

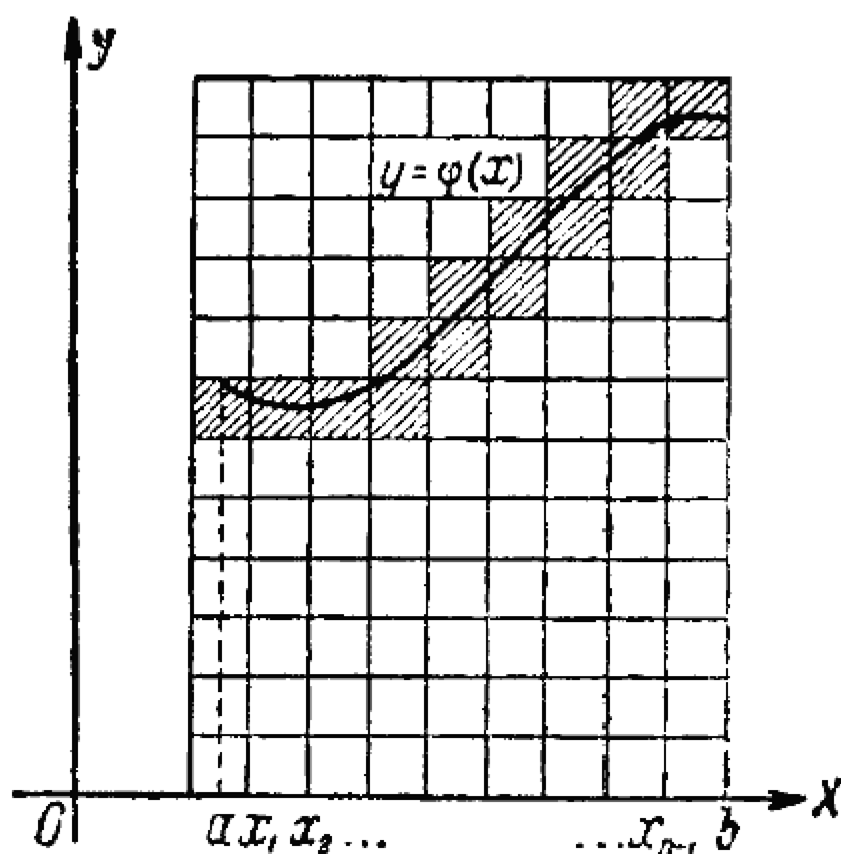


圖 83

不難證明，在上述的意義下，定積分 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 給出界於曲線 $y=\varphi(x)$，OX軸以及直線 $x=a$，$x=b$ 之間的區域的面積，這裏我們算作 $\varphi(x)>0$。

92. 與坐標軸的選擇的無關性 面積(內面積及外面積)的定義緊密的連繫於坐標軸的選擇，因爲我們是利用邊平行於坐標軸的正方形的網來作所有的度量的。當這樣度量時，坐標軸的平行移動沒有影響，不過坐標軸繞原點旋轉時，圖形實在就變了，因爲我們要用另外的正方形網來分割(P)。坐標軸逆鐘針方向轉一個角度 φ 時，可以看作軸保持不動而是(P)繞原點轉了一個角度($-\varphi$)。由此看出，如果把(P)整個的在平面上移動時，面積不改變的話，那末面積就與坐標軸的選擇無關。平移時這是顯然的，繞原點旋轉時，就需要證明了。

我們證明兩個輔助定理。

定理 I. 設把整個平面分爲可求面積的區域(Δ_φ)，它們的直徑不超過某一個數 d，而且使得平面上任何一個有界的區域只與有限多個這樣的區域有公共點。這些區域中，所有的點，包括它們的界線的點，都是(P)的內點的那些區域的面積和，我們記作 Σ。這些區域中，與(P)或是它的界線(l)至少有一個公共點的那些區域的面積和，我們記作 $\Sigma+\Sigma'$。這時，若 $d\to0$，則 Σ 趨向(P)的內面積，而 $\Sigma+\Sigma'$ 趨向(P)的外面積。

這個定理的意義在於，當計算內面積與外面積時，我們可以在 $d\to0$ 的條件下利用任何

的可求面積的區域的網，來替代邊平行於坐標軸的正方形的網。

我們可以取這樣的正方形網，使得在以前的記號下，我們有 $S>a-\varepsilon$，其中 ε 是給定的正數。設 δ 是 (P) 的界線到 (S) 的界線的距離 [參考90]。若取 $d<\frac{1}{2}\delta$，則與 (S) 具有公共點的 $(\triangle_s)$ 位於 (P) 的內部，就是說，這時 (S) 是 (Σ) 的一部分，於是推知 $\Sigma>a-\varepsilon$。現在我們再來證明，總是 $\Sigma\leqslant a$。實際上，取任何的 (Σ)，並設 δ' 是 (Σ) 的界線與 (P) 的界線之間的距離。作出具有 $r=\frac{1}{2}\delta'$ 的正方形網。任何這樣的與 (Σ) 具有公共點的正方形是由 (P) 的內點組成的，就是說 $\Sigma\leqslant S\leqslant a$。由不等式 $a-\varepsilon<\Sigma\leqslant a$ 以及 ε 的任意性，推知 $\Sigma\to a$。同理可以證明，當 $d\to 0$ 時，$\Sigma+\Sigma'\to A$。

注意，任何正方形的界線是簡單曲線，於是推知，正方形是可求面積的區域。只由所證明的定理可以直接推出，度量區域的面積時我們可以利用邊不平行於坐標軸的正方形的網，只是正方形的邊要趨向零。不過這時我們需要知道邊不平行於坐標軸的正方形的面積等於什麼。嚴格說來，我們不清楚的是邊不平行於坐標軸的正方形的面積是否等於它的邊長的平方，因爲在度量面積的基本理論中設定了邊平行於坐標軸的正方形的面積等於它的邊長的平方。如果我們證明了任何正方形的面積等於它的邊長的平方，則根據以上所述，我們可以肯定，可求面積性以及面積的大小與軸的方向的選擇無關，於是移動時面積不改變。

總之，證明了下面的定理 11，就全部解決了。

定理 11．邊平行於坐標軸的正方形繞原點旋轉後，它的面積保持原來的不變。

首先我們提出，任何正方形的界線都是簡單曲線，於是推知，正方形是可求面積的區域。設 (q) 是原始的正方形，邊長爲 r，(q_1) 是旋轉後得到的正方形。我們用同樣的字母來記它們的面積，並設 $\frac{q_1}{q}=s$。利用平行移動時，面積不改變，我們可以把 (q) 平行移動到任何的邊長爲 r 的正方形的位置，於是推知，當平面作一定的旋轉時，對於所有的邊長爲 r 的正方形，比 $\frac{q_1}{q}$ 是相同的。現在我們在平面上作以原點爲心的像似變換，使得所有的由原點作出的向量半徑之長都乘以某一個正數 k。這樣的變換把點 (x,y) 變到坐標爲 (kx, ky) 的點 [3]。這時所有的線長度都乘了 k 倍。邊平行於軸的任何正方形還變成這樣的正方形，不過它的邊長乘了 k 倍。由此推知，這時面積（內面積與外面積）乘了 k^2 倍。利用上述的像似變換時，由 (q) 與 (q_1) 得到的正方形，我們各記作 (q') 與 (q_1')。顯然，利用

由(q)得到(q_1)時所用的旋轉，由(q')就得到(q_1')，不過$q_1'=k^2q_1$而$q'=k^2q$，於是$\frac{q_1'}{q'}=s$。不過，選擇適當的數k，我們可以把正方形(q)變到邊具有任何長度的正方形。如此我們看出，當平面作一定的旋轉時，對於所有的原始的正方形(q)，比$\frac{q_1}{q}=s$具有相同的值。現在我們來證明：$s=1$。考慮以原點爲心一爲半徑的圓：$x^2+y^2<1$，用平行於軸的正方形的網來分割它。當繞原點旋轉時，正方形的面積得到一個因子s，根據面積的定義以及上面所證明的定理，這個圓的面積也應當乘了s倍。不過當作所述的旋轉時，圓仍變到它自己，於是它的面積不應當改變，就是說$s=1$，於是證完。

95.任何多維空間的情形　全部關於面積的理論可以推廣到三維空間，如此，我們就得到內容積、外容積以及三維區域或集合的可求容積性諸概念。這時立方體用作正方形的地位。

對於任何n維空間，可以建立完全類似的「面積」的度量理論。依一定順序排列的n個實數$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$叫做這樣的空間的點。兩個點$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$與$(y_1,y_2,\cdots y_n)$之間的距離由下面這公式來表達：

$$r=\sqrt{\sum_{s=1}^{n}(y_s-x_s)^2}$$

坐標滿足不等式

$$\sum_{s=1}^{n}(x_s-a_s)^2\leqslant\rho^2$$

的點的全體叫做以$(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$爲心$\rho$爲半徑的球。最後，坐標滿足不等式$a_s\leqslant x_s\leqslant b_s$ $(s=1,2,\cdots\cdots,n)$的點的全體，當$b_s-a_s=r$時，叫做邊長爲r的方體。我們算作數r^n是這方體的量度。所有這些定義使得我們可能把以上全部的理論轉移到n維空間，並且建立區域或一般集合的內量度與外量度的概念，當它們相等時我們說這個區域（或集合）是可度量的（在平面情形——可求面積的）。全部所證明的定理對於n維空間都是正確的。在n維空間中，平移由下面的變換公式來表達：$x_s'=x_s+a_s$ $(s=1,2,\cdots\cdots,n)$，繞原點的旋轉由某一個線性變換來表達，它保持點到原點的距離不變。在卷 III 中我們將仔細的談這些變換。

給區域定義時，我們利用了折線的概念，就是由有限多個直線段組成的線。在n維空間中，所謂直線是具有參變方程$x_s=\varphi_s(t)$的線（就是點集合），其中$\varphi_s(t)$是一次多項式，球或方體的內點的集合是n維空間的區域的例。通常n維空間的區域是由不等式來確定的，這區域的點的坐標應當滿足這不等式。注意，當$n=1$時，就是在直線上時，區域實在就是某一個區間的內點的集合。我們談過的簡單曲線也可以推廣到n維空間。特別是，若在三維空間中有一個曲面，它有顯示方程$z=\varphi(x,y)$，其中$\varphi(x,y)$在平面XY的某一個有界閉區域上是連續函數，則這個曲面的外量度等於零。像在[91]中一樣，容易作出簡單曲面的概念，而界於簡單曲面的任何區域是可度量的。

94.達爾補定理　建立了面積的概念，我們來講二重積分的理論。這裏的全部理由對於三重積分都成立。這裏我們引述的這些討論就像在卷一第三章§4中我們所作的步驟一樣，當它們與卷I中的討論完全類似時我們就略去仔細的敘述。

設(σ)是平面上某一個可求面積的區域，$f(N)$是有界函數，在閉區域(σ)的所有的點它是確定的。把(σ)分爲有限多個可求面積的區域$(\sigma_k)(k=1,2,3,\cdots\cdots,n)$，像以前一樣，用$\sigma$以及$\sigma_k$來記對應的區域的面積，於是$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$，設所有的$(\sigma_k)$的直徑都小於某一個數$d$。再設$N_k$是屬於閉區域$(\sigma_k)$的任何一點。

作出乘積之和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\sigma_k \tag{1}$$

以下我們要弄清楚，對於怎樣的函數$f(N)$，當$d\to0$時這個和有確定的極限。設M_k與m_k是$f(N)$在閉區域(σ_k)上的值的上確界與下確界。與和(1)一起，我們再作兩個和：

$$S=\sum_{k=1}^{n} M_k\sigma_k \tag{2}$$

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k. \tag{3}$$

像在[I,115]中一樣，我們有不等式：

$$s \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\sigma_k \leqslant S, \tag{4}$$

並且可以肯定，對於把 (σ) 分開的任何分法來講，S 與 s 總在 $m\sigma$ 與 $M\sigma$ 之間，其中 M 與 m 是 $f(N)$ 在閉區間 (σ) 上的值的上確界與下確界。

再更仔細的來考慮和 S，我們算作 $f(N)$ 的值是正的。設在區域 (σ_k) 的內部出現有三個沒有公共內點的可求面積的區域 $(\sigma_k^{(1)})$，$(\sigma_k^{(2)})$，$(\sigma_k^{(3)})$，並設 $M_k^{(1)}$，$M_k^{(2)}$，$M_k^{(3)}$ 是 $f(N)$ 在閉區域 $(\sigma_k^{(1)})$，$(\sigma_k^{(2)})$，$(\sigma_k^{(3)})$ 的值的上確界。注意，$M_k^{(1)}, M_k^{(2)}, M_k^{(3)} \leqslant M_k$，$\sigma_k^{(1)}+\sigma_k^{(2)}+\sigma_k^{(3)} \leqslant \sigma_k$，並且 $f(N)$ 所有的值都是正的，就可以肯定

$$M_k^{(1)}\sigma_k^{(1)}+M_k^{(2)}\sigma_k^{(2)}+M_k^{(3)}\sigma_k^{(3)} \leqslant M_k\sigma_k, \tag{5}$$

設 L 是 S 的所有可能的值的下確界。我們來證明，當 $d \to 0$ 時，$S \to L$。爲此只須證明：對於任何的 ε，存在有這樣的 η，使得只要 $d<\eta$，則 $S<L+\varepsilon$。依照 L 的定義，存在有這樣的完全確定的把 (σ) 分爲部分區域 (σ'_k) 的方法，使得對應於這個方法的 S 的值小於 $L+\frac{\varepsilon}{2}$，我們把 S 的這個值記作 S'。設 (λ_0) 是由 (σ) 的界線的點以及所有的區域 (σ'_k) 的界線的點組成的點的閉集合。依照可求面積性的定義，(λ_0) 的外面積等於零，於是我們可以把 (λ_0) 包含在有限多個正方形之內，而讓這些正方形的面積和小於 $2\frac{\varepsilon}{M}$。這些正方形形成一個或幾個區域，設 (Q_0) 是屬於這些區域的所有的點組成的閉集合，而 (l_0) 是 (Q_0) 的界線。設 d 是沒有公共點的閉集合 (λ_0) 與 (l_0) 之間的正的距離。我們來證明，只須取 $\eta=\frac{1}{2}\delta$。實際上，設把 (σ) 分爲部分區域而有 $d<\frac{1}{2}\delta$。我們把這些區域分爲兩組。凡是與 (λ_0) 沒有公共點的放在第一組，其餘的在第二組。第一組的區域記作 (σ_l)，第二組的記作 (τ_m) 和 S 就分爲兩個和：$S=S_1+S_2$，其中

$$S_1=\sum \mu_l\sigma_l;$$

$$S_2=\sum \nu_m\tau_m,$$

這裏 μ_l 與 v_m 是 $f(N)$ 在閉區域 (σ_l) 與 (τ_m) 上的值的上確界。

任何一個區域 (σ_l) 位於由分法 (I) 把 (σ) 分得的某一個區域 (σ'_k) 之內，於是根據 (5)，和 S_1 中對應於 (σ_l) 位於 (σ'_k) 之內的那些項之和不大於 $M_k\sigma'_k$，於是推知，$S_1\leqslant S'$；根據 $S'<L+\frac{\varepsilon}{2}$，就有 $S_1<L+\frac{\varepsilon}{2}$。再看和 S_2。區域 (σ_m) 與 (λ_0) 有公共點而且它們的直徑小於 $\frac{1}{2}\delta$。於是推知，所有這些區域出現在形成 (Q_0) 的諸正方形之內。於是，$\Sigma\sigma_m\leqslant$ 這些正方形的面積和，就是說，$\Sigma\sigma_m\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}$。因子 $v_m\leqslant M$，於是

$$S_2=\sum v_m\tau_m\leqslant M\frac{\varepsilon}{2M}=\frac{\varepsilon}{2}$$

由不等式 $S_1<L+\frac{\varepsilon}{2}$ 與 $S_2<\frac{\varepsilon}{2}$ 就推出所要證明的不等式：當 $d<\eta$ 時，$S\leqslant L+\varepsilon$。我們對於正的函數證明了 $S\to L$。由 [1, 115] 中的討論，可以肯定，對於任何的有界函數，它總成立。同理可以證明，當 $d\to 0$ 時，s 趨向 l，其中 l 是 s 的值的上確界。如此，我們得到下面這個定理。

達爾補定理　當部分區域 (σ_k) 的直徑中最大的無限減小時，和 s 與 S 趨向確定的極限 l 與 L，並且 $l\leqslant L$。

當 (σ) 與 (σ_k) 是任何的可求面積的集合時，在這樣的情形下，以上全部的討論完全可以應用。達爾補定理保持正確。

95. 可積函數　若當區域（集合）(σ_k) 的直徑 d 中最大的趨向零時，和

$$\sum_{k=1}^{n}f(N_k)\sigma_k \tag{6}$$

有確定的極限，則函數 $f(N)$ 叫做是沿 (σ) 可積的。這個極限叫做函數 $f(N)$ 沿區域（集合）(σ) 的二重積分：

$$\iint_{(\sigma)}f(N)\,d\sigma=\lim\sum_{k=1}^{n}f(N_k)\sigma_k.$$

像在［I,116］中一樣，可以證明，$f(N)$可積的必要且充分條件是，和s與S的極限l與L相同，就是說，當$d\to0$時，這兩個和的差

(7) $$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\sigma_k$$

趨向零。

若$f(N)=1$，則和(6)總等於區域（集合）(σ)的面積σ，就是

$$\iint_{(\sigma)}d\sigma=\sigma.$$

利用條件(7)可以明確出幾類可積函數。

1.若$f(N)$在閉區域（集合）(σ)上連續，則它是可積的。這個證明就像［I,116］中的完全一樣。

2.現在設$f(N)$在閉區域（集合）(σ)上是有界的，可是具有間斷點。設這些間斷點的集合(R_0)的外面積等於零。設ε是給定的正數。根據［92］中定理I，我們可以把(σ)分為有限多個足够小的部分區域，使得與(R_0)有公共點的那些部分區域的面積和小於$\frac{\varepsilon}{2A}$，其中$A=M-m$。在其他的部分區域上，$f(N)$一致連續，因為這些部分區域以及它們的界線不含有$f(N)$的間斷點，也就是不含有(R_0)的點。我們管與(R_0)有公共點的區域叫做第一類的區域，其餘的叫做第二類的區域。設p是第二類區域的數目。根據$f(N)$在第二類閉區域上的連續性，我們可以把每一個第二類區域再分為部分區域，使得和(7)中對應於每一個第二類區域中各部分區域的項之和$<\frac{\varepsilon}{2p}$。這時，和(7)中對應於第二類區域的部分區域的所有的項之和$<\frac{\varepsilon}{2}$。注意，$M_k-m_k\leqq M-m=A$並且第一類區域的面積和$<\frac{\varepsilon}{2A}$，可以肯定，和(7)中對應於第一類區域的項之和$<\frac{\varepsilon}{2}$，於是推知，整個和(7)$<\varepsilon$。注意，L是和(3)的下界，而l是和(3)的上界，可以肯定，$L-l<\varepsilon$，由於ε的任意小性，可以肯定$L=l$，就是說，$f(N)$確實是可積的。於是，若有界函數$f(N)$的間斷點組成的集合的外面積等於零，則$f(N)$是可積的。

若$f(N)$有有限多個間斷點或$f(N)$的間斷點出現在有限多個簡單曲線上，這個條件

就自然滿足。

96．可積函數的性質 像在[I，117]中對單積分所作的一樣，我們只簡短的說出可積函數的性質。

I． 若$f(N)$在可求面積的區域(σ)上是可積的，我們在外面積等於零的點集合(R_0)上改變$f(N)$的值，但保持函數的有界性，則新的函數也是可積的，並且積分的大小不改變。我們簡略的講一個證明，它與上一段中最後的證明完全類似。讓R_0包含在一些區域的內部，而使得這些區域的面積和是充分的小（第一類區域）。在其餘的區域中的點，$f(N)$的值不改變，所以根據$f(N)$的可積性，和(7)中對應於第二類區域的項，當這些區域充分小時，它們有隨意多小的和。對應於第一類區域的項也有微小的和，因爲這些區域的面積和是微小的。這就證明了新函數的可積性。再由於集合(R_0)的外面積等於零，它就沒有內點，於是推知，把(σ)分爲部分區域(σ_k)時，在每一個部分區域上可以找出一點N_k，在這點$f(N)$的值不改變。作和(6)時就取這些點，可以證明積分的大小不改變。

II．若$f(N)$在可求面積的區域(σ)上是可積的，並且這個區域(σ)被分爲有限多個可求面積的部分區域(σ_1)，(σ_2)，……，(σ_n)，則在每一個區域(σ_k)上$f(N)$是可積的，並且沿(σ)的積分等於沿(σ_k)的諸積分之和。

把(σ)分爲部分區域時，我們就看區域(σ_k)再分。這時，根據$f(N)$的可積性，和(7)就趨向零，而且和(7)中的項不是負的。於是對應於每一個區域(σ_k)的項之和更要趨向零，就是說，沿$(\sigma_k)f(N)$是可積的。在和(6)中，就對應於各別的區域(σ_k)的項之和來取極限，就可以直接推出我們的第二個肯定。反之，顯然，由沿(σ_k)的可積性可以推出沿(σ)的可積性。在[I，117]中所講的積分的其餘的性質：常因子提到積分號之外，可積函數的和，積與商的可積性以及可積函數的絕對值的可積性，都保持正確。中值定理可以像對於單積分一樣來證明[I，95]。

可求面積區域的界線的外面積應當等於零，所以，根據上述的第一個性質，當求積分時，函數$f(N)$在區域的界線上的值沒有什麼作用。

注意，我們可以把所有的關於積分的定義以及所證明的一切推廣到任何的可求面積的

而具有正的面積的集合 P（不一定是區域）。這時對於和 s，S 與 (6) 的記號，需要把 P 分爲有限多個可求面積的而且沒有公共點的部分集合，並使得它們的直徑中最大的趨向零。

97．二重積分的計算法　現在我們建立化二重積分的計算化爲兩次積分的公式，先考慮邊

$$(8)\qquad x=a \qquad x=b \qquad y=c; \qquad y=d$$

平行於坐標軸的矩形 (R) 的情形。設 $f(N)=f(x,y)$ 沿 (R) 是可積的，就是說，下面這積分存在

$$(9)\qquad \iint\limits_{(R)} f(N)\,d\sigma=\iint\limits_{(R)} f(x,y)\,dxdy.$$

此外，設對於區間 (a,b) 中任何的 x，積分

$$(10)\qquad F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

以及兩次積分：

$$(11)\qquad \int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx.$$

存在。利用下列的分點把 (R) 分爲部分區域：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-1}<y_n=d$$

並設 (R_{ik}) 是界於直線 $x=x_i$，$x=x_{i+1}$；$y=y_k$，$y=y_{k+1}$ 之間的部分矩形。再設 m_{ik} 與 M_{ik} 是 $f(x,y)$ 在閉矩形 (R_{ik}) 上的下確界與上確界；$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$，由不等式

$$m_{ik}\leqslant f(x,y)\leqslant M_{ik} \qquad [(x,y)\text{ 在 }(R_{ik})\text{ 中}]$$

沿區間 $y_k\leq y\leq y_{k+1}$ 求積分，就得到

$$m_{ik}\Delta y_k\leqslant\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,dy\leqslant M_{ik}\Delta y_k \quad (x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}),$$

其中 $(y_k,\ y_{k+1})$ 是 (c,d) 的一部分，根據積分 (10) 的存在性，上面寫的積分存在 [I,

117]，把這些不等式相加，就得到：

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_0^d f(x, y)\,dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k.$$

沿區間 (x_i, x_{i+1}) 求積分：

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i;$$

根據積分 (11) 的存在性，這裏寫的積分存在。由最後這不等式按照 i 求和：

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i.$$

注意，乘積 $\Delta y_k \Delta x_i$ 表達 (R_{ik}) 的面積，可以肯定，當矩形無限縮小時，這不等式兩端的兩項都趨向積分 (9)，這就引出了我們所要的公式：

$$\iint_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{12}$$

就是，若二重積分 (9) 與兩次積分 (11) 都存在，則公式 (12) 成立，就是這兩個積分相等。

注意，積分 (11) 存在先要假定積分 (10) 存在。若 $f(N)$ 在閉矩形 (R) 上是連續函數，則積分 (9) 與 (10) 顯然存在 ([95] 與 [I,116])。這時，我們知道 [80]，公式 (10) 給出 x 的連續函數，於是推知，積分 (11) 也存在。現在我們考慮界於兩個曲線 $y=\varphi_2(x)$ 與 $y=\varphi_1(x)$ 以及直線 $x=a$ 與 $x=b$ 之間的區域 (σ) (圖 83)。設二重積分

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{13}$$

單積分

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{14}$$

以及兩次積分

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{15}$$

都存在。設(R)是由直線(8)形成的矩形，這裏我們取c與d時，使得對於(a,b)中的所有的x，我們有$c<\varphi_1(x)$而$d>\varphi_2(x)$，就是說，使得(σ)是(R)的一部分。在(R)上我們確定一個函數$f_1(N)=f_1(x,y)$，使得在區域(σ)的點上它等於$f(N)$，在(R)的不屬於(σ)的點上它等於零。曲線$y=\varphi_2(x)$與$y=\varphi_1(x)$把(R)分爲三部分：(σ)以及位於(σ)上下的區域(II)與(I)（圖83）。函數$f_1(N)$沿(σ)是可積的，因爲它與$f(N)$全同，它沿(I)與(II)也是可積的，因爲在這些區域的內點，它等於零。

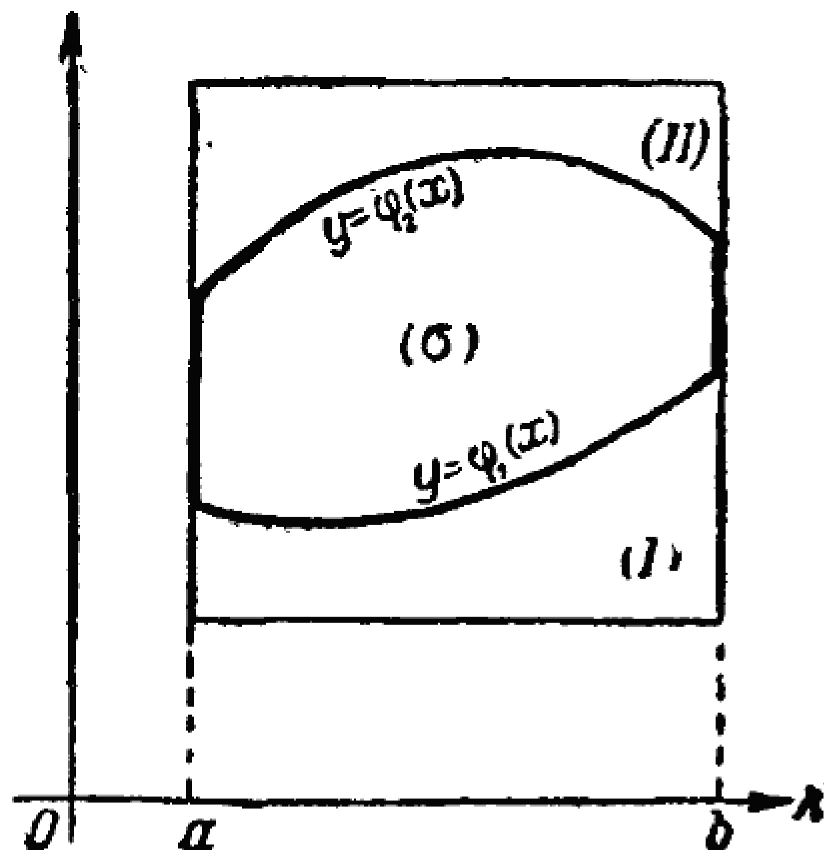


圖 83

於是推知$f_1(N)$沿(R)是可積的[96]並且

$$\iint_{(R)} f_1(N)d\sigma=\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma, \tag{16}$$

同理，對於區間(a,b)中任何的x，積分(15)與下面這積分都存在

$$F(x)=\int_c^d f_1(x,y)\,dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \tag{17}$$

於是對於函數$f_1(N)$可以應用公式(13)，根據(16)與(17)，這個公式就給出化沿(σ)的二重積分爲兩次積分的公式：

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx, \tag{18}$$

得到這個結論時，我們假定了積分(13)，(14)與(15)存在。若$f(x,y)$在閉區域(σ)上連續，則像以前一樣，積分(13)與(14)存在。此外，根據(80)，公式(14)確定一個x的連續函數，於是推知積分(15)也存在。完全類似的，可以證明化三重積分爲三次積分的公式。

98. n 重積分　所有在 [94] 與[95] 中所講的可以直接推廣到 n 維空間的情形，引出有界函數沿有界的可度量的 n 維區域的積分的概念，上述的可積性的條件，以及積分的通常性質。與 [97] 中所講的完全類似，具有化 n 重積分爲 n 次積分的公式。這個公式可以用算學歸納法證明。重積分的積分限由確定積分區域的那些不等式來計算。設 $f(N)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在一個 n 維空間的可度量的閉區域 (P_n) 上是連續函數，這個區域的內點由下述條件確定：點 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 是某一個 $(n-1)$ 維空間的可度量的區域 (Q_{n-1}) 的內點，並且 x_n 滿足不等式

$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})<x_n<\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),$$

其中 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 與 $\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 在 (Q_{n-1}) 上是連續函數。這時，n 重積分可以表達成對 x_n 的積分以及沿 (Q_{n-1}) 的 $(n-1)$ 重積分。

$$(19)\quad \int\int_{(F_n)}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\int\int_{(Q_{n-1})}\cdots\int\left[\int_{\varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\ldots,x_{n-1})}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\right]dx_1\ldots dx_{n-1}.$$

把平面上平行於軸的矩形推廣，就得到 n 維空間的積體 (R_n)，由下列的不等式來確定：

$$(20)\qquad a_1\leqslant x_1\leqslant b_1\quad a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\quad \cdots a_n\leqslant x_n\leqslant b_n,$$

沿這個積體的積分可以化爲積分限爲常數的累次積分：

$$\int\int_{(R_n)}\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\ldots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}dx_{n-1}\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n,$$

這時，可以任意改變求積分的順序，對每個變量都保持原有的積分限。

對於熟悉行列式概念的讀者，可以講在 n 重積分中的換元公式。設引用新的變量 $(x_1',x_2',\cdots\cdots,x_n')$ 來替代 $(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)$，並設

$$(21)\qquad x_i=\varphi_i(x_1',x_2',\cdots,x_n)\qquad(i=1,2,\cdots n)$$

是通過新變量來表達舊變量的公式。

引用所謂函數組 (21) 的函數行列式：

$$
(22) \qquad D=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1'}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2'} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1'}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2'}, & \cdots, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1'} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2'}, & \cdots, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix}
$$

換元公式就有下面的形狀:

$$
(23) \qquad \int\int_{(P_n)}\cdots\int f\,dx_1\ldots dx_n=\int\int_{(P_n')}\cdots\int f\,|D|\,dx_1'\ldots dx_n'
$$

其中確定新積分區域 (P_n') 的不等式是由確定 (P_n) 的不等式得來的，只要用表達式 (21) 來替換 x_i。應用公式 (23) 時所需要的條件與在 [77] 中對於二重積分所講的一樣。反常 n 重積分也像反常二重及三重積分一樣來確定。現在我們來看幾個例。

99. 例 1. 界於超越平面:

$$x_1=0;\ \ x_2=0;\ \ \cdots;\ \ x_n=0;\ \ x_1+x_2+\cdots x_n=a\quad (a>0)$$

之間的 n 維空間的 $(n+1)$ 面體由下列不等式來確定:

$$
(24) \qquad x_1>0;\ \ x_2>0;\ \ \cdots;\ \ x_n>0;\ \ x_1+x_2+\cdots x_n<a.
$$

當 $n=3$ 時就得到界於坐標面與平面 $x+y+z=a$ 之間的普通的四面體。引用新的變量，設:

$$x_1'=x_1+x_2+\cdots+x_n;\quad x_2'=\frac{a(x_2+\cdots+x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

$$x_3'=\frac{a(x_3+\cdots+x_n)}{x_2+\cdots+x_n};\quad \cdots;\quad x_n'=\frac{ax_n}{x_{n-1}+x_n},$$

由此推知;

$$x_1+\cdots+x_n=x_1';\quad a(x_2\cdots+x_n)=x_1'x_2';$$

$$a^2(x_3+x_4+\cdots+x_n)=x_1'x_2'x_3';\quad \cdots;\quad a^{n-1}x_n=x_1'x_2'\cdots x_n'$$

反之，通過新變量來表達舊變量的公式是:

$$x_1=\frac{x_1'(a-x_2')}{a};\quad x_2=\frac{x_1'x_2'(a-x_3')}{a^2};\quad \cdots;$$

$$x_{n-1}=\frac{x_1'x_2'\cdots x_{n-1}'(a-x_n')}{a^{n-2}};\quad x_n=\frac{x_1'x_2'\cdots x_n'}{a^{n-1}}$$

由這些公式直接推出，$(n+1)$ 面體(24)可以變成 n 維方體：

(25) $$0<x_1'<a;\ 0<x_2'<a;\ \cdots;\ 0<x_n'<a.$$

3.確定以原點爲心 r 爲半徑的球的量度（容積），這個球由下面的不等式來確定：

(26) $$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2$$

若作具有像似係數 k 的像似變換，則任何方體的容積乘了 k^n 倍，而半徑 r 乘了 k 倍。由此直接推知，只是 r 的函數的未知量度 v_n 應當具有下面的形狀

(27) $$v_n=C_nr^n,$$

其中 C_n 是個常數，它因 n 的大小而不同。若用平面 x_1 截割球(26)，則由整式(26)看出，得到一個 $(n-1)$ 維球，它的半徑的平方等於 $(r^2-x_1^2)$。根據(27)這個球的量度就是 $C_{n-1}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}$。界於平面 x_1 與 x_1+dx_1 之間的球的一部分就有量度 $C_{n-1}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1$，由此推出下面這個 v_n 的表達式：

$$v_n=C_nr^n=C_{n-1}\int_{-r}^{+r}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1,$$

或者代入以 $x_1=r\cos\varphi$，就得到 C_n 與 C_{n-1} 的連繫：

(28) $$C_n=C_{n-1}\int_0^{\pi}\sin^n\varphi d\varphi=2C_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi,$$

其中我們已知[I,160]

當 n 是偶數時，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi=\frac{(n-1)(n-3)\cdots1}{n(n-2)\cdots2}\frac{\pi}{2}$$

當 n 是奇數時，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3},$$

在(28)中用 $(n-1)$ 來替代 n，我們得到：

$$C_{n-1}=2C_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi.$$

由所寫的等式推出，對於任何的整數 n：

(29)
$$C_n=C_{n-2}\frac{2\pi}{n}.$$

不過我們知道：$C_2=\pi$，$C_3=\frac{4}{3}\pi$。應用公式(29)，由此得到：

當 n 是偶數時，$C_n=\dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\cdots 2}$

當 n 是奇數時，$C_n=\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\cdots 1}$

第四章　向量分析及場論

100 向量加減法　這一章專致力於向量分析的討論。現在有很多向量分析的專門教材，我們在這裏不講細節，只講與以上所討論的材料有直接連繫的以及爲以後討論數學物理所必要的基礎的概念與事實；我們由向量代數開始。

在考慮物理現象時，我們遇到兩類的量——數量與向量。

當確定的選擇好測量單位時，僅由數的大小就完全表現出來的量，叫做數量。

例如，若在空間有熱的物體，則這物體在每一點的溫度由確定的數來表現，所以我們可以說，溫度是數量。密度、能、勢也是數量。

作爲向量的特例，我們考慮速度。爲要完全表現出來速度，只知道度量速度的大小的數是不够的，還有必要，要說明它的方向。確定速度可以用向量，就是一個線段，在給定的尺度下，它的長度等於速度的大小，而方向與速度的方向相同。如此，**向量由它的長度與方向完全確定。**力、加速度、衝力也是向量。

回到熱物體的例。這物體在每一點的溫度由確定的數來表現，或者說，它的溫度是這物體所佔有的空間中的點的函數。在空間作好直角坐標系 XYZ，我們可以說，這數量是自變量(x, y, z)的函數，這個函數確定在這物體所佔有的空間區域上。這裏我們看到一個數量場的例。

若在某一個區域的每一個點確定有一個向量，則我們就有一個向量場。例如電磁場，在每一點有確定的電力與磁力。

在某些情形下，放置向量的點是很重要的，就是空間與向量的起點重合的那一點。在這樣的情形下，我們有固定向量。不過，以後我

們用的主要是自由向量，就是放置向量的點可以在任意的位置。所以，若兩個向量的大小(長度)相等而方向相同時，就算作它們相等。

以後我們用粗體字 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots$ 來記向量，對應的用 $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}| \cdots$ 來記它們的長度，用普通的拉丁字母來記數量。

設有幾個向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$。**由某一點 O 作向量 $\mathbf{A}$, 由它的端點作向量 $\mathbf{B}$, 再由這向量的端點作向量 $\mathbf{C}$, 以第一個向量的起點爲起點，以第末個向量的端點爲端點的向量，叫做所給的向量之和**：

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

向量的和具有普通和的基本性質，就是由下列公式所表達的交換性質與結合性質（圖84）

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}; \qquad \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

若由向量 A 的端點作一個向量 C，讓向量 C 與向量 B 的大小相等方向相反，則以向量 A 的起點爲起點，以向量 C 的端點爲端點的向量 M，叫做向量 A 與 B 之差（圖85）：

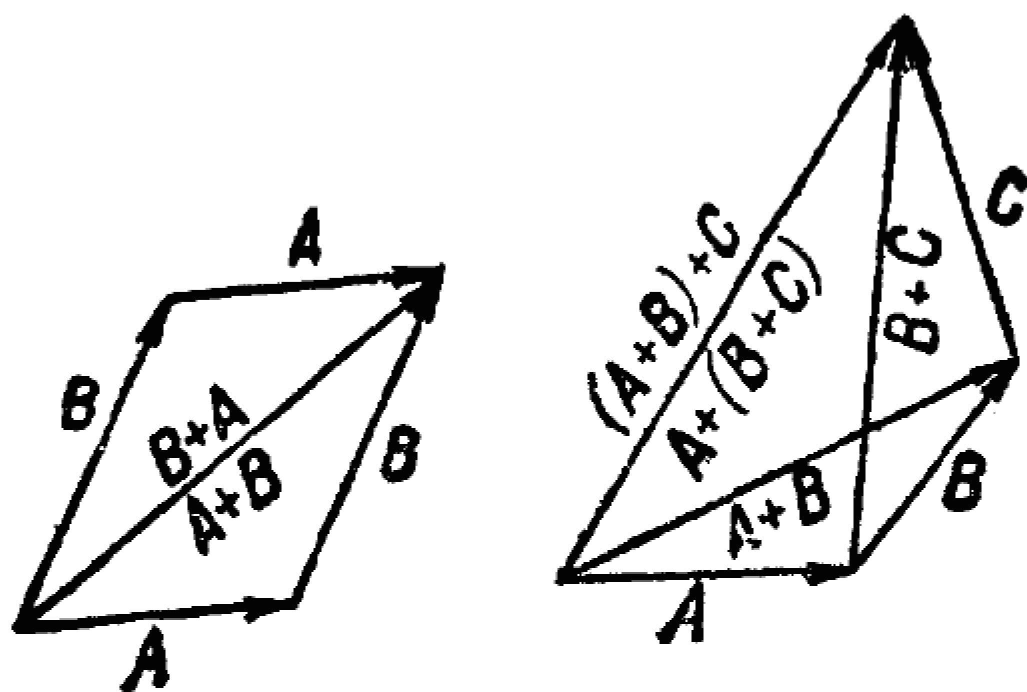


圖 84

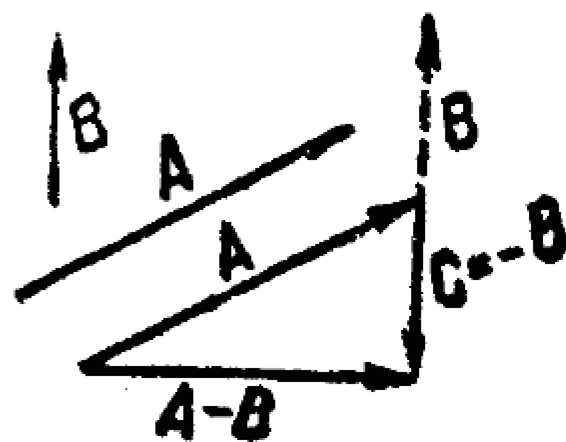


圖 85

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

不難看出，這個向量由關係式

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}$$

完全確定。

與向量 $\boldsymbol{N}$ 大小相等方向相反的向量一般記作 $(-\boldsymbol{N})$。於是，向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 之差可以確定作 $\boldsymbol{A}$ 與 $(-\boldsymbol{B})$ 之和，就是

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}.$$

不難證明，如此確定的關於向量的和與差的概念，也適用關於普通代數的和與差的法則，這裏我們不證。

向量和的法則在力學與物理學中有很多的應用。例如，參預到幾個運動中的點，它的總速度就由它在各別的運動中所有的速度依法則相加得來。依照這個法則可以得到作用在同一點上的幾個相當的力。

注意，若當相加時，最後一個向量的端點與第一個向量的起點重合，就是說，若由上述法則作出的折線是封閉的，則叫做所考慮的向量之和等於零。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=0$$

特別是，顯然

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=0$$

一般說來，若一個向量的大小等於零，則叫做這個向量等於零。在這情形下，無所謂它的方向。

101. 向量乘以數量. 向量的共面性 若有向量 $\boldsymbol{A}$ 與一個數 α，所謂乘積 $\alpha\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\alpha$ 是一個向量，大小等於 $|\alpha|\cdot|\boldsymbol{A}|$. 其方向，當 $\alpha>0$ 時與 $\boldsymbol{A}$ 相同，$\alpha<0$ 時與 $\boldsymbol{A}$ 相反。在 $\alpha=0$ 的情形，乘積 $\alpha\boldsymbol{A}$ 也等於零。

如此，若 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 是兩個向量，具有相同或相反的方向，則它們間存在有關係式：

$$\boldsymbol{B}=n\boldsymbol{A},$$

設$n=-\frac{a}{b}$，可以寫成比較對稱的形狀：

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}=0$$

反之，由上面寫的這關係式可以推出向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的方向相同或相反。

現在設給定任何兩個向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$，它們的方向不是相同的也不是相反的。通過任一點 O 引兩條平行於所給的向量的直線（圖86）。這兩條直接確定一個平面，這平面不僅平行向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$，且平行於所有的向量 $m\boldsymbol{A}$ 以及 $n\boldsymbol{B}$，其中 m 與 n 是任意的數值，並且根據加法法則，也平行於它們的和

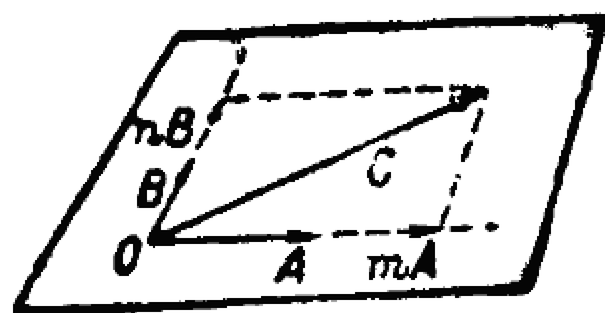


圖 86

$$\boldsymbol{C}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}.$$

反之，任何平行於所作的平面的向量 $\boldsymbol{C}$，可以表示成 $m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}$ 的形狀。爲要肯定這一點，只要由點 O 作出這個向量，使得它恰好是一個平行四邊形的對角線，而這平行四邊形的邊各平行於 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$。上面寫的關係式可以寫成比較對稱的形狀：

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=0$$

它表達出三個向量共面的條件，就是這三個向量平行於同一平面的情況。若 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 方向相同或相反，則向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 與任何向量 $\boldsymbol{C}$ 是共面的，這時在上面的關係式中需要算作 $c=0$。

102.向量沿三個不共面的向量的分解法 現在設有三個不共面的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{C}$。任何向量可以作爲一個平行六面體的對角線，而這平行六面體的三對邊各平行於 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{C}$。如此，任何一個向量可以通過三個不共面的向量來表達（圖87）：

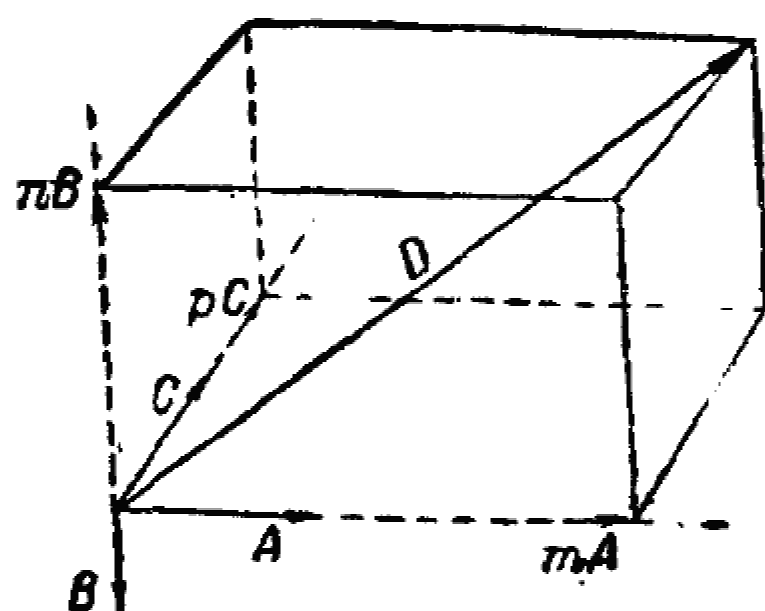


圖 87

$$\boldsymbol{D} = m\boldsymbol{A} + n\boldsymbol{B} + p\boldsymbol{C}$$

由此推知，任何四個向量之間存在有下面形狀的關係式：

$$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C} + d\boldsymbol{D} = 0$$

若前三個向量共面，則只需要算作 $d=0$。

上述一個向量沿三個不共面的向量的分解法特別重要的特殊情形，是當作好直角坐標軸 XYZ 時，向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{C}$ 的長度都等於一(這樣的向量我們一般叫做單位向量)，而各具有 OX、OY、OZ 軸的方向。在這情形下它們叫做**基本向量**，並且各記作 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$。

任何向量 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成下面的形狀：

$$\boldsymbol{A} = m\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k} \tag{1}$$

若由坐標原點放好向量 $\boldsymbol{A}$，則數 m、n 與 p 給出它的端點的坐標，它們表達出向量 $\boldsymbol{A}$ 在坐標軸上的投影。以後我們把這些投影各記作 A_x, A_y, A_z，叫做向量 $\boldsymbol{A}$ 沿坐標軸的**分量**或**支量**。那時，以上的關係式可以寫成下面的形狀：

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{2}$$

若 $\boldsymbol{n}$ 記空間任何一個方向，則向量 $\boldsymbol{A}$ 在這個方向上的投影就是

$$A_n = |\boldsymbol{A}|\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{A})$$

或者，注意解析幾何中已知的兩個方向間夾角的餘弦的表達式：

$$A_n=|A|[\cos(\boldsymbol{n},X)\cos(\boldsymbol{A},X)+\cos(\boldsymbol{n},Y)\cos(\boldsymbol{A},Y)$$
$$+\cos(\boldsymbol{n},Z)\cos(\boldsymbol{A},Z)]=A_x\cos(\boldsymbol{n},X)+A_y\cos(\boldsymbol{n},Y)+A_z\cos(\boldsymbol{n},Z).$$

當向量相加時，顯然它們的支量也恰好相加（封閉線的投影等於折線各部分投影之和）。

103.數量積　所謂兩個量向 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的數量積是一個數量，它的大小等於這兩個向量的長度與它們的夾角的餘弦之乘積。

數量積用記號 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 來記，所以

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \tag{3}$$

由這定義直接推出

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A},$$

就是說，對於數量積**交換律**成立。

若向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 交成直角，則顯然

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

特別是對於基本向量我們有：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

若向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的方向相同，則

$$A\cdot B=|A||B|,$$

並且若它們的方向相反，則

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

特別是，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2, \tag{4}$$

而且

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1. \tag{5}$$

數量積通過向量的支量來表達的方法如下：

$$
(6)\quad \begin{cases} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|[\cos(\boldsymbol{A},X)\cos(\boldsymbol{B},X)+ \\ \quad +\cos(\boldsymbol{A},Y)\cos(\boldsymbol{B},Y)+\cos(\boldsymbol{A},Z)\cos(\boldsymbol{B},Z)]= \\ =|\boldsymbol{A}|\cos(\boldsymbol{A},X)|\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{B},X)+|\boldsymbol{A}|\cos(\boldsymbol{A},Y)|\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{B},Y)+ \\ \quad +|\boldsymbol{A}|\cos(\boldsymbol{A},Z)|\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{B},Z)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z, \end{cases}
$$

就是說，**兩個向量的數量積等於這兩個向量的對應支量乘積之和。**

注意，這裏寫的等式的左邊不依賴於坐標軸的選擇，所以右邊也不依賴於坐標軸的選擇，雖然在右邊看起來這不是明顯的。

推出公式 (6) 時，我們利用了解析幾何中已知的關於兩個方向之間的角的公式 [102]。

不難證明，對於數量積，分配律成立，就是說下面的關係式成立

$$
(7)\qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.
$$

實際上，只要利用已經推出的數量積的表達式，可以寫成：

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}&=(A_x+B_x)C_x+(A_y+B_y)C_y+(A_z+B_z)C_z \\
&=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)+(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z) \\
&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.
\end{aligned}
$$

由分配性質直接推出更普遍的公式

$$
(8)\qquad (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1)\cdot(\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2)=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_2,
$$

它表達交叉相乘展開括號的法則。

104. 向量積 由空間任何一點 O 引出向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$，並以它們爲邊作一個平行四邊形。這平行四邊形所在的平面的過點 O 的垂線有兩

個相反方向。這兩個方向中有一個具有下述的性質，當站在這個方向來觀察時，由向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向轉一個小於 π 的角度達到向量 $\boldsymbol{B}$ 的方向，恰如站在 OZ 軸的方向觀察時，由 OX 軸的正向轉角度 $\frac{\pi}{2}$ 達到 OY 軸的正向所應有的轉法。圖 88 上表示出這個垂線的方向在右轉以及左轉坐標系的情形。

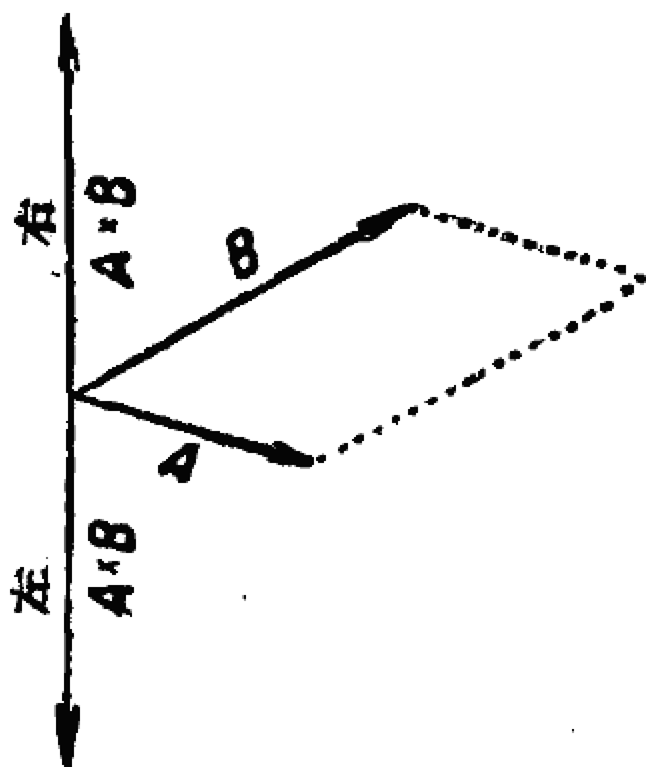


圖 88

所謂向量 $\boldsymbol{A}$ 乘以向量 $\boldsymbol{B}$ 的向量積是一個向量，大小等於由這兩個向量作成的平行四邊形的面積，方向與上述這平行四邊形所在的平面的垂線方向相同。

向量 $\boldsymbol{A}$ 乘以向量 $\boldsymbol{B}$ 的向量積普通用記號 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 來記。依照上述定義，它的大小等於

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}). \tag{9}$$

它的方向依賴於坐標系的定轉向，而且當定轉向改變時就變成相反的方向。

若向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的方向相同或相反，則它們的向量積等於零。特別是，顯然

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0.$$

現在考慮向量 $\boldsymbol{B}$ 乘以向量 $\boldsymbol{A}$ 的向量積。顯然，它的大小也像 $\boldsymbol{A}$ 乘以 $\boldsymbol{B}$ 的情形一樣，而方向則相反，因爲當在向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 之間轉時，不是由向量 $\boldsymbol{A}$ 轉起，而是由向量 $\boldsymbol{B}$ 轉起，於是相反。如此

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}, \tag{10}$$

由此看出，在向量積的情形下，交換律不成立，**並且當向量積的因子交換時變號**

對於基本向量，顯然有下列關係式：

(11) $$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0;\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i};\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}.$$

現在求向量積 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的支量通過向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的支量的表達式。注意到向量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 與向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的垂直性，可以寫成

$$P_xA_x+P_yA_y+P_zA_z=0,\quad P_xB_x+P_yB_y+P_zB_z=0.$$

我們利用下述的代數學中的輔助定理。

輔助定理 兩個三元齊次方程

$$ax+by+cz=0;\quad a_1x+b_1y+c_1z=0$$

的解具有下面的形狀

$$x=\lambda(bc_1-cb_1);\quad y=\lambda(ca_1-ac_1);\quad z=\lambda(ab_1-ba_1),$$

其中 λ 是任意乘數。這裏算作所寫出的差中至少有一個不等於零。

這個簡單的輔助定理請讀者自己證明。應用這個輔助定理，得到[1]：

$$P_x=\lambda(A_yB_z-A_zB_y);\ P_y=\lambda(A_zB_x-A_xB_z);\ P_z=\lambda(A_xB_y-A_yB_x)$$

其中 λ 是比例係數，還需要再確定。

爲此，我們利用一個重要的輔助恒等式，普通它叫做**拉格朗日恒等式**：

(12) $$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2$$
$$=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2,$$

展開兩邊的括號，不難肯定它的正確性。還要注意，$P_x^2+P_y^2+P_z^2$ 是向量 P 的長度的平方，就是

$$\lambda^2[(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2]$$
$$=|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\sin^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

---

1) 注意，若所寫的三個差都等於零，則向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 作成角度 0 或 π，於是 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，就是 $P_x=P_y=P_z=0$。

對於左邊應用拉格朗日恒等式，可以把這等式寫成：

$$\lambda^2[(A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2]$$

$$=|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\sin^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

或者，注意(4)與(6)：

$$\lambda^2[|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2-|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\cos^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})]=|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\sin^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

由此直接推出，$\lambda=\pm1$.

最後，我們來證明 $\lambda=+1$. 給向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 以連續的形變，使得向量 $\boldsymbol{A}$ 與基本向量 $\boldsymbol{i}$ 重合，向量 $\boldsymbol{B}$ 與基本向量 $\boldsymbol{j}$ 重合。形變可以作得讓向量 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 不成爲零並且它們不互相平行。那時，向量積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 不等於零，並且連續改變以至於結果成爲

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},$$

因爲 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{i}$ 重合，$\boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{j}$ 重合。

注意到改變的連續性，並且再注意到 λ 只可有兩個值（±1），我們可以肯定，當上述形變時，λ 不變，於是推知，形變後 λ 的值也就是應有的值。不過形變後我們有：

$$A_x=1;\ A_y=A_z=0;\ B_y=1;\ B_x=B_z=0;\ P_z=1;\ P_x=P_y=0,$$

於是由關係式

$$P_z=\lambda(A_xB_y-A_yB_x)$$

可以得到結論 $\lambda=+1$,

如此，我們得到下面的向量積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的支量的表達式：

$$(13)\qquad A_yB_z-A_zB_y;\quad A_zB_x-A_xB_z;\quad A_xB_y-A_yB_x.$$

利用這些表達式，讀者不難驗證分配律對於向量積的正確性，就是下面的關係式成立：

$$(14)\qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}.$$

藉助於公式(10)，由此不難得到

$$C\times(A+B)=C\times A+C\times B,$$

以至於較普遍的公式:

(15) $(A_1+A_2)(B_1+B_2)=A_1\times B_1+A_1\times B_2+A_2\times B_1+A_2\times B_2$,

這與對於數量積的公式 (8) 完全類似。

105. 數量積與向量積之間的關係 作出向量 A 與向量積 $N=B\times C$ 的數量積:

$$A\cdot(B\times C).$$

向量積 $B\times C=N$ 的大小等於由向量 B 與 C 作成的平行四邊形的面積。但是

$$A\cdot(B\times C)=A\cdot N=|A||N|\cos(A,N),$$

於是推知，這個乘積可以考慮作上述平行四邊形的面積 $|N|$ 與向量 A 在方向 N 上的投影的乘積，其中方向 N 垂直於這平行四邊形所在的平面，就是說，**數量積 $A\cdot(B\times C)$ 表達由向量 A, B 與 C 作成的平行六面體的體積**。它的符號依賴於坐標軸的定轉向。不難看出，若向量 B,C,A 或 A,B,C 有相同的定轉向，而與坐標軸的定轉向相同，則有(+)號，這可以像我們以上利用的連續形變的方法一樣證明[1]。

我們計算平行六面體的體積時，用了由向量 B 與 C 作成的平行四邊形作底。不過同樣我們也能夠應用由向量 C 與 A 或 A 與 B 作成平行四邊形作底。如此，我們得到下面的關係式:

(16) $$A\cdot(B\times C)=B\cdot(C\times A)=C\cdot(A\times B).$$

只是要注意這三個數量積的符號。它們是相同的，因為向量組 (A,B,C)，(B,C,A) 與 (C,A,B) 有相同的定轉向。後兩組可以由

---

[1] 乘積 $A\cdot(B\times C)$ 的符號依賴於坐標軸的定轉向是由於因子 $(B\times C)$ 的符號依賴於軸的定轉向。如此，所考慮的量 $A\cdot(B\times C)$ 不是普通的數量，普通的數量不應當依賴於坐標軸的選擇。一般說來，依賴於坐標軸的量，若只是當定轉向改變時改變符號，則叫做準數量。

第一組經過**循環換位**得到。這些向量取另外的順序時，符號就相反，就是說，例如

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}), \tag{17}$$

若三個向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{C}$ 共面，則平行六面體的體積等於零，就是說，在這情形下

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0. \tag{18}$$

這等式是三個向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, 與 $\boldsymbol{C}$ 共面的必要且充分條件。

現在考慮 $\boldsymbol{A}$ 乘以向量積 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的向量積，就是

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}).$$

因爲向量 D 垂直於向量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，則它與 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 共面，所以 [101]:

$$\boldsymbol{D}=m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}; \tag{19}$$

不過 $\boldsymbol{D}$ 垂直於 $\boldsymbol{A}$，所以 [103]

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=m\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0,$$

由此

$$m=\mu\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C};\quad n=-\mu\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B},$$

於是結果

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{D}=\mu\{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\},$$

只剩下要確定比例係數 μ. 爲此，只要比較以上的公式左右兩邊的向量沿任何一個坐標軸的支量。取 OX 軸的方向平行於 $\boldsymbol{A}$，再計算沿 OZ 軸的支量。注意，當這樣選定軸時，

$$A_x=|\boldsymbol{A}|=a;\quad A_y=A_z=0,$$

對於左邊我們有 [104]

$$D_z=A_x(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y=a(B_zC_x-B_xC_z),$$

而對於右邊 [103]

$$\mu(aC_xB_z-aB_xC_z),$$

由此比較，得到 $\mu=1$.

由此求得下面的公式：

$$(20)\qquad \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$$

作爲這個公式的推理，**求向量 $\boldsymbol{B}$ 沿平行於以及垂直於給定的向量 $\boldsymbol{A}$ 的兩個方向的分解法**，設在公式(20)中，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$，把它寫成下面的形狀：

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

或

$$(21)\qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}'',$$

其中

$$\boldsymbol{B}'=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A};\qquad \boldsymbol{B}''=-\frac{\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}},$$

這就給出要求的分解法，因爲顯然，向量 $\boldsymbol{B}'$ 平行於向量 $\boldsymbol{A}$，而向量 $\boldsymbol{B}''$ 垂直於向量 $\boldsymbol{A}$。

206. **剛體轉動時速度的分佈，向量矩** 向量積的概念在力學中有重要的應用，首先是對於剛體運動的討論[1]。

先考慮環繞着一個不動軸轉動的剛體(圖89)。當這樣轉動時，剛體的任何點就有速度 $\boldsymbol{v}$，它的大小等於點 M 到轉動軸的距離 PM 乘以轉動角速度 ω，方向垂直於通過轉動軸以及點 M 的平面。這個速度可以由下述幾何方法來表示。由軸 (L) 的兩個方向中取定一個，使得逆鐘針方向轉動時算作是正的。由軸上任意一點 A 在所述方向上截取一個線段，它的長度等於 ω，我們就有一個向量 $\boldsymbol{O}$，它叫做角速度向量。再用 $\boldsymbol{r}$ 記由線段 AM 確定的向量，於是藉助於向量積的定義，不難得到下面對於速度 $\boldsymbol{v}$ 的表達式：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}\times\boldsymbol{r},$$

因爲向量積 $\boldsymbol{o}\times\boldsymbol{r}$ 的大小等於

$$|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{o}|\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{o})=\omega\cdot|\overrightarrow{MA}|\cdot\sin\varphi=\omega\cdot|MP|=|\boldsymbol{v}|,$$

而方向與 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同。

---

1) 以後我們利用右轉軸系。

由動力學知道，剛體的任何運動中具有一個不動點 O 時，在每這一個給定的時刻剛體上點的速度，就好像是這剛體繞着某一個通過點 O 的軸(瞬時軸)在轉動，而有某一個角速度 ω (瞬時角速度)；一般說來，轉動軸的位置以及 ω 的大小是隨時間改變的。依照以上所述，在每一個給定的時刻，剛體上點的速度由一個向量積來確定，它就是瞬時角速度向量與向量 $\overrightarrow{OM}$ 的向量積。

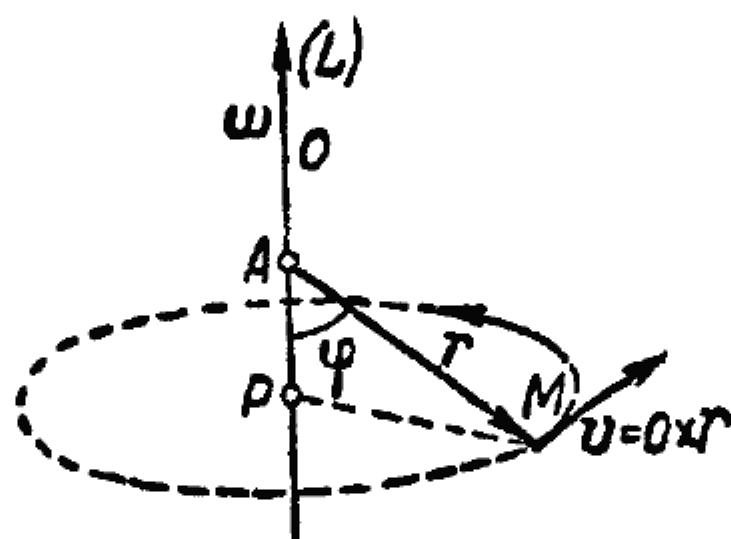


圖 89

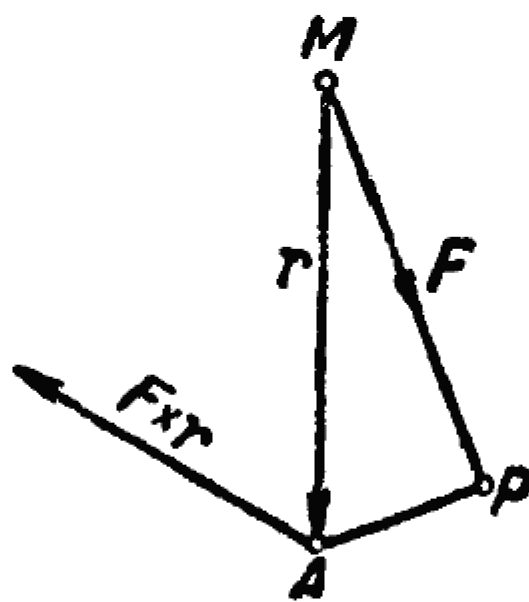


圖 90

考慮另一個例。設對於點 M 施用一個力，由向量 $\boldsymbol{F}$ 來表示，並設 A 是空間某一點(圖 90)。

所謂 $\boldsymbol{F}$ 對於點 A 的力矩就是向量積 $\boldsymbol{F}\times r$，其中 r 是以點 $\boldsymbol{M}$ 爲起點，點 A 爲端點的向量。

過點 A 作出力 $\boldsymbol{F}$ 所在的直線的垂線 AP。由直角三角形 AMP 得到：

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}| = |\boldsymbol{r}|\,|\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{F})|,$$

於是推知，$\boldsymbol{F}$ 對於點 A 的力矩的大小是

$$|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{F}|\,|\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{F})| = |\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}|.$$

就是，等於力的大小與點 A 到力所在的直線的距離之乘積。力矩的方向由上述確定向量積的方向的法則來確定。

由上述推出，當點的位置 M 沿力所在的直線移動時，力矩不改變。顯然，關於點的力矩的定義可以推廣到任何向量的情形。

我們來求力矩的支量的表達式。設 (a,b,c) 是點 A 的坐標，(x,y,z) 是點 M 的坐標。向量 $\boldsymbol{r}$ 的支量就是：

$$a-x;\qquad b-y;\qquad c-z.$$

利用向量積的支量的表達式[104]，得到下面的力矩的支量:

$$(y-b)F_z-(z-c)F_y;\ (z-c)F_x-(x-a)F_z;\ (x-a)F_y-(y-b)F_x.$$

回到剛體繞一個軸轉動的例，可以說，剛體上點 M 的速度等於角速度對於點 M 的向量矩。用 (x,y,z) 記這個點的坐標，用 (x_0,y_0,z_0) 記角速度向量的起點的坐標，並用 O_x, O_y, O_z 記這向量的支量，就得到下面的點 M 的速度的支量:

$$(z-z_0)O_y-(y-y_0)O_z;\ (x-x_0)O_z-(z-z_0)O_x;\ (y-y_0)O_x-(x-x_0)O_y.$$

現在我們來確定關於軸的向量矩。設在空間有某一直線 Δ，給它以確定的方向(軸)。所謂 F 關於軸 Δ 的向量矩是 F 關於軸 Δ 上任何點 A 的向量矩[1]在這軸上的投影的代數的大小。

為要證明這個定義是合理的，我們來證明定義中所說的，投影不依賴於點 A 在軸 Δ 上的位置。取軸 Δ 作 OZ 軸，並設 $(0,0,C)$ 是點 A 的坐標而點 (x,y,z) 是向量 F 的起點的坐標。當這樣選擇坐標軸時，F 關於點 A 的向量力矩在軸 Δ 上的投影與它的沿 OZ 軸的支量相同，根據上面的公式，就等於

$$xF_y-yF_x,$$

因為 $a=b=0$。這個差不依賴於 c，就是說，與點 A 在軸 Δ 上的位置無關。

107. 向量的微分法 推廣微分法的概念到依賴於某一參變量 τ 的變向量 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 的情形。我們在某一個確定的點放向量的起點——例如坐標原點 O (圖91)。當參變量 τ 改變時，變向量 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 的端點畫出某一條曲線 (L)。設當參變量取值 τ 與 $\tau+\Delta\tau$ 時，變向量的位置是 OM 與 OM_1。線段 MM_1 對應於差 $\boldsymbol{A}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{A}(\tau)$，由關係式

$$\frac{\boldsymbol{A}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{A}(\tau)}{\Delta\tau}$$

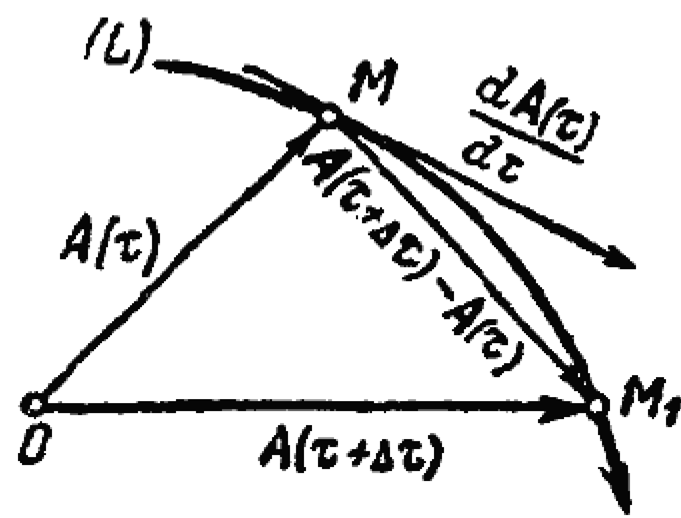


圖 91

給出某一個平行於 MM_1 的向量。當 $\Delta\tau\to 0$ 時，這個向量的極限位置如果存在的話，就表示成微商

1)這樣的向量只是關於點的向量矩，而不是關於軸的。

(22)
$$\frac{d\boldsymbol{A}(\tau)}{d\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{A}(\tau)}{\Delta\tau}$$

顯然，這微商是個向量，它的方向是沿曲線(L)在點 M 的切線的方向。它也依賴於 τ，並且它對 τ 的微商給出二級微商$\frac{d^2\boldsymbol{A}(\tau)}{d\tau_2}$，以下依此類推。

把向量 $\boldsymbol{A}(\tau)$ 沿三個基本向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分解：

$$\boldsymbol{A}(\tau)=A_x(\tau)\boldsymbol{i}+A_y(\tau)\boldsymbol{j}+A_z(\tau)\boldsymbol{k}.$$

這時定義(22)給出

(23)
$$\frac{d\boldsymbol{A}(\tau)}{d\tau}=\frac{dA_x(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{i}+\frac{dA_y(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{j}+\frac{dA_z(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{k}.$$

並且一般說來

(23_1)
$$\frac{d^n\boldsymbol{A}(\tau)}{d\tau}=\frac{d^nA_x(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{i}+\frac{d^nA_y(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{j}+\frac{d^nA_z(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{k}.$$

就是說，**求向量的微商可以化爲求這向量的支量的微商。**

已知的求乘積的微商的法則可以推廣到求數量積，向量積以及數量與向量的乘積的微商的情形，所以下面的公式成立：

(24)
$$\frac{d}{d\tau}\{f(\tau)\boldsymbol{A}(\tau)\}=\frac{df(\tau)}{d\tau}\boldsymbol{A}(\tau)+f(\tau)\frac{d\boldsymbol{A}_z(\tau)}{d\tau}$$

(24_1)
$$\frac{d}{d\tau}\{\boldsymbol{A}(\tau)\cdot\boldsymbol{B}(\tau)\}=\frac{d\boldsymbol{A}(\tau)}{d\tau}\cdot\boldsymbol{B}(\tau)+\boldsymbol{A}(\tau)\cdot\frac{d\boldsymbol{B}(\tau)}{d\tau}$$

(24_2)
$$\frac{d}{d\tau}\{\boldsymbol{A}(\tau)\times\boldsymbol{B}(\tau)\}=\frac{d\boldsymbol{A}(\tau)}{d\tau}\times\boldsymbol{B}(\tau)+\boldsymbol{A}(\tau)\times\frac{d\boldsymbol{B}(\tau)}{d\tau},$$

其中 $f(\tau)$ 是依賴於 τ 的數量，$\boldsymbol{A}(\tau)$ 與 $\boldsymbol{B}(\tau)$ 是依賴於 τ 的向量。我們驗證公式 (24_1) 以爲例。把它的左邊表示成

$$\frac{d}{d\tau}\{A_x(\tau)B_x(\tau)+A_y(\tau)B_y(\tau)+A_z(\tau)B_z(\tau)\}$$

$$=\frac{dA_x(\tau)}{d\tau}B_x(\tau)+\frac{dA_y(\tau)}{d\tau}B_y(\tau)+\frac{dA_z(\tau)}{d\tau}B_z(\tau)+$$

$$+A_x(\tau)\frac{dB_x(\tau)}{d\tau}+A_y(\tau)\frac{dB_y(\tau)}{d\tau}+A_z(\tau)\frac{dB_z(\tau)}{d\tau}$$

不難看出，對於右邊我們得到同樣的結果。自然，算作我們用到的微商都存在。在公式（24），（24_1），（24_2）中，由各因子的微商存在可以推出乘積的微商存在［參考 I, 47］。求向量和的微商的普通法則非常容易證明。若點 M 沿某一曲線（L）運動，則這個點的向量半徑 $\boldsymbol{r}$ 是時間 t 的函數。求出向量半徑對 t 的微商，就得到這點的運動的速度向量。

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \tag{25}$$

這個向量的長度等於路徑 s 對時間 t 的微商，而方向是曲線（L）的切線方向。所得到的速度向量也依賴於時間，再求它的微商，就得到加速度向量 $\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$。

若我們取曲線的長度 s 作自變量，則 $\boldsymbol{r}$ 對 s 的微商就表示切線上的單位向量 $\boldsymbol{i}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$，就是說，這向量的長度是一，而方向是沿切線的方向。實際上，在［I, 70］中我們有過 $\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta s}\to 1$，就是說，弦的長度與對應的弧的長度之比趨向一。顯然，對於空間的曲線，這仍然正確［I, 160］。當 $\tau=s$ 時，由這事實與定義（22）直接推出，上述切線向量的長度確實等於一。

108. 數量場及其梯度 若某一個物理的量在全部空間或一部分空間的每一個點有確定的值，這樣就確定了這個量的一個場。若給定的量是數量（溫度、壓力、靜電位），則它的場叫做數量場。若所給的

量是向量（速度、力），則它所確定的場叫做向量場。

我們先討論數量場。爲要給定一個這樣的場，只須確定點的一個函數 $U(M)=U(x,y,z)$。

例如，熱的物體給出一個溫度的數量場。在物體的每一個點 M 溫度 $U(M)$ 有確定的值，在不同的點可以不同。

取出一個確定的點，過這點引一條直線，並且給這直線以確定的方向 (l)（圖 92）。考慮函數 $U(M)$ 在這點 M 以及由直線 (l) 連接的它的一個鄰近的點 M_1 的值。比

$$\frac{U(M_1)-U(M)}{\overline{MM_1}}$$

的極限叫做**函數 $U(M)$ 沿方向 (l) 的微商**，並且記作：

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=\lim_{M_1\to M}\frac{U(M_1)-U(M)}{M_1-M} \tag{26}$$

這個微商表現出來函數 $U(M)$ 在點 M 沿方向 (l) 的變化率，如此，這函數在每一點有無數的微商，不過不難證明，沿任何方向的微商可以由下面的公式通過沿互相垂直的三個方向 X, Y, Z 的微商來表達

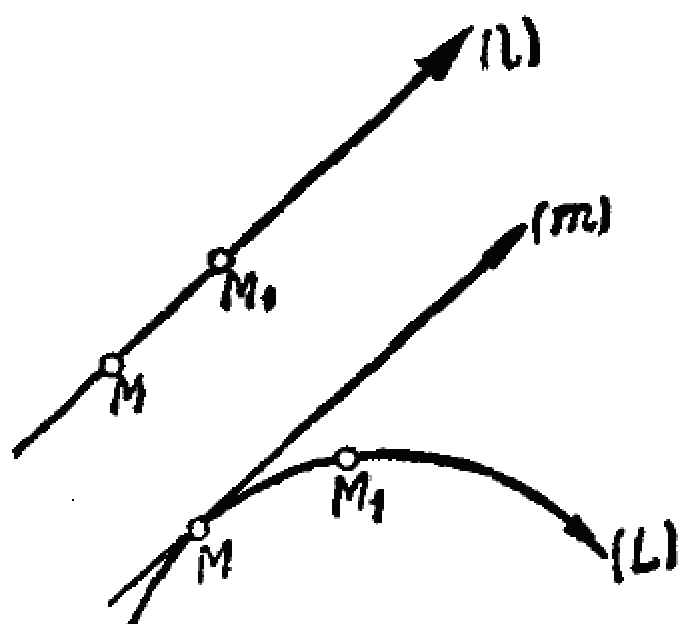


圖 92

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\cos(l,X)+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\cos(l,Y)+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\cos(l,Z) \tag{27}$$

首先要提出，作出微商 (26) 時，我們也可以不過點 M 引直線，而引任何方向的曲線（圖 92）。替代公式 (26)，我們就需要考慮極限

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1)-U(M)}{\widehat{MM_1}}$$

這個極限顯然與函數 $U(M)$ 對於取在曲線 (L) 上的弧長 s 的微商沒有什麼不同，利用求複合函數的微商的法則，我們可以寫成：

$$(28) \qquad \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1)-U(M)}{\widehat{MM_1}} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

不過，我們知道［I，160］，$\frac{dx}{ds}$，$\frac{dy}{ds}$，$\frac{dz}{ds}$是曲線 (L) 在點 M 的切線的方向餘弦，並且在 (L) 是直線的情形，我們也是得到公式(27)。此外，公式（28）說明，沿曲線的微商與沿這曲線在點 M 的切線方向 (m) 的微商相同。

現在我們來考慮數量場的等量面。這樣的曲面由下述條件突出的表現，就是在這樣的曲面上所有的點函數 $U(M)$ 保持同一個常數值 C. 給這常數以不同的數值，就得到一族的等量面 $U(M)=C$，並且過空間每一個點將引出一個確定的等量面。對於熱的物體的情形，等量面就是等溫面。設 (S) 是通過點 M 的等量面(圖 93)。由這個點引出三個互相垂直的方向：曲面 (S) 的法線方向 (n)，以及位於切面上的兩個方向 (t_1) 與 (t_2)。方向 (t_1) 與 (t_2) 各爲位於等量面上的某一條曲線 (L_1) 與 (L_2) 的切線方向。沿這兩條曲線函數 $U(M)$ 保持常數值，所以

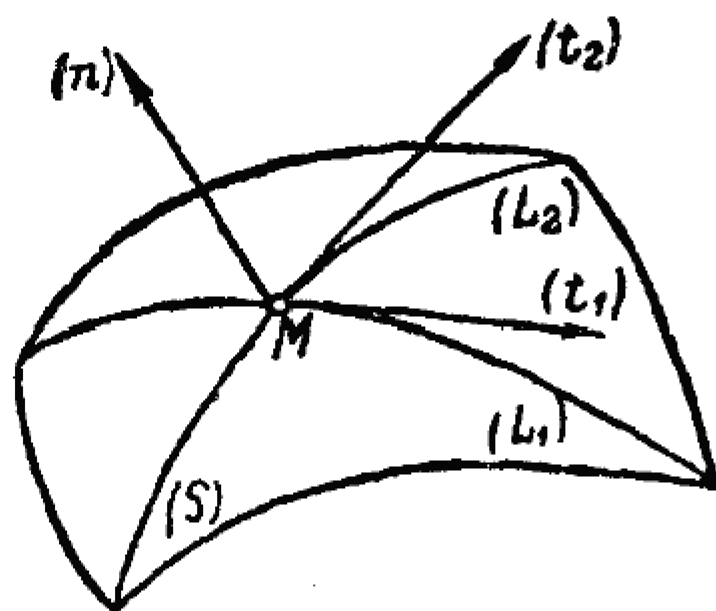


圖 93

$$\frac{\partial U(M)}{\partial t_1}=\frac{\partial U(M)}{\partial t_2}=0. \tag{29}$$

現在取出任何一個方向 (l). 應用公式(27)於互相垂直的三個方向 (n), (t_1) 以及 (t_2), 並注意(29), 就有:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=\frac{\partial U(M)}{\partial n}\cos(l,n). \tag{30}$$

若我們在方向 (n) 作出一個向量, 代數的大小等於 $\frac{\partial U(M)}{\partial n}$, 則依照(30), 這個向量在任何方向 (l) 上的投影給出微商 $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$.

由上述法則作出的向量叫做**函數 $U(M)$ 的梯度**。就是說, **一個數量場的梯度是由下述法則作出的一個向量場, 在每一個點, 向量的方向是沿對應的等量面的法線方向, 而它的代數的大小等於函數 $U(M)$ 沿所述法線方向的微商**。數量場 $U(M)$ 的梯度用記號 $\operatorname{grad} U(M)$ 來記, 於是公式(30)可以寫成下面的形狀:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l}=\operatorname{grad}_l U(M), \tag{31}$$

其中 $\operatorname{grad}_l U(M)$ 是向量 $\operatorname{grad} U(M)$ 在方向 (l) 上的投影。

不難看出, 等量面 (S) 的法線的方向的選擇不會影響 $\operatorname{grad} U(M)$ 的方向。這個向量總指向 (S) 的法線的一個方向, 在這方向函數 $U(M)$ 上升。

例 1. 在[87]中我們考慮過引力場, 於是引起引力勢的數量場

$$U(M)=\iiint\limits_{(v)}\frac{\mu(M_1)\,dv}{r},$$

其中 $\mu(M_1)$ 是佔有容積 (v) 的物質的密度, 而 r 是由點 M 到積分變點 M_1 的距離。對於引力的支量我們有下面的表達式:

$$F_x=\frac{\partial U(M)}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial U(M)}{\partial y};\quad F_z=\frac{\partial U(M)}{\partial z},$$

其中 F_x、F_y、F_z 是力向量 $\boldsymbol{F}$ 的支量。由此直接推出，一般說來，$F_l=\dfrac{\partial U(M)}{\partial l}$，

就是說，引力的向量場是勢量 $U(M)$ 的梯度。引力作的功由下面的公式表達：

$$\int_{(A)}^{(B)} F_x dx+F_y dy+F_z dz=\int_{(A)}^{(B)} dU(M)=U(B)-U(A),$$

就是說，這個功由在點 A 與 B 的勢量差來表達。

顯然，任何保守力場具有後面這個性質，所謂保守力場就是這樣的力場，對於它 $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad} U(M)$. 有時，勢量不是說的函數 $U(M)$，而是 $-U(M)$。

2.若一個物體在不同的點有不同的溫度 $U(M)$，則在這場中就出現有熱量的移動，由較熱的部分到比較不熱的部分。取出任何一個曲面，於其上在點 M 附近取一個小的單元 dS。由熱傳導的理論知道，在時間 dt 通過單元 dS 的熱量，與 $dt\, dS$ 以及溫度的法線微商 $\dfrac{\partial U(M)}{\partial n}$ 成比例，就是說

$$\Delta Q=k\,dt\,dS\left|\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right|, \tag{32}$$

其中 k 是比例係數，它叫做內導熱率，而 (n) 是 dS 的法線方向。

作出向量 $-k\operatorname{grad}U(M)$，它叫做熱流向量；我們用（—）號是根據熱流動時由溫度較高處流向較低處，而向量 $\operatorname{grad} U(M)$ 的方向是沿等量面的法線而且在函數 $U(M)$ 上升的方向。根據公式(32)，可以說，在時間 dt 通過單元 dS 的熱量是：

$$\Delta Q=k\,dt\,ds\,|\operatorname{grad}_n U(M)|. \tag{33}$$

109. 向量場、旋轉量與發散量 現在我們來考慮向量場 $\boldsymbol{A}(M)$，在給定這個場的空間或一部分空間的每一個點，向量 $\boldsymbol{A}(M)$ 有確定的大小及方向。例如，當流體流動時，在每一個給定的時刻我們有速度 $\boldsymbol{v}$ 的一個向量場。

所謂一個場的向量曲線是這樣的曲線 (L)，在它的每一個點它的切線在向量 $\boldsymbol{A}(M)$ 的方向（圖 94）. 像在 [22] 中完全一樣，不難看出，一個場的向量曲線的微分方程可以寫成下面的形狀：

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}, \tag{34}$$

其中 A_x, A_y, A_z 是 x, y, z 的確定的函數。根據存在與唯一定理，通過保持有這定理的條件的每一個點，就有一條確定的向量曲線[1]。若作出通過某一塊曲面 (S) 上的點的所有的向量曲線，則它們全體組成一個向量管（圖 94）。

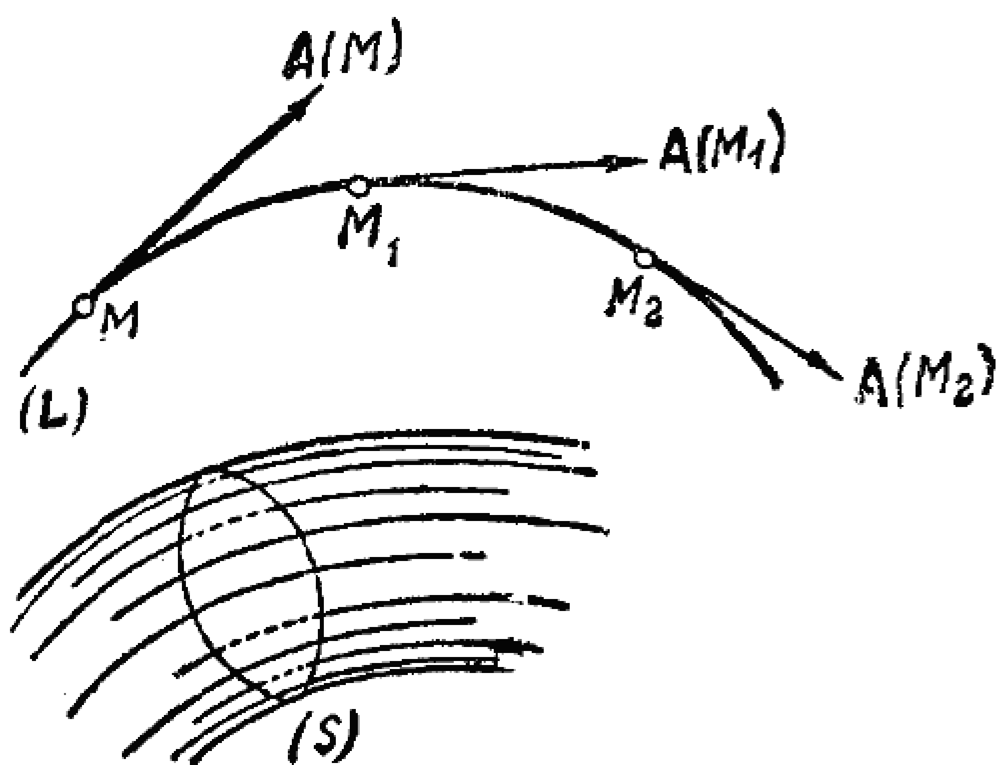


圖 94

在某一個場中取出一塊容積 (v)，設 (S) 是這塊容積的界面，而且 (n) 是 (S) 的法線方向，對於容積 (v) 來講是向外的。應用奧斯特洛格拉得斯基公式 [63] 於函數 A_x, A_y 與 A_z，得到：

$$\iiint_{(v)}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dv=\iint_{(S)}[A_x\cos(n, X)+A_y\cos(n, Y)+A_z\cos(n, Z)]\,dS$$

或者 [102]

$$\iiint_{(v)}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dv=\iint_{(S)}A_n dS. \tag{35}$$

右邊的曲面積分普通叫做**這個場的通過這曲面的流量**。它的物理意義以後再講。容積積分中的被積函數叫做這個向量場的發散量，記

---

[1] 若 A_x, A_y, A_z 是連續函數且有連續微商，並且在點 M 向量 $\boldsymbol{A}(M)$ 不等於零，就是說，至少所說的函數中有一個不等於零，就滿足這定理的條件 [51]。

作[1)]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{36}$$

如此，奧斯特洛格拉得斯基公式可以寫成：

$$\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dv = \iint\limits_{(S)} A_n\, dS, \tag{37}$$

就是說，**發散量的容積積分等於這個場通過這容積的界面的流量。**發散量的定義(36)與坐標軸 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ 的選擇有連繫，不過利用公式(37)不難給出發散量的另一個定義，它與坐標軸的選擇沒有關係。作出圍繞着點 M 的一個不大的容積 (v_1)，設 (S_1) 是這容積的界面。應用公式(37)，再利用中值定理[61]，可以寫成：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}\Big|_{M_1} \cdot v_1 = \iint\limits_{(S_1)} A_n dS, \text{就是} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\Big|_{M_1} = \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n dS}{v_1},$$

其中 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ 取在容積 (v_1) 中某一點 M_1 的值，而 v_1 是這個容積的大小。當容積無限縮小於一點 M 時，點 M_1 就趨向點 M，由上面的公式取極限就得到在點 M 的發散量的大小：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{(v_1)\to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n dS}{v_1}, \tag{38}$$

就是說，**一個場在點 M 的發散量是這個場通過圍繞着點 M 的很小的封閉曲面的流量與界於這個曲面的容積之比的極限。**

以上的理由說明，任何向量場給出某一個數量場 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$，就是它的發散量的場。我們現在證明，利用司鐸克斯公式，除此之外，由原始的場 $\boldsymbol{A}$，還產生出一個向量場。取

$$P = A_x;\quad Q = A_y;\quad R = A_z,$$

[1)] div 是法文 divergence 的前三個字母，它的意思是“發散”。

寫出司鐸克斯公式[70]:

$$(39)\quad \int_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(n, X) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(n, Y) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(n, Z) \right] dS.$$

設 ds 是曲線 (l) 的有向弧單元，就是這曲線的弧單元，而考慮作很小的向量。它在坐標軸上的支量是 dx, dy, dz，於是曲線積分號下的表達式代表數量積 $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$，也就是等於 $A_s\,ds$，其中 A_s 是 $\boldsymbol{A}$ 在 (l) 的切線上的投影。

此外再考慮一個向量，它的支量各等於重積分號下的各個差。這個向量作成一個新的向量場，它叫做場 $\boldsymbol{A}$ 的旋轉量，記作 rot $\boldsymbol{A}$ 或 curl $\boldsymbol{A}$[1]，所以

$$(40)\qquad \mathrm{rot}_x \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\quad \mathrm{rot}_y \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$\mathrm{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

這時公式 (39) 可以寫成:

$$\int_{(l)} A_s ds = \iint_{(S)} [\mathrm{rot}_x \boldsymbol{A} \cos(n, X) + \mathrm{rot}_y \boldsymbol{A} \cos(n, Y) + \mathrm{rot}_z \boldsymbol{A} \cos(n, Z)] dS$$

或

$$(41)\qquad \int_{(l)} A_s\, ds = \iint_{(S)} \mathrm{rot}_n \boldsymbol{A}\, dS,$$

其中 $\mathrm{rot}_n \boldsymbol{A}$ 是 rot $\boldsymbol{A}$ 在曲面 (S) 的法線 (n) 上的支量。左邊的曲線積分普通叫做**向量 $\boldsymbol{A}$ 沿界線 (l) 的循環量**，於是司鐸克斯公式可以敍述

[1]) rot 是法文 rotation 的前三個字母，意思是旋轉，curl 是一個英字文，相當於中文旋轉。

如下：**一個場沿某一個曲面的界線的循環量，等於旋轉量的法線支量沿這曲面的積分，**也就是，**等於旋轉量通過這曲面的流量。**公式(41)使我們可能給旋轉量一個定義，而與坐標軸的選擇沒有關係。設(m)是通過點M的某一個方向，而(σ)是通過這個點而垂直(m)的一塊小平面。應用公式(41)於這塊小面積，再利用中値定理：

$$\int\limits_{(\lambda)} A_s ds = \mathrm{rot}_m A \Big|_{M_1} \sigma, \text{ 就是 } \mathrm{rot}_m A \Big|_{M_1} = \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_s ds}{\sigma};$$

其中(λ)是(σ)的界線，而M_1是這塊面積上某一個點。當這塊面積無限縮小於一個點M時取極限，像對於發散量的情形一樣，就得到，在點M旋轉量在任何的給定的方向(m)上的支量的值。

(42)
$$\mathrm{rot}_m A = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_s ds}{\sigma}.$$

以後我們有很多應用旋轉量與發散量的概念的例，並且還要講這些概念的物理意義。

110. 勢量場與管量場 在[108]中我們得到一個向量場 $\mathrm{grad}\, U(M)$，它是某一個數量場$U(M)$的梯度。這樣的向量場叫做勢量場。並非任何的向量場總是勢量場，我們現在來講給定的向量場是勢量場的一個必要且充分條件。關係式$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\, U(M)$相當於[108]

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ A_y = \frac{\partial U}{\partial y};\ A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

就是說，相當於表達式

(43)
$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

是某一個函數的全微分。在[73]中我們看到，爲此必須且僅須滿足下面三個條件

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0;\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0,$$

而這三個條件顯然相當於這個場的旋轉量等於零 $\operatorname{rot} A=0$, 就是說，**爲要使得一個向量場是勢量場必須且僅須使得這個場的旋轉量等於零**。若滿足這個條件，則依照 [73] 這個場的勢量由下面形狀的界線積分來確定

(44) $$U(M)=\int_{(M_0)}^{(M)} A_x dx+A_y dy+A_z dz=\int_{(M_0)}^{(M)} A_s ds.$$

這裏 $A=\operatorname{grad} U(M)$，於是 [73]

$$\int_{(A)}^{(B)} A_s ds=\int_{(A)}^{(B)} \operatorname{grad}_s U(M)\, ds=U(B)-U(A).$$

可能表達式 (43) 不是全微分，可是能有積分因子，就是說，存在這樣的點的函數 $\mu(M)$，使得表達式

(45) $$\mu(A_x dx+A_y dy+A_z dz)=dU$$

是全微分，這樣的向量場叫**準勢量場**：在 [76] 中我們看到，這樣的場的突出的特點是存在有一族曲面 $U(M)=C$ 垂直於這個場的向量曲線，並且由 (45) 推知 $\mu A=\operatorname{grad} U$ 或

$$A=\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} U,$$

就是說，**在這情形下，場 A 與勢量場差一個數因子 $\frac{1}{\mu}$，這個數因子在空間不同的點具有不同的值**。

準勢量場的必要且充分條件由下面這公式表達 [76]：

$$A_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+A_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+A_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0,$$

它可以寫成：

(46) $$\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0,$$

就是說，**條件(46)，也就是向量A與 rot A 垂直或 rot A 等於零，是存在有一族曲面垂直於這個場的向量曲線的必要且充分條件。**

注意，若是場所佔有的空間是個複通區域，則由公式(44)所確定的這個場的勢量可以是多值函數。

以上我們討論了旋轉量等於零的向量場，並且斷定這樣的場是勢量場。發散量等於零的向量場，也就是滿足恆等的條件 div $\boldsymbol{A}=0$ 的，叫做管量場。根據公式(37)對於這樣的場我們有

(47) $$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS=0,$$

其中(S)是一個任意的封閉曲面，在它的內部這個場到處存在。



圖 95

取某一個向量管在它的兩個斷面(S_1)與(S_2)之間的一段作爲曲面(S)（圖95）。在這個管的側面上$A_n=0$，因爲$\boldsymbol{A}$在這側面的切面上。若對於斷面(S_1)與(S_2)，法線所取的方向，就沿着這管的移動來看，是一致的，則在一個斷面(S_1)上這是向內的法線，而在另一面(S_2)上是向外的，所謂向內向外都是對於截下來的一段向量管來講的。對於這段管應用公式(47)，就有：

$$\iint\limits_{(S_2)} A_n\,dS-\iint\limits_{(S_1)} A_n dS=0,$$

這裏沿(S_1)的積分取(－)號是由於在(S_1)上(n)的方向與向外的法線的方向相反。上面這個等式說明，在管量場的情形下，沿一個向

量管的所有的斷面，積分

$$\iint\limits_{(S)} A_n\, dS \tag{48}$$

有同一個值。它給出這個場的通過斷面 (S) 的流量，普通叫做**向量管的斷面 (S) 上的壓脅強**。如此，**對於菅量場，在一個向量菅的所有的斷面上，壓脅强有同一個值**。若當沿一個向量管移動時，它的斷面的面積增大，就是說向量管漸粗，則一般說來，流量的强度，就是量 A_n，減小，而積分 (48) 的大小保持不變。

111. 定向曲面單元 像定向曲線單元 [109] 似的，可以考慮定向曲面單元 $d\boldsymbol{S}$。設我們把給定的曲面分爲兩側，使在曲面的每一個點，結合着曲面的這一側或那一側，有兩個彼此相反的法線方向，並且當沿這曲面連續移動時，由曲面的一側或另一側所確定的法線方向將連續改變 [64]。在封閉曲面的情形下，依照以這曲面爲界的容積來講，有向內的法線與向外的法線。**所謂定向曲面單元 $d\boldsymbol{S}$ 是一個向量，它的長度等於單元 dS 的面積，而方向與對於這個單元所確定的法線方向相同。**在封閉曲面的情形下，我們限制取向外的法線方向作這樣的方向，而對於向內的法線，將寫成 (n_1) 以替代 (n)。

向量 $d\boldsymbol{S}$ 在坐標軸上的投影給出曲面單元在對應的坐標面上的投影，帶有正號或負號要看 (n) 與坐標軸作成的角是銳角或是鈍角。

設 $f(M)$ 是某一個數量函數，而 $\boldsymbol{A}(M)$ 是一個向量，它們都確定於曲面 (S) 上。作出表達式：

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\, d\boldsymbol{S} \tag{49}$$

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{A}(M)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{49_1}$$

$$\iint\limits_{(S)} A(M)\times d\boldsymbol{S}. \tag{49$_2$}$$

其中第一個是個向量，它的支量是:

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\cos(n,X)dS;\quad \iint\limits_{(S)} f(M)\cos(n,Y)dS$$

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\cos(n,Z)dS.$$

表達式 (49$_1$) 是個數量

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{A}_n\, dS,$$

最後，表達式 (49$_2$) 是個向量，具有支量

$$\iint\limits_{(S)} [A_y\cos(n,Z)-A_z\cos(n,Y)]\,dS$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_z\cos(n,X)-A_x\cos(n,Z)]\,dS$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_x\cos(n,Y)-A_y\cos(n,X)]\,dS.$$

設 (S) 是一個封閉曲面，而容積 (v) 以它爲界，並且 $f(M)$ 與 $A(M)$ 確定於這整個容積上。利用奧斯特洛格拉得斯基公式，不難推出下面三個等式:

$$\iint\limits_{(S)} f d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{v} \operatorname{grad} f\, dv \tag{50}$$

$$\iint\limits_{(S)} A\cdot dS=\iiint\limits_{v} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dv \tag{50$_1$}$$

$$(50_2)\qquad \iint\limits_{(S)} \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S} = -\iiint\limits_{(v)} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, dv.$$

等式 (50_1) 與公式 (37) 相同。還要驗證等式(50_2)。左右兩邊沿 OX 軸的支量各由下面的積分表達：

$$\iint\limits_{(S)} [A_Y \cos(n,Z) - A_z \cos(n,Y)]\, dS;\quad -\iiint\limits_{v} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z}\right) dv,$$

它們的大小相等，這由關於三重積分的奧斯特洛格拉得斯基公式不難肯定。

完全類似，利用司鐸克斯公式與定向曲面單元，可以寫出下面的公式：

$$(51)\qquad \int\limits_{(l)} f d\boldsymbol{s} = -\iint\limits_{(S)} \operatorname{grad} f \times d\boldsymbol{S}$$

$$(51_1)\qquad \int\limits_{(l)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

這裏 (S) 是某一個曲面，(l) 是它的界線。其中第二個公式與公式 (41) 一致，因爲根據數量積的定義 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \operatorname{rot}_n \boldsymbol{A} dS$. 對於公式 (51)，左右兩邊在 OX 軸上的支量各爲：

$$\int\limits_{(l)} f dx;\quad -\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,Z) - \frac{\partial f}{\partial z}\cos(n,Y)\right] dS;$$

利用 [70] 中公式，(22)，不難證明，這兩個表達式相等。

112. 向量分析中幾個公式 現在講幾個與我們所講的向量運算有連繫的關係式。在 [110] 我們看到，勢量場的旋轉量等於零：

$$(52)\qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0.$$

不難驗證，旋轉量的場的發散量等於零，就是

$$(53)\qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0.$$

實際上:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0$$

再考慮勢量場的發散量:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{grad}_x U+\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{grad}_y U+\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{grad}_z U$$

或

(54) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

求微商的運算

(55) $$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

叫做拉普拉斯運算。由(54)的左邊看出，它不依賴於坐標軸的選擇。應用公式(38)於向量 $\operatorname{grad}U$，得到在點 $M\Delta U$ 的定義

(56) $$\Delta U=\lim_{(v_1)\to M}\frac{\displaystyle\iint_{(S_1)}\frac{\partial U}{\partial n}dS}{v_1}.$$

當 U 是數量的情形，我們確定了 ΔU。若 $\boldsymbol{A}$ 是一個向量，就用記號 $\Delta\boldsymbol{A}$ 來記一個向量，它的支量是 ΔA_x，ΔA_y，ΔA_z。我們再提出下面幾個公式:

(57) $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A},$$

(57_1) $$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})=f\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}f\cdot\boldsymbol{A},$$

(57_2) $$\operatorname{div}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\operatorname{rot}\boldsymbol{B},$$

(57_3) $$\operatorname{rot}f\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}f\times\boldsymbol{A}+f\operatorname{rot}\boldsymbol{A},$$

(57_4) $$\Delta(\varphi\psi)=\psi\Delta\varphi+\varphi\Delta\psi+2\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi.$$

我們只驗證其中第一個公式，其餘的請讀者自己驗證，取出(57)

左邊的向量沿 OX 軸的支量，我們來證明它與右邊的向量的支量一致:

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

由此，展開括號再加減 $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$,

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta A_x,$$

於是證完。在這裏我們提出，由公式 (57) 推知 $\Delta \boldsymbol{A}$ 不依賴於軸的選擇，因爲

$$\Delta \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

113.剛體的運動及微小形變　在 [106] 中我們看到，當剛體繞一點 O 轉動時，任何點的速度由公式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

來表達，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是瞬時角速度向量，$\boldsymbol{r}$ 是向量半徑 $\overline{OM}$.

再加上具有速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的平移運動，就得到剛體運動的一般情形，這時全速度由公式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{58}$$

來表達。

現在反過來由給定的速度場 $\boldsymbol{v}$ 求角速度向量。首先我們注意，在給定的時刻，對於剛體上所有的點，向量 $\boldsymbol{v}_0$ 是一樣的，所以它不依賴於 (x, y, z)。依照公式 (40) 我們有 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_0 = 0$.

設對於原點在 O 的坐標軸來講，$\boldsymbol{\omega}$ 的支量是 p, q, r. 向量積 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 的支量就是；$qz - ry$; $rx - pz$; $py - qx$; 於是依照 (40)，$\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 的支量是 $2p, 2q, 2r$，所以可以通過 $\boldsymbol{v}$ 來表達角速度向量如下:

(59) $$\boldsymbol{o} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

由此所以叫做向量 rot $\boldsymbol{v}$ 是速度向量的旋轉量。

若速度向量 $\boldsymbol{v}$ 乘以一個量 dt， dt 是一個微小的時間區間，則得到一個向量 $\boldsymbol{v}\,dt$，它近似的給出在微小的時間區間中點的位移。如此，得到剛體上點的微小位移向量場：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}\,dt.$$

回到公式(58)並且算作沒有移動，就是說，點 O 是固定住的，對於位移向量，我們得到下面的公式：

(60) $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}_1 \times \boldsymbol{r},$$

其中$\boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}\,dt$ 是一個微小的向量，方向沿轉動軸的方向，而大小等於在時間區間 dt 中所轉的微小角度。設 p_1, q_1, r_1 是這個向量的支量，(x,y,z) 是剛體上變點的坐標。向量 $\boldsymbol{A}$ 的支量就是：

$$A_x = p_1z - r_1y;\quad A_y = r_1x - p_1z;\quad A_z = p_1y - q_1x.$$

像上面一樣，由此不難通過位移向量來表達微小轉動向量

(61) $$\boldsymbol{o}_1 = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

此外，後一個公式說明，向量 $\boldsymbol{A}$ 的支量是坐標(x, y, z)的線性齊次函數。

現在考慮線性齊次形變的一般情形，這時位移向量的支量是坐標的線性齊次函數：

(62) $$\begin{aligned} A_x &= a_1x + b_1y + c_1z \\ A_y &= a_2x + b_2y + c_2z \\ A_z &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}$$

我們算作係數 a, b 與 c 很小，並且我們只限於考慮坐標原點附近的微小容積 (v)。這個容積中任何點的位移是一個向量$\boldsymbol{A}$，於是變換後它們的新坐標是：

$$\xi = x + A_x;\quad \eta = y + A_y;\quad \zeta = z + A_z,$$

就是

(63) $$\begin{aligned} \xi &= (1+a_1)x + b_1y + c_1z \\ \eta &= a_2x + (1+b_2)y + c_2z \\ \zeta &= a_3x + b_3y + (1+c_3)z. \end{aligned}$$

只是在特殊情形下這樣的變換才是容積 (v) 像整個一個剛體是的繞着 O 旋轉。在一般情形下，將連繫有這個容積的形變，就是說，它的點與點之間的距離有改變。現在我們仔細講講這種情況。

依照(62)，位移向量$\boldsymbol{A}$的旋轉量的支量是：b_3-c_2；c_1-a_3；a_2-b_1。若變換是基本容積作爲一個整體的轉動，則我們得到位移向量$\boldsymbol{A}^{(1)}$具有支量

$$A_x^{(1)}=\frac{1}{2}(c_1-a_3)z-\frac{1}{2}(a_2-b_1)y;\quad A_y^{(1)}=\frac{1}{2}(a_2-b_1)x-\frac{1}{2}(b_3-c_2)z;$$

$$A_z^{(1)}=\frac{1}{2}(b_3-c_2)y-\frac{1}{2}(c_1-a_3)x.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 減掉這個向量，把 $\boldsymbol{A}$ 表示成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}, \tag{64}$$

其中純形變向量 $A^{(2)}$ 具有支量：

$$\begin{aligned} A_x^{(2)}&=a_1x+\frac{1}{2}(b_1+a_2)y+\frac{1}{2}(c_1+a_3)z;\\ A_y^{(2)}&=\frac{1}{2}(b_1+a_2)x+b_2y+\frac{1}{2}(c_2+b_3)z;\\ A_z^{(2)}&=\frac{1}{2}(c_1+a_3)x+\frac{1}{2}(c_2+b_3)y+c_3z.\end{aligned}\tag{65}$$

不難看出，這個向量是勢量向量，而有：

$$\boldsymbol{A}^{(2)}=\operatorname{grad}\left[a_1x^2+b_2y^2+c_3z^2+(b_1+a_2)xy+(c_1+a_3)xz+(c_2+b_3)yz\right],$$

於是顯然這個向量的旋轉量是零。

現在我們來確定，由於形變的結果，基本容積的改變情形。形變後新的容積由下面這積分來表達

$$v_1=\iiint\limits_{(v)}d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

依照[60]中的公式來替換變量，應當換成

$$d\xi d\eta d\zeta=\{(1+a_1)[(1+b_2)(1+c_3)-c_2b_3]+b_1[c_2a_3-a_2(1+c_3)]+$$
$$+c_1[a_2b_3-a_3(1+b_2)]\}dx\,dy\,dz.$$

去掉括號，只保留自由項與微小係數 a, b, c 的一次項，得到：

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = [1+(a_1+b_2+c_3)]\, dx\, dy\, dz,$$

於是上面的公式給出

$$v_1 = \iiint_{(v)} [1+(a_1+b_2+c_3)]\, dx\, dy\, dz = v+(a_1+b_2+c_3)v,$$

其中 v 是受形變的容積的大小。容積改變係數就是

$$\frac{v_1-v}{v} = a_1+b_2+c_3,$$

根據(62)不難看出，右邊的和是 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，就是說，位移場的發散量給出容積改變係數。

114. 連續性方程　設用 $\boldsymbol{v}$ 記流體流動的速度。我們計算流體穿過給定的曲面 (S) 的量（圖 96）。設 dS 是微小的曲面單元。在時刻 t 位於 dS 上的流體粒子，在時間區間 dt 中移動一個線段 $\boldsymbol{v}\,dt$，如此，在這個時間區間中穿過 dS 的流體的量 dQ，就佔有以 dS 為底母線為 $\boldsymbol{v}\,dt$ 的柱體的容積。這個柱體的高顯然等於 $v_n dt$，其中 v_n 是 $\boldsymbol{v}$ 在曲面的法線 (n) 上的投影，所以

$$dQ = \rho\, v_n\, dt\, dS,$$

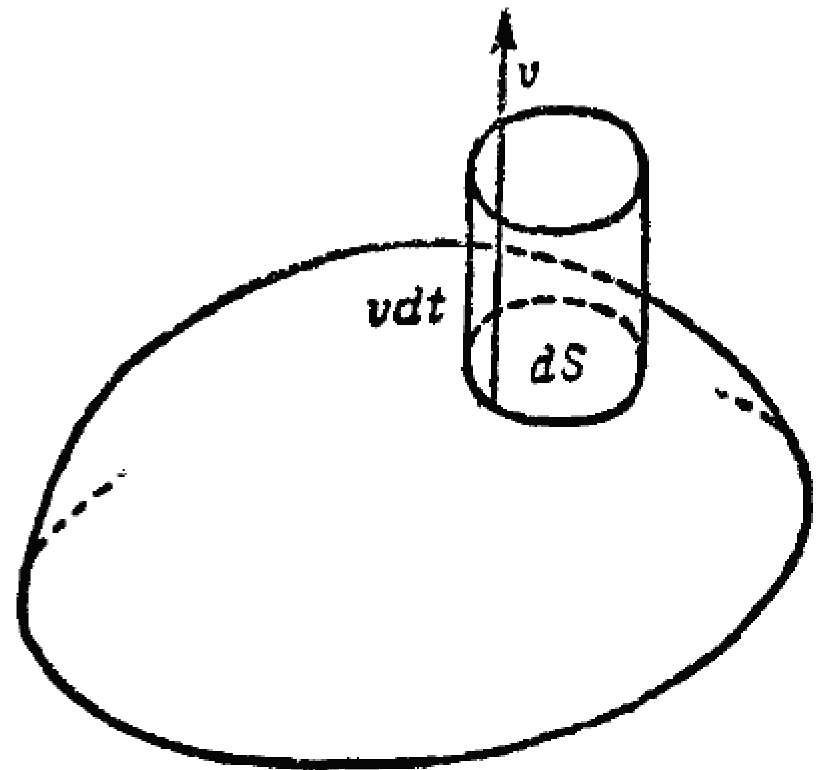


圖 96

其中 ρ 是流體的密度，若角度 $(n, \boldsymbol{v})$ 是鈍角，則 dQ 的量得到負值。在封閉曲面的情形，法線 (n) 取曲面的向外的法線的方向，於是，若流體流入以通過 dS 的這個曲面為界的容積中，則 dQ 這個量取負值。對單位時間來講，穿出曲面的流體的總量就是：

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n\, dS, \tag{66}$$

這裏，用這個公式計算時，流入的流體具有負號。

佔有以 (S) 爲界的容積 (v) 的流體的量，由下面的積分來表達

$$\iiint_{(v)} \rho\, dv,$$

在時間 dt 中這個量的改變量是

$$dt \iiint_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv,$$

所以就單位時間來講，流體的量的改變量是

$$\iiint_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv,$$

而穿出的流體的量也由這個積分來表達，不過帶有相反的符號，於是對於 Q 我們得到兩個表達式：

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n dS = -\iiint_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv,$$

或者，依照公式(37)：

$$Q = \iiint_{(v)} \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, dv = -\iiint_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv,$$

這裏我們把密度 ρ 保留在發散量的記號之下，因爲它可以是變量，就是說，它可能是依賴於點的位置的。後面這個公式給我們一個關係式，這個關係式對於流體內部的任何容積都是正確的：

$$\iiint_{(v)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \right] dv = 0.$$

由此推知，被積函數應當恒等於零[1]，於是我們得到：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{67}$$

---

[1] 在[71]中我們證明過，若二重積分沿任何區域都等於零，則被積函數應當恒等於零。同樣的證明適用於三重積分的情形。

隨意什麼流體流動時，無論是可壓縮的或是不可壓縮的，密度與速度總由這個關係式連繫着，這個很重要的關係式叫做連續性方程。如果我們計算一下在時刻 t 佔有位置 (x,y,z) 的流體的密度的改變，就可以把關係式 (67) 換一個寫法。

$\rho(t, x, y, z)$ 是在時刻 t 在點 (x, y, z) 的流體的密度。考慮某一流體粒子的密度的改變。當這一個粒子運動時，密度不但直接依賴於 t，並且間接通過中間變量 (x, y, z) 依賴於 t，因爲這個粒子運動時，它的坐標要改變。ρ 對 t 的全微商就是:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

它可以寫成:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}v_x+\frac{\partial\rho}{\partial y}v_y+\frac{\partial\rho}{\partial z}v_z,$$

或

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v}. \tag{68}$$

利用 (57_1)，我們可以把等式 (67) 寫成:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,$$

根據 (68)，就是

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{69}$$

由此

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

如此，速度場 $\boldsymbol{v}$ 的發散量，給出在給定位置流體單元的密度的相對改

變量。——關於單位時間的改變量。

若流體不可壓縮，則這個改變量應當等於零，於是我們由(69)得到不可壓縮的條件：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{70}$$

我們通過用兩個方法來計算由容積中穿出的流體的量，引進了連續性方程。這時自然假設在這容積中沒有源泉，無論是正的還是負的(吸吮)。

若流體的流動沒有旋流，或者換句話說，它是勢量的，就是說，向量 $\boldsymbol{v}$ 是勢量的向量

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

則 φ 叫做速度勢。代入到方程(70)中，得到：

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \text{ 就是 } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{71}$$

就是說，**對於不可壓縮流體的情形，速度勢應當滿足於拉普斯方程**(71)。

115. 理想流體的流體動力方程　所謂理想流體意思是指這樣的分散的緊密的介質，無論它是在平衡狀態或是運動狀態，在其中出現的內力是法線壓力，於是若由這介質中分出某一界於曲面 (S) 的容積 (v)，則介質的其餘部分在其上的作用力的方向沿曲面 (S) 上每一點的向內的法線方向。我們把對於單位面積來講這個力(壓力)的大小記作 p。在每一給定的時刻，壓力 $p(M)$ 給出某一個數量場。根據(50)在容積 (v) 的表面上的壓力的合力由下面的積分來表達：

$$-\iint_{(S)} p\, d\boldsymbol{S} = -\iiint_{(v)} \operatorname{grad} \boldsymbol{p}\, dv,$$

其中用(—)號是因爲正的壓力作用在向內的法線方向，而由條件向量 $d\boldsymbol{S}$ 沿向外的法線方向。

應用達郎倍爾原理，應當有向外的力以平衡這個壓力，我們把對於單位質量來講的向外的力記作 $\boldsymbol{F}$，它在容積 (v) 上給出合力

$$\iiint\limits_{(v)} \rho \boldsymbol{F} dv,$$

最後，在質量單元上的慣性力是 $\rho\, dv\, \boldsymbol{W}$，其中 ρ 是密度，$\boldsymbol{W}$ 是流體粒子的加速度向量。在容積 (v) 上慣性力是

$$-\iiint\limits_{(v)} \rho \boldsymbol{W} dv.$$

所以，依照達郎倍爾原理，我們應當有

$$\iiint\limits_{(v)} [\rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p - \rho \boldsymbol{W}]\, dv = 0,$$

由此，像以前一樣，根據 (v) 的任意性，可以斷定被積函數等於零，於是這時得到：

$$\rho \boldsymbol{W} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} \boldsymbol{p}. \tag{72}$$

這個公式包含有三個方程，它們是理想流體的基本流體動力方程。

設 u, v, w 是速度向量的支量，而是用點的坐標 (x, y, z) 以及時間 t 的函數來表達的。加速度向量 $\boldsymbol{W}$ 沿 OX 軸的支量就等於速度向量的支量 $u(t, x, y, z)$ 對時間的全微商，於是我們可以寫成：

$$W_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

或

$$W_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

同理

$$W_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w$$

$$W_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w$$

如此，向量方程(72)化爲三個方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(73)\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w=F_y-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w=F_z-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z}$$

這叫做流體動力方程的尤拉形式。對於這些方程，需要再結合上前一段所講的連續性方程。利用這一段中的記號，方程(69)可以寫成:

$$(74)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial x}u+\frac{\partial \rho}{\partial y}v+\frac{\partial \rho}{\partial z}w+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

所寫的這些方程的突出的特點在於這樣一種情況，就是我們討論運動時，選擇了空間的點的坐標(x,y,z)以及時間t作自變量。在某些情形下，我們選擇在開始時刻時流體粒子的位置的坐標作自變量以替代空間的點的坐標(x,y,z)。當這樣選擇自變量時，流體動力方程自然要換了樣子。

116.聲的傳播方程 方程(72)與(73)，不僅當流體這個字取狹義的字面意義時成立，對於氣體也成立。只要假設內力只是壓力就成。我們算作運動是如此的微小，使得在方程(73)的左邊可以忽略掉含有速度的支量與它們對坐標的微商之乘積的各項。這時，方程(73)可以寫成:

$$(75)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=F_x-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x}\quad \frac{\partial v}{\partial t}=F_y-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial y}\quad \frac{\partial w}{\partial t}=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}$$

或者，寫成向量形式:

$$(76)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\boldsymbol{p}$$

同樣，在方程(74)中去掉含有速度的支量與密度對坐標的微商之乘積的各項，得到:

$$(77)\qquad \frac{\partial p}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.$$

設ρ_0是介質在靜止狀態的常密度。引用一個小的量s來表示運動時密度的相對改變量，由下面這等式來確定

$$\rho=\rho_0(1+s)$$

由此

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{ds}{1+s}\sim ds$$

這裏在分母$(1+s)$中我們忽略了小的量s。根據所寫的，可以算作$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$，於是等式(77)給出

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\operatorname{div}\boldsymbol{v} \tag{78}$$

可以算作壓力的梯度與表現壓縮或膨脹的量s的梯度成比例，就是

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{p}=e\operatorname{grad}\boldsymbol{s},$$

其中e是介質的彈性係數。代入到方程(76)中並在這個方程中算作$\rho=\rho_0$，就得到：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{t}}=\boldsymbol{F}-\frac{e}{\rho_0}\operatorname{grad} s.$$

取這等式兩邊的發散量，得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{div}\boldsymbol{F}-\frac{e}{\rho_0}\operatorname{div}\operatorname{grad} s.$$

注意(78)，可以把這個方程寫成：

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\Delta s-\operatorname{div}\boldsymbol{F}\qquad \left(a=\sqrt{\frac{e}{\rho_0}}\right) \tag{79}$$

量s是時間與點的坐標的函數，它應當滿足這個方程。注意，當計算微商$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$的發散量時，我們把對$t$求微商的運算與求發散量的運算換了順序，可以這樣換是因爲求微商的結果不依賴於求微商的順序。

若沒有外力，則方程(79)是

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\Delta s\qquad \left(a=\sqrt{\frac{e}{\rho_0}}\right) \tag{80}$$

方程(80)通常叫做波動方程，回憶量s是表現壓縮或膨脹的量，我們可以說，在這情形下，這個方程給出聲的傳播律。$\operatorname{div}\boldsymbol{F}$不等於零的一部分空間就是聲源。

117.熱傳導方程 在[108]中我們講過，在時間dt通過曲面單元ds的熱量，由下面這等式表達：

$$dQ=k\,dt\,dS\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|=k\,dt\,dS\left|\operatorname{grad}_n U(M)\right|,$$

其中k是熱的內傳導係數，U是溫度，(n)是dS的法線的方向。考

慮一個封閉曲面 (S)，它是容積 (v) 的界面，我們來計算通過 (S) 的全部熱量。不難得到：

(81) $$Q=-dt\iint_{(s)}k\,\mathrm{grad}_n U\,dS.$$

這時，若在向外的法線方向 (n)，溫度下降，則 $\frac{\partial U}{\partial n}<0$，於是對應的積分單元是負的，而當溫度上升時，則相反。注意，熱流向溫度下降的方向流而且(81)的右邊有(－)號，可以肯定，Q 是在時間區間 dt 中由容積 (v) 給出的熱量。由公式 (81) 計算時，流入 (v) 的熱量，帶有(－)號。

給出的熱量也可以用另一個方法來計算，就是注意容積內溫度的改變。考慮容積單元 dv。在時間區間 dt 這個單元的溫度上升 dU 時，吸收的熱量應當與上升的溫度及單元的質量成比例，就是說，吸收的熱量是

$$\gamma dU\cdot\rho dv=\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dt\,dv,$$

其中 ρ 是物質的密度，γ 是比例係數，它叫做物質的熱容量。如此，全部容積給出的熱量由下面這公式來表達

$$Q=-dt\iiint_{(v)}\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dv,$$

這裏我們取（－）號是因為要計算給出的熱量，而不是得到的熱量。

讓所得到的關於 Q 的兩個表達式相等，再應用［109］中公式 (37)，就有

(82) $$\iiint_{(v)}\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dv=\iiint_{(v)}\mathrm{div}(k\,\mathbf{grad}\,U)dv,$$

就是說，對於任意的容積，下面這關係式應當成立

$$\iiint\limits_{(v)}\left[\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)\right]dv=0,$$

由此，我們得到熱傳導的微分方程:

(83) $$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)$$

或

(83_1) $$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

在所考慮的物體內部的所有的點，應當都滿足這個方程。溫度 U 依賴於點的坐標以及時間。

若是均勻物體，則 γ,ρ 與 k 都是常量，於是方程（83）可以寫成

(84) $$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta U \qquad \left(a=\sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}\right).$$

或

(84_1) $$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$$

若熱流是穩定的，就是說，溫度不依賴於時間 t，而只依賴於坐標(x,y,z)，則方程 (84) 可以寫成:

(85) $$\Delta U=0;\ \text{就是}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

如此，在穩定的熱流過程中，對於溫度，我們得到拉普拉斯方程，以前我們已經遇到過這個方程 [87 與 114]。

當推求熱傳導方程 (83) 時，我們假定了，在考慮的物體中沒有熱源，在相反的情形下，應當用另一個等式來替代等式（82），那就是

$$\iiint\limits_{(v)} \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dv=\iiint\limits_{(v)}\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)dv+\iiint\limits_{(v)} edv,$$

其中右邊最後一項表示在容積 (v) 中放出的熱量，這裏所計算的這個熱量是對單位時間來講的。

被積函數 $e(t, M)$ 給出連續的分佈在容積 (v) 中的熱源的强度，這個函數依賴於點 M 的位置，也可以依賴於時間。這時，替代熱傳導方程 (83)，我們就得到下面形狀的方程

$$\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)+e, \tag{86}$$

或者，在均勻物體的情形，替代方程 (84) 我們有

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta U+\frac{1}{\gamma\rho}e. \tag{87}$$

方程 (87) 與 (84)類似於 [116]中的方程 (79) 與(80)。在熱傳導方程中出現有熱源就類似於出現有外力，或者嚴格說來，就是聲源——在聲的傳播方程中的 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$。無論那個情況都使得微分方程(79)與 (87) 是非齊次的，就是，方程 (79) 與 (87) 中，除去含有未知函數 s 或 U 的項之外，還含有自由項 $-\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ 與 e，它們需要算作是已知的函數。還要注意，方程 (84) 與 (80) 是有區別的。方程 (80) 含有未知函數對時間的二級微商，而在方程 (84) 中含有未知函數對時間的一級微商。求這些方程的積分時，這個情况是很重要的。

118. 馬克士威方程 考慮電磁場時，出現有下列的向量：$\boldsymbol{E}$ 與 $\boldsymbol{H}$——電力向量與磁力向量；$\boldsymbol{r}$——全電流向量；$\boldsymbol{D}$——位移電流向量；$\boldsymbol{B}$ 磁感强度向量。電力學中的兩個基本定律是彼歐——薩瓦爾定律與法拉第定律，可以寫成下面的形狀：

$$\int\limits_{(l)} H_s ds=\frac{1}{c}\iint\limits_{(S)} r_n dS \tag{88}$$

$$\int\limits_{(l)} E_s ds=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} B_n dS, \tag{89}$$

其中 c 是眞空中的光速。

第一個方程連繫着磁力向量沿某一曲面的界線的循環量與全電流向量通過這曲面的流量。第二個方程連繫着電力向量的循環量與磁感强度通過這曲面的流量對時間的微商。在所寫的方程中，(l) 是任意的一條封閉界線，(S) 是以它爲界的一個曲面。此外，在各向同性的均勻介質中，向量 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 與向量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 具有連繫

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}，\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

其中 ε 與 μ 是常量，它們各叫做介質的電容率與磁導率。全電流向量由兩項組成——傳導電流與位移電流：

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

其中 λ 是介質的電導係數。如此，方程 (88)，(89) 結果就取下面的形狀

$$(90_1)\qquad \int\limits_{(l)}H_s ds=\frac{1}{c}\iint\limits_{(S)}\left(\lambda E_n+\varepsilon\frac{\partial E_n}{\partial t}\right)dS$$

$$(90_2)\qquad \int\limits_{(l)}E_s ds=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)}\mu H_n dS.$$

這兩個等式左邊的積分可以依照司鐸克斯公式化爲沿曲面的積分：

$$\iint\limits_{(S)}\mathrm{rot}_n\boldsymbol{H}dS \text{ 與 } \iint\limits_{(S)}\mathrm{rot}_n\boldsymbol{E}dS,$$

於是方程可以寫成下面的形狀：

$$\iint\limits_{(S)}\left[c\,\mathrm{rot}_n H-\left(\lambda E_n+\varepsilon\frac{\partial E_n}{\partial t}\right)\right]dS=0$$

$$\iint\limits_{(S)}\left[c\,\mathrm{rot}_n E+\mu\frac{\partial H_n}{\partial t}\right]dS=0$$

由於曲面 (S) 的任意性，以及法線 (n) 的方向的任意性，由最後兩個公式推出：

$$(91_1)\qquad c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$(91_2)\qquad c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

這兩個方程表示出微分方程形式的馬克士威方程。這裏我們有六個微分方程，含有六個支量

$$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z.$$

由方程(91₁)與(92₂)，直接推知，在考慮的情形下，向量

$$\lambda E + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \text{與} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

是管量的，因爲根據(91₁)與(91₂)，它們的發散量等於發散量

$$c\,\mathrm{div\ rot}\,\boldsymbol{H} \text{與} c\ \mathrm{div\ rot}\,\boldsymbol{E}$$

於是推知，它們等於零〔112〕。

還可以證明，若在某一部分空間，$\boldsymbol{E}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 在開始的時刻是管量的，則它們是管量的。

我們先來證明這個肯定，引用兩個量

$$\mathrm{div}\ \varepsilon\boldsymbol{E} = \rho_e = \rho;\quad \mathrm{div}\,\mu\boldsymbol{H} = \rho_m, \tag{92}$$

它們各叫做電荷密度與磁荷密度。由方程

$$\mathrm{div}\left(\lambda\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \frac{\lambda}{\varepsilon}\,\mathrm{div}\ \varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0$$

推知

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

求這個一級線性方程的積分，得到〔4〕

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}$$

其中 ϱ_0 是當 $t=0$ 時 ϱ 的值。於是，若在開始的時刻我們有 $\varrho_0=0$，就是說

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{E}_0 = 0,$$

則對於 t 的任何值，$\varrho=0$，就是

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{E} = 0.$$

同樣由方程(91₂)推知

$$\mathrm{div}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\ \boldsymbol{H} = 0,$$

於是若 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{H}_0=0$，則對於 t 的任何值，$\mathrm{div}\ \boldsymbol{H}=0$。

最後的方程相當於磁荷等於零的條件，通常假設是如此的。

由馬克士威方程可以推出另外的方程，在其中，向量 $\boldsymbol{E}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 分開。求方程 (91_2) 兩邊的旋轉量，就有

$$-c\,\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=\mu\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}}{\partial t},$$

或，根據公式 (57_1) 與方程 (91_1)，

$$c(\Delta\boldsymbol{E}-\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E})=\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\lambda\boldsymbol{E}\right),$$

由此得到結果

$$(93)\qquad \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}(\Delta\boldsymbol{E}-\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}).$$

同樣可以得到對於向量 $\boldsymbol{H}$ 的方程。

沒有電荷時，就是當 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0$ 的情形，方程 (93) 可以寫成下面的形狀

$$(94)\qquad \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{E}.$$

這個方程通常叫做電報方程，因為它首先是由於研究電纜上電流的分佈得到的。最後，若電介質是理想的，就是不導電的，則 $\lambda=0$，於是方程 (94) 是:

$$(95)\qquad \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=a^2\Delta\boldsymbol{E}\qquad\left(a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right).$$

具有在 [116] 中我們已經遇到的方程的形狀。

若是穩定過程，就是說，向量 $\boldsymbol{E}$ 與 $\boldsymbol{H}$ 不依賴於 t，則方程 (91_2) 給出 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0$，就是，$\boldsymbol{E}$ 是勢量的向量: $\boldsymbol{E}=\mathrm{grad}\varphi$，由方程 (92) 中第一個給出:

$$(96)\qquad \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}\ \text{或}\ \Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

在 $\rho=0$ 的情形，就是沒有電荷的情形，對於 φ 得到拉普拉斯方程 $\Delta\varphi=0$。

119. 拉普拉斯運算子在正交坐標系的表達式 在 [60] 中我們考慮過空間的任何曲線坐標。現在我們考慮這樣的坐標的一種特殊情形，就是，容積單元，表示成如 [60] 中所講的平行六面體的形狀時，是長方體的情形。這種正交的曲線坐標的情形非常重要，並且在應用

中也總會遇到。

設在空間引用三個新的變量 q_1,q_2,q_3 來替代笛卡兒坐標 x,y,z：

$$\varphi(x,y,z)=q_1;\quad \psi(x,y,z)=q_2;\quad \omega(x,y,z)=q_3 \tag{97}$$

或者寫成解出 x,y,z 的形式:

$$x=\varphi_1(q_1,q_2,q_3);\quad y=\psi_1(q_1,q_2,q_3);\quad z=\omega_1(q_1,q_2,q_3). \tag{98}$$

給新變量 q_1,q_2 與 q_3 以常數值 A, B, C, 就得到三族曲坐標面。這些新的曲坐標面在坐標系 x,y,z 中的方程是:

$$\varphi(x,y,x)=A\ (\mathrm{I});\quad \psi(x,y,z)=B\ (\mathrm{II});\quad \omega(x,y,z)=C\ (\mathrm{III}) \tag{99}$$

由不同的族中取出任何兩個曲坐標面，例如，由族(II)與(III)中各取一個。它們相交於某一條線，這條線的方程是:

$$\psi(x,y,z)=B_0;\quad \omega(x,y,z)=C_0,$$

其中 B_0 與 C_0 是確定的常數。沿這條線只是 q_1 在改變，這樣的線可以叫做**坐標線** q_1。由類似的方式可以得到坐標線 q_2 與 q_3.

在新的坐標系下，我們來計算弧單元的平方:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2+$$

(100)

$$+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2.$$

去掉括號，得到 dq_1, dq_2, dq_3 的二次齊次多項式。我們求在什麼條件下這個多項式不含有不同的微分 dq 的乘積的項。

例如，考慮表達式(100)中含有乘積 $dq_1\,dq_2$ 的項。這樣的乘積的係數是

$$2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}+\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right). \tag{101}$$

在新的坐標系中，容積單元界於三對曲坐標面（圖97），它的基本頂點 A，對應於新的坐標的值是 q_1,q_2,q_3，由這點引出三個邊 AB，

AC 與 AD。沿 AB 邊只是 q_1 改變，沿 AC 邊只是 q_2 改變，沿 AD 邊只是 q_3 改變。考慮第一與第二個邊。在第一個邊上，函數 (98) 只是 q_1的函數，而且它的切線的方向餘弦與

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1},\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}$$

成比例。

同理，第二個邊的切線的方向餘弦與

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2},\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}$$

成比例。

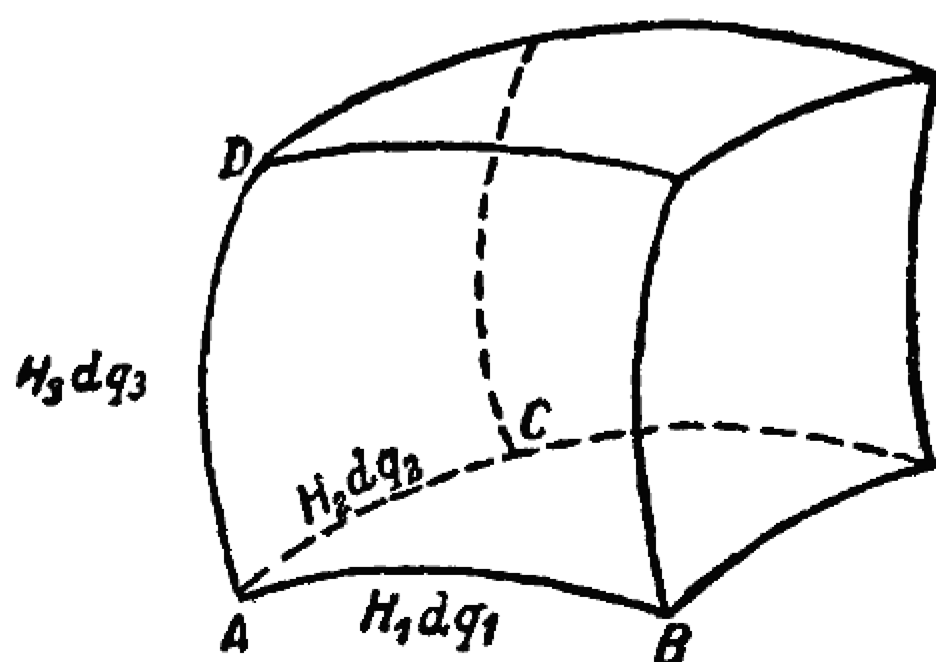


圖 97

如此，讓表達式 (101) 等於零就相當於需要所考慮的兩個邊垂直。若要使得表達式 (100) 中 $dq_1\,dq_2$ 與 $dq_2\,dq_3$ 的係數都是零，就相當於需要在新的坐標中容積單元的三個邊互相垂直。如此，**曲線坐標系正交的必要且充分條件是使得表達式 ds^2 只含有微分的平方項，就是只含有帶 dq_1^2，dq_2^2、dq_3^2 的項。**

以下我們算作曲線坐標是正交的。

這時，對於 ds^2 得到表達式：

$$ds^2 = H_1^2\,dq_1^2 + H_2^2\,dq_2^2 + H_3\,dy_3^2. \tag{102}$$

其中

$$\begin{cases} H_1^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right)^2 \\ H_2^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right)^2 \\ H_3^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right)^2 \end{cases} \tag{103}$$

注意，沿容積單元的每一邊，只有一個變量改變，依照公式(102)，我們得到這些邊的長度。

(104) $ds_1=H_1dq_1;\ ds_2=H_2dq_2;\ ds_3=H_3dq_3,$

於是在新的坐標系中，容積單元就由下面的公式來表達：

(105) $dv=ds_1ds_2ds_3=H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3.$

現在設在空間有一個向量場 $\boldsymbol{A}$. 我們知道，在某一點 M 這個場的發散量由下面的公式表達[190]

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{(v_1)\to M}\frac{\iint\limits_{(S_1)}A_ndS}{v_1},$$

其中(S)是含有點 M 而且縮向這個點的某容積(v_1)的界面，而 v_1 是這容積的大小。我們應用這個公式於曲坐標系 q_1,q_2,q_3 中的容積單元，來確定這個場通過這容積的界面的流量。先確定通過左右兩個面的流量。在基本頂點 A 曲坐標的值是 q_1,q_2,q_3，而在左面上需要用 q_1+dq_1 來替代 q_1，此外，在右面上向外的法線的方向與曲坐標線 q_1 的方向一致，而在左面上方向相反。如此，在右面上沿向外的法線的支量 A_n 就是 A_{q1}，而在左面上它是$(-A_{q1})$。由於界面很小，沿這樣的界面的曲面積分 $\iint A_ndS$ 可以用被積函數與對應的界面面積的乘積來替代，如此，對於左右兩面的流量，我們得到表達式

$$A_{q1}ds_2ds_3\,|_{q1+dq1}\text{與}-A_{q1}ds_2ds_3\,|_{q1},$$

而通過這兩塊界面的流量就是

$$A_{q1}ds_2ds_3\,|_{q1+dq1}-A_{q1}ds_2ds_3\,|_{q1}.$$

或者，依照公式(104)：

$$A_{q1}H_2H_3dq_2dq_3\,|_{q1+dq1}-A_{q1}H_2H_3dq_2dq_3\,|_{q1}$$
$$=[H_2H_3A_{q1}\,|_{q1+dq1}-H_2H_3A_{q1}\,|_{q1}]dq_2dq_3.$$

用函數的微分來替代它的改變量，結果得到通過左右兩面的流量的表達式：

$$\frac{\partial(H_2H_3A_{q1})}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3.$$

同理通過前後兩面的流量是：

$$\frac{\partial(H_3H_1A_{q2})}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3,$$

而且通過上下兩面的流量是

$$\frac{\partial(H_1H_2A_{q3})}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3.$$

由所得到的三個表達式相加，再用公式（105）中得到的容積單元的大小去除，就求出在正交曲坐標系中發散量的表達式

$$(106)\quad \operatorname{div} A=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3A_{q1})}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_3H_1A_{q2})}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2A_{q3})}{\partial q_3}\right].$$

現在設場 A 是勢量場，也就是某一個函數 $U(M)$ 的梯度場，$A=\operatorname{grad} U$.

在這情形下，場的支量 A_{q1} 是函數 U 沿方向 q_1 的微商：

$$A_{q1}=\lim_{\Delta s_1\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta s_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1},$$

並且完全類似的：

$$A_{q2}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2},\quad A_{q3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

代入這些表達式到公式（106）中，就得到在正交曲坐標中拉普拉斯運算子的表達式：

$$(107)\quad \Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad} U=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)\right].$$

在坐標 q_1, q_2, q_3 中，拉普拉斯方程 $\Delta U=0$ 就化爲下面的形式：

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)=0. \tag{108}$$

1.球面坐標 在球面坐標的情形，公式(98)有下面的形狀[59]：

$$x=r\sin\theta\cos\varphi;\quad y=r\sin\theta\sin\varphi;\quad z=r\cos\theta,$$

這裏 $q_1=r, q_2=\theta, q_3=\varphi$. 計算 ds^2：

$$\begin{aligned} ds^2=&(\sin\theta\cos\varphi dr+r\cos\theta\cos\varphi d\theta-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi)^2\\ &+(\sin\theta\sin\varphi dr+r\cos\theta\sin\varphi d\theta+r\sin\theta\cos\varphi d\varphi)^2\\ &+(\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)^2, \end{aligned}$$

或者，去掉括號：

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{109}$$

就是，$H_1=1, H_2=r, H_3=r\sin\theta$，這裏 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $H_3\geqslant 0$. 代入到(108)中，得到在球面坐標系中的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0. \tag{110}$$

我們求這個方程只依賴於向量半徑的解。這時需要算作 $\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$，於是推知

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=0,$$

由此

$$r^2\frac{\partial U}{\partial r}=-C_1 \text{ 或 } \frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{C_1}{r_2},$$

求積分，就得到：

(111) $$U=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

其中 C_1 與 C_2 是任意常數。記住 r 是變點 M 到任何一個固定點 M_0 的距離，這個定點我們可以在最初選擇定。特別是當 $C_1=1$ 而 $C_2=0$ 時，我們有解$\frac{1}{r}$，關於這個解我們在［87］中已經講過。

2.柱面坐標 在這情形下

$$x=\rho\cos\varphi;\ \ y=\rho\sin\varphi;\ \ z=z,$$

所以 $q_1=\rho$，$q_2=\varphi$，$q_{33}=z$．對於 ds^2 就有：

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2,$$

由此 $H_1=1$，$H_2=\rho$，$H_3=1$，於是依照（108），在柱面坐標中拉普拉斯方程是：

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\alpha\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0,$$

或

(112) $$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}+\rho\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

像上面一樣，不難證明，這個方程的，只依賴於點到 OZ 的距離 ρ 的解是：

(113) $$U=C_1\lg\rho+C_2,$$

設 U 的值不依賴於 z，就是在所有的平行於平面 XY 的平面上的對應點 U 有同一的值。這時，只須考慮在一個平面 XY 上的值（平面的情形）。在這情形下，直角坐標的拉普拉斯方程是

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

在平面上作出極坐標（ρ，φ），根據（112），得到方程：

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0,$$

由表達式（113）看出，在平面情形下，$\lg\rho$ 是拉普拉斯方程的解，其中 ρ 是變點到任何一個固定點的距離。自然可以取解 $\lg\frac{1}{\rho}=-\lg\rho$ 來替代 $\lg\rho$. 如此，在三維空間中，變點到某一定點的距離的倒數是拉普拉斯方程的基本解，而在平面情形下，這距離的倒數的對數或這個距離的對數是基本解。

130. 對於變場情形求微商的運算　設在空間有某一數量場 $U(t,M)$ 或向量場 $\boldsymbol{A}(t,M)$，在這兩種情形下這個場都隨時間的改變而改變，就是說，在每一個點，這個數量或向量是時間 t 的函數。此外，設整個空間在運動中，它的運動由速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的場來表現。並且我們設向量 $\boldsymbol{v}$ 也依賴於時間。

我們來看當時間改變時 U 的大小的改變。可以分爲下面兩種方式來考慮。

1. 注意在於空間的確定的點，來確定在空間這一點 U 的大小的改變速率。如此我們要求偏微商 $\frac{\partial U}{\partial t}$，它可以叫做當地微商，因爲它連繫於空間確定的位置。

2. 我們也可以確定 U 的大小的改變速率，而注意於運動介質（物質）的確定的粒子。這時，我們應當對 t 求微商，並且要注意到介質的這個點的運動，就是說，我們求對 t 的微商時，不僅是直接對 t 來求，並且也要通過中間變點 M 的坐標 (x,y,z) 對 t 來求。在這情形下，我們要求全微商，或者有時叫做實質微商：

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}v_x+\frac{\partial U}{\partial y}v_y+\frac{\partial U}{\partial z}v_z,$$

這可以寫成下面的較短的形式：

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}U, \tag{114}$$

在〔114〕中我們已經有過實質微商的例，在其中我們考慮過運動的連續介質的粒子的密度對時間的全微商。

同樣，對於運動介質中變向量 $\boldsymbol{A}(t,M)$，有下面的公式成立

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}v_x+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}v_y+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}v_z,$$

或

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\mathrm{gsad})\boldsymbol{A}, \tag{115}$$

其中記號 $(\boldsymbol{v}\mathrm{grad})$ 有下面的意義：

$$(\boldsymbol{v}\mathrm{grad})=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z},$$

在公式 (114) 與 (115) 中的第一項，就是對時間的偏微商，表現出在給定的位置這個量的改變，而第二項表現出這介質運動的結果。

現在我們講幾個公式，這些公式是關於求沿運動的介質中某一區域的積分的微商的。在這情形下，積分的大小對 t 的依賴性有下面兩方面：1) 被積函數依賴於 t，2) 積分區域隨時間改變。當計算對 t 的微商時，我們可以把這種對 t 的雙重依賴性算作對兩個變量的依賴性，而應用求複合函數的微商的法則 [I,69]。這個工作主要在於引用無窮小作用的重疊原理。積分對 t 的微商由兩項組成：第一項，計算時假定積分區域不變，單純來確定被積函數對 t 的微商 [80]，第二項，只考慮積分區域的改變，計算它時，算作被積函數不隨時間改變。

我們來考慮下列情形。

1. 設 (v) 是某一個變容積，$U(t,M)$ 是一個數量函數。我們來建立關於微商

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)}U\,dv$$

的公式。

容積 (v) 的界面 (S) 的每一單元 dS，在時間區間 dt 中，描摹出一個容積 dtv_ndS，其中 (n) 是曲面 (S) 的向外的法線方向 [114]。

這樣的容積的改變量乘以對應的被積函數的大小，沿整個曲面 (S) 相加起來，就得到由於容積 (v) 的改變，這積分的大小的改變量 1)：

1) 若方向 $\boldsymbol{v}$ 與 (n) 之間的角是鈍角，則 v_n 是負的量，於是容積的改變量 dtv_ndS 也就是負的。

$$dt\iint\limits_{(S)} Uv_n dS$$

用 dt 除，再加上由於被積函數改變的一項，就得到這積分的微商的表達式

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U dv = \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial U}{\partial t} dv + \iint\limits_{(S)} Uv_n dS,$$

由此，應用奧斯特洛格拉得斯基公式，就有：

$$(116)\qquad \frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\boldsymbol{v})\right] dv,$$

依照公式 (114) 用通過 $\frac{dU}{dt}$ 的表達式來替換 $\frac{\partial U}{\partial t}$，並利用公式($57_1$)[112]

$$\operatorname{div}(U\boldsymbol{v}) = U\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}U,$$

公式 (116) 可寫以成下面的形狀

$$(117)\qquad \frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{dU}{dt} + U\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right] dv,$$

2. 現在考慮變向量場 $\boldsymbol{A}(t, M)$ 通過運動的曲面 (S) 的流量的微商：

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} A_n dS.$$

這裏 (S) 是運動介質中的某一曲面，而 (n) 是 (S) 的確定的法線方向。在微商的未知的表達式中，一項是

$$(118)\qquad \iint\limits_{(S)} \frac{\partial A_n}{\partial t} dS.$$

現在來確定第二項，就是由於這曲面運動產生的一項。設 (l) 是這曲面的界線，ds 是這個界線的有向單元，以後我們再確定界線 (l) 的方向(圖 98)。在時間區間 dt 中曲面 (S) 描摹出一個容積 (δV)，它以三個

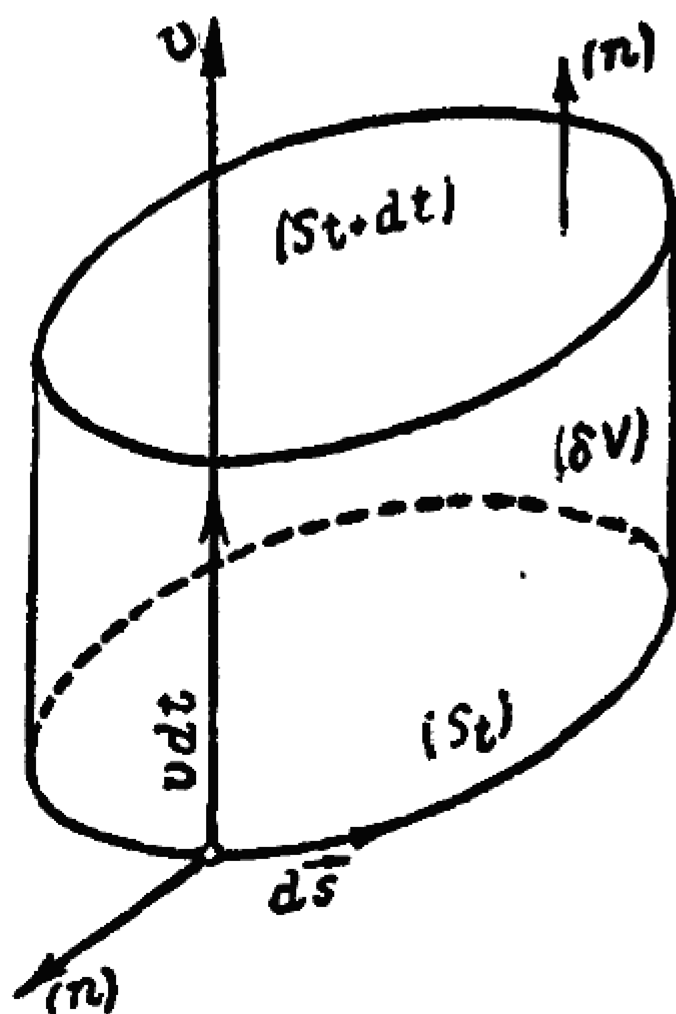


圖 98

曲面爲界：曲面 (S) 在時刻 t 的位置 (S_t)，曲面 (S) 在時刻 $t+dt$ 的位置 (S_{t+dt})，以及在時間區間 dt 中界線 (l) 所描摹出的曲面 (S')。曲面 (S') 的面積單元是：

$$dS' = |\, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v} \,|\, dt.$$

設 (n) 是 (S_t) 與 (S_{t+dt}) 上的法線方向，取在相同的一側，而設在 (S_{t+dt}) 上它的方向是由容積 (δV) 向外的。(S') 上的法線方向也記作 (n)，對於 (δV) 來講也是向外的，並且給 (l) 以這樣的方向，使得 $d\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{v}$，與 (S') 上的 (n) 具有與坐標軸相同的定轉向。這時顯然

$$A_n dS' = \boldsymbol{A} \cdot (d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}) dt,$$

所以由奧斯特洛格拉得斯基公式得到

$$(119) \quad \iint\limits_{(S_{t+dt})} A_n dS - \iint\limits_{(S_t)} A_n dS + dt \int\limits_{(l)} \boldsymbol{A} \cdot (d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}) = \iiint\limits_{(\delta V)} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dv.$$

沿 (S_t) 的積分前的（－）號是由於 (S_t) 上的法線指向 (δV) 之內。不過，由〔105〕知道，

$$\boldsymbol{A} \cdot (d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}) = d\boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A})_s ds,$$

其中 $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A})_s$ 是 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}$ 在 $d\boldsymbol{s}$ 的方向上的投影，於是依照司鐸克斯公式推知

$$\int\limits_{(l)} \boldsymbol{A} \cdot (d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}) = \int\limits_{(l)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A})_s ds = \iint\limits_{(S_t)} \operatorname{rot}_n (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) dS.$$

分容積 (δV) 爲容積單元 $dv = v_n dS dt$，其中 dS 是曲面 (S_t) 的面積單元，由公式 (119) 我們得到：

$$\iint\limits_{(S_{t+dt})} A_n dS - \iint\limits_{(S_t)} A_n dS = dt \iint\limits_{(S_t)} [v_n \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \operatorname{rot}_n(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A})]\, dS.$$

兩邊用 dt 除再取極限，我們就得到由於曲面 (S) 的運動而產生的微商表達式中的那一項。再加上另一項 (118)，結果得到：

$$(120) \qquad \frac{d}{dt} \iint\limits_{(S)} A_n dS = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \operatorname{rot}_n(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{v}) \right] dS.$$

若 (S) 是封閉曲面，在微商的表達式中含有 $\operatorname{rot}_n(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{v})$ 的一項就沒有了，對應於這種情形的公式可以由 (116) 直接推出。實際上，設 (v) 是界於封閉曲面 (S) 的變容積，利用

奧斯特洛格拉得斯基公式及（116），得到：

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} A_n dS = \frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\boldsymbol{A} dv = \iiint\limits_{(v)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{A})\right]dv$$

$$= \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\right]dv = \iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div}\boldsymbol{A}\right)dS,$$

3．現在來求變向量沿一個運動的曲線的循環量的微商：

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s ds,$$

像以上一樣，未知表達式中有一項是

$$\int\limits_{(l)} \frac{\partial A_s}{\partial t} dS, \tag{121}$$

現在來確定由於這曲線的運動所產生的另一項。在時間區間 dt 中，曲線 (l) 描摹出曲面 (δS)，它以四條曲線爲界(圖 99)：曲線 A_1A_2 是曲線 (l) 在時刻 t 的位置 (l_t)；曲線 B_1B_2 是 (l) 在時刻 $t+dt$ 的位置 (l_{t+dt})；最後，曲線 A_1B_1 與 A_2B_2 是曲線 (l) 的端點 A_1 與 A_2 在時間區間 dt 中描摹出的曲線。司鐸克斯公式給出

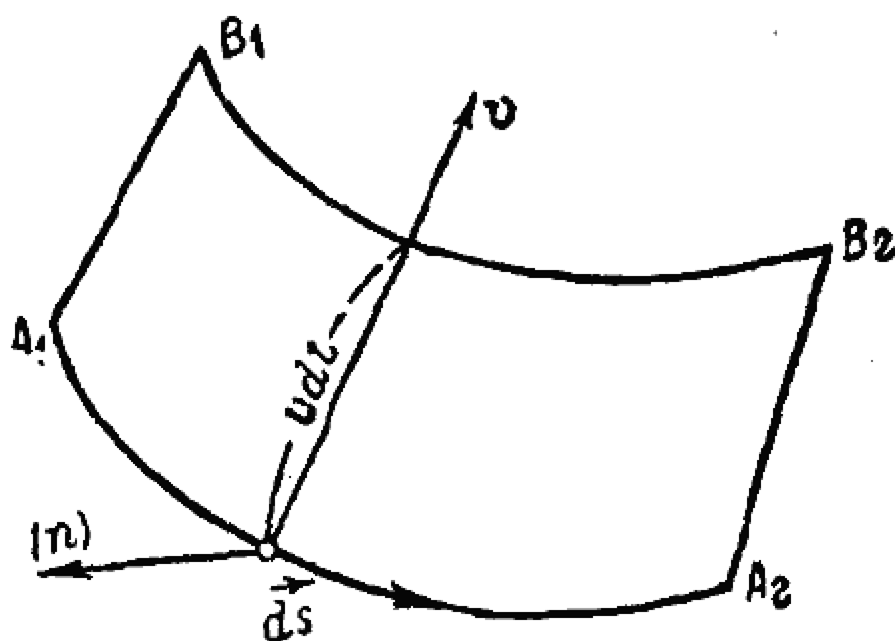


圖 99

$$\int\limits_{(l_t)} A_s ds + \int\limits_{(A_2B_2)} A_s ds - \int\limits_{(l_{t+dt})} A_s ds + \int\limits_{(B_1A_1)} A_s ds = \iint\limits_{(\delta S)} \operatorname{rot}_n A\, dS, \tag{122}$$

這裏沿 (l_t) 與 (l_{t+dt}) 的積分各取由 A_2 與 B_2 到 A_2 與 B_2 的方向，(n) 是 (δS) 的法線方向使得 (l_t) 上的向量 ds，$\boldsymbol{v}$，(n) 與坐標軸有相同的定轉向。沿很小的曲線 A_2B_2 以及 B_1A_1 的積分都可以用一個單元來替代，就是被積函數的大小與積分弧長的乘積。對於向量 $\boldsymbol{A}$ 與很小的改變 $v\,dt$ 的數量積我們得到：

$$A^{(2)}\cdot v^{(2)dt} \text{ 與} -A^{(1)}v^{(1)}dt$$

其中(－)號是由於沿曲線 B_1A_1 求積分時是由 B_1 到 A_1 的，就是與 v 的方向相反的，上邊的附標說明對應的量需要取在點 A_1 與 A_2 的值。

曲面的面積單元就是

$$dS = |\,ds\times v\,|\,dt$$

而曲面的法線(n)就有向量 $ds\times v$ 的方向，所以顯然

$$\mathrm{rot}_n A dS = (ds\times v)\cdot\mathrm{rot}A\,dt = (v\times\mathrm{rot}A)\cdot ds\,dt,$$

於是公式(122)給出：

$$\int\limits_{(l_{t+dt})} A_s ds \quad \int\limits_{(l_t)} A_s ds = A^{(2)}\cdot v^{(2)}dt - A^{(1)}\cdot v^{(1)}dt + dt\int\limits_{(l_t)}(\mathrm{rot}A\times v)_s ds.$$

兩邊用 dt 除取極限，再加上另一項(121)，就得到關於微商的未知表達式，這裏我們簡寫成(l)以替代(l_t)：

$$(123)\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s ds = A^{(2)}\quad v^{(2)} - A^{(1)}\cdot v^{(1)} + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial A_s}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,A\times v)_s\right]ds.$$

若曲線(l)是封閉的，則積分以外的兩項全同，於是我們得到：

$$(124)\qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s ds = \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial A_s}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,A\times v)_s\right]ds.$$

這個公式可以用較簡單的方法求出來，先依照司璋克斯公式化寫曲面積分，再應用公式(120)。

我們再考慮速度沿着某一個運動的界線(l)的循環量。依照公式(123)

$$(125)\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} v_s ds = v^{(2)}\cdot v^{(2)} - v^{(1)}\cdot v^{(1)} + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,v\times v)_s\right]ds =$$

$$= |v^{(2)}|^2 - |v^{(1)}|^2 + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,v\times v)_s\right]ds.$$

向量 $\mathrm{rot}v\times v$ 沿 OX 軸的支量是

$$(\mathrm{rot}v\times v)_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y,$$

去掉括號，加減一項$\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x$，可以寫成：

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times v)_x=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z-$$

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial x}v_y+\frac{\partial v_z}{\partial x}v_z\right),$$

於是，利用(115)，由此不難得到：

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\frac{1}{2}\operatorname{grad}|\boldsymbol{v}|^2=\boldsymbol{w}-\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\frac{1}{2}\operatorname{grad}|\boldsymbol{v}|^2,$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 是加速度向量。代入到(125)中，就有：

$$(126)\qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{(l)}v_s ds=|v^{(2)}|^2-|v^{(1)}|^2+\int\limits_{(l)}\left(w_s-\frac{1}{2}\operatorname{grad}_s|v|^2 ds=\right.$$

$$=\frac{1}{2}[|v^{(2)}|^2-|v^{(1)}|^2]+\int\limits_{(l)}w_s ds.$$

因爲顯然：

$$\int\limits_{(l)}\operatorname{grad}_s|v|^2 ds=|v^{(2)}|^2-|v^{(1)}|^2.$$

第五章　微分幾何基礎

121.**平面曲線、曲率與漸屈線**　在這一章中我們講曲線與曲面理論的基礎，由討論平面曲線開始，然後再講空間的曲線，以至於曲面。我們利用向量來討論，所以讀者必須澈底回憶上一章中前幾段，一直到講向量的微分法那一段。現在先證明一個預備定理：

預備定理　**設** A **是一個依賴於參變量** t **的長度為一的向量（單位向量），則** $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A}$ **等於零，就是說** $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\perp\boldsymbol{A}$。

實際上，依照所設條件，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=1$，由這等式對 t 求微商，就得到：

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0,$$

根據數量積不依賴於因子的順序，就有：

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A}=0,\qquad \text{就是}\qquad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\perp\boldsymbol{A},$$

這裏，只要向量 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ 不等於零，條件 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\perp\boldsymbol{A}$ 就有明顯的意義。

設在平面上有某一條曲線 (L)，這曲線上的變點 M 的位置由一個數量性參變量 t 來確定。我們可以用由某一定點 O 到這曲線上的變點的向量半徑 $\boldsymbol{r}(t)$ 來描繪這個曲線（圖 100）。我們知道［107］，微商 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 給出的向量的方向是沿着曲線的切

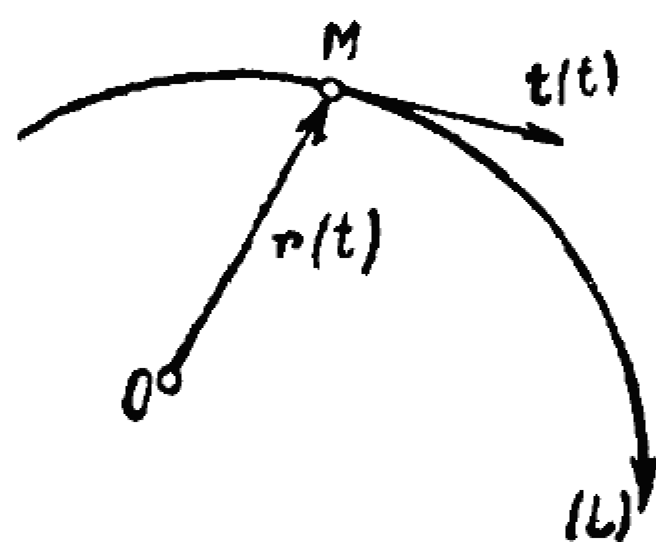


圖　100

線的，並且若取曲線的弧長 s 作參變量，而弧長是由曲線上一個定點依照指定的方向來計算的，則微商 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 給出切線的單位向量 $\boldsymbol{t}$，它的方向與沿着這曲線參變量 s 增加的方向一致：

(1) $$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t},$$

單位切線向量對 s 的微商叫做**曲率向量**：

(2) $$\boldsymbol{N}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}.$$

這個向量的長度表現出向量 $\boldsymbol{t}$ 的方向改變的快慢，它叫做**曲線的曲率**。

根據已經證明的預備定理，曲率向量垂直於切線，就是說，它在沿法線的方向。

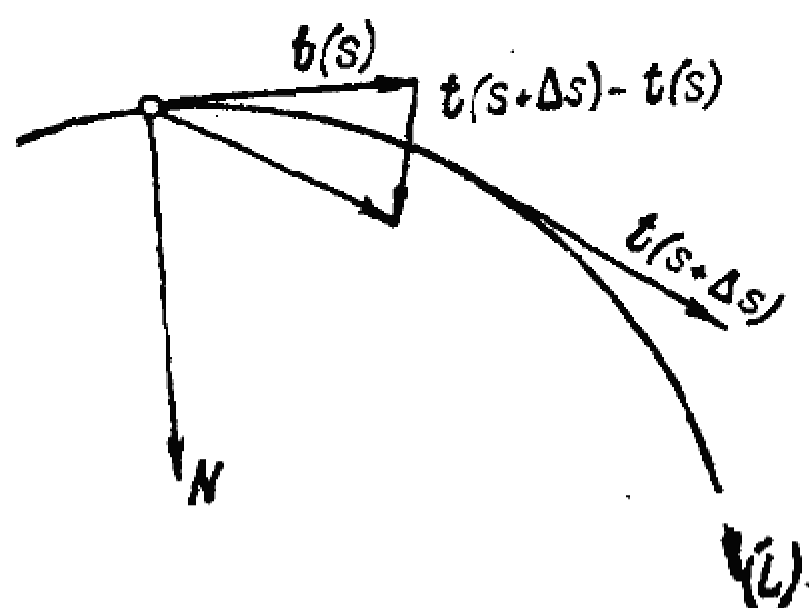


圖 101

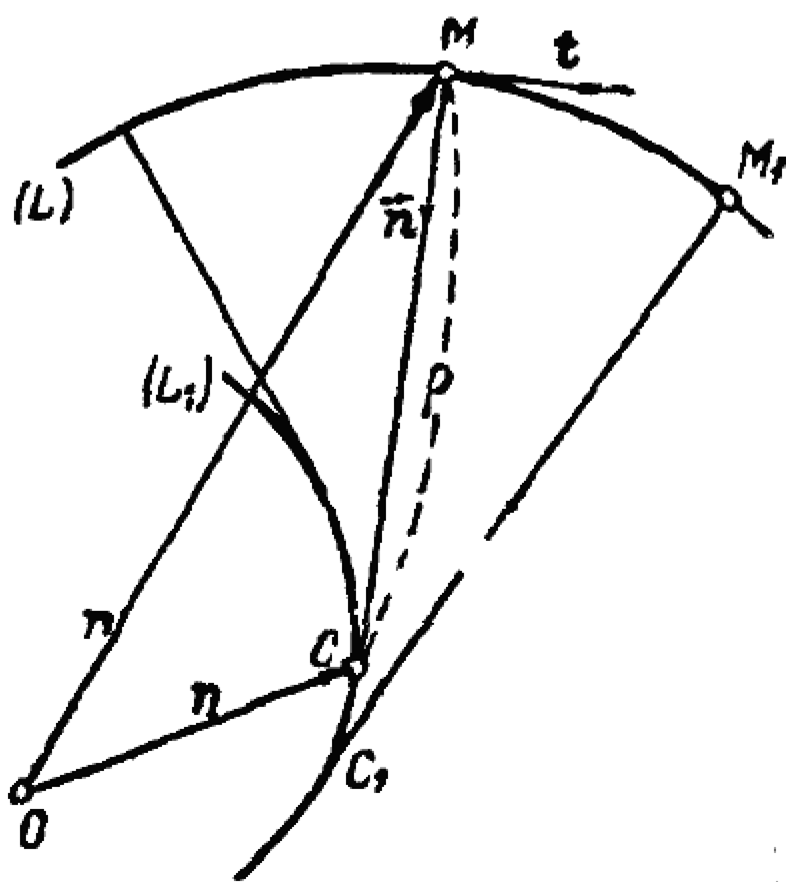


圖 102

此外，由它的定義直接推知，它的方向指向曲線的凹側，因爲當 $\Delta s>0$ 時，差 $\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)$ 的方向指向這一側。

我們已經說過，向量 $\boldsymbol{N}$ 的長度叫做曲線的曲率，如果引用記號

(3) $$|\boldsymbol{N}|=\frac{1}{\rho}$$

則 ρ 是曲率的的倒數，它叫做**曲率半徑**。我們來考慮單位曲率向量 $\boldsymbol{n}$，就是方向與 $\boldsymbol{N}$ 一致而長度爲一的向量。

根據 (3) 就有

(4) $$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$$

在 $\boldsymbol{n}$ 的方向，也就是在曲線的指向凹側的法線方向，作一個線段 MC，讓它的長度等於在點 M 的曲率半徑 ρ（圖 102）。它的端點 C 叫做曲線在點 M 的**曲率中心**　若點 M 沿着曲線 (L) 移動，則 C 改變位置並且畫出某一條曲線 (L_1)，它叫做**曲線** (L) **的漸屈線**，就是說，**曲線的曲率中心的軌跡叫做這曲線的漸屈線**。

爲了以下的討論，我們必須確定微商 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. 向量 $\boldsymbol{n}$ 既是單位向量，於是 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\perp\boldsymbol{n}$，就是 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ 與切線平行。由明顯的等式 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 對 s 求微商，就有：

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=0,$$

不過向量 $\boldsymbol{N}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 方向一致，並且根據 (4)，$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\rho}$，所以由最後這個等式推知 $\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}$。對照向量 $\boldsymbol{t}$ 與 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ 的平行性，就得到 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ 與 $\boldsymbol{t}$ 的方向相反，而 $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ 的長度等於 $\frac{1}{\rho}$，就是說：

(5) $$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t},$$

像以上一樣，設 $\boldsymbol{r}$ 與 s 各爲關於曲線 (L) 的向量半徑與弧長，而

$\boldsymbol{r}_1$ 與 s_1 各爲關於漸屈線 (L_1) 的向量半徑與弧長。由等式 (圖 102)

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{n}$$

對 s 求微商，得到:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}=\boldsymbol{t}+\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{n}+\rho\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

根據 (5)，就有:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}=\boldsymbol{t}+\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{t}\text{ 就是 }\frac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}=\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{n}. \tag{6}$$

這公式右邊是一個向量，沿 (L) 的法線方向，左邊是一個向量，沿漸屈線的切線方向，於是推知，曲線 (L) 的法線與漸屈線的切線平行。不過這兩條線都通過同一點 C，所以它們應當重合，於是我們得到漸屈線的第一個性質：**曲線的法線與漸屈線在對應點相切。**

回憶曲線族的包絡的定義，我們就可以得出漸屈線的第二個性質：**漸屈線是曲線的法線族的包絡。**

關於漸屈線的自然的參變量就是它的弧長 s_1，依照求複合函數的微商的法則

$$\frac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}_1}{ds_1}\cdot\frac{ds_1}{ds}=\frac{ds_1}{ds}\boldsymbol{t}_1,$$

其中 $\boldsymbol{t}_1$ 是漸屈線的單位切線向量。代入到 (6) 中我們得到:

$$\frac{ds_1}{ds}\boldsymbol{t}_1=\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{n},$$

由此，比較這等式兩邊的向量的長度，就有:

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right|=\left|\frac{d\rho}{ds}\right|,\text{ 就是 }|ds_1|=|d\rho|,$$

爲簡單起見，我們算作在所考慮的一段曲線及其漸屈線上，s_1 與 ρ 的大小一齊增加，就可以寫成 $ds_1=d\rho$[1]。沿着所考慮的曲線段求積

---

[1]算作 ρ 單調增加，總可以選擇計算 s_1 的方向，以使得 s_1 與 ρ 一齊單調增加。

分，就得到漸屈線的弧長的改變量與原來的曲線的曲率半徑的改變量全同。如此，我們就得到漸屈線的第三個性質：**在曲率半徑單調改變的一段上，它的改變量等於漸屈線的弧長在對應點間的改變量**。在圖102的情形下，這個性質可以用下面這等式來表達：$M_1C_1 - MC = \overset{\frown}{CC_1}$。

在平面上選定坐標軸 OX 與 OY，設 φ 是切線 $\boldsymbol{t}$ 的方向與 OX 軸作成的角度。通過支量來表達單位向量，我們就有：

$$\boldsymbol{t} = \cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\varphi \boldsymbol{j},$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 與 $\boldsymbol{j}$ 各爲沿 OX 軸與 OY 軸的單位向量。由上面這等式對 s 求微商：

$$\boldsymbol{N} = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}\boldsymbol{i} + \cos\varphi \frac{d\varphi}{ps}\boldsymbol{j},$$

由此求出曲率向量的長度的平方是：

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(-\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

或

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

如此我們就得到在［I,71］中已經講過的曲率的表達式。

設給定了曲線 (L) 的顯示方程：

$$y = f(x). \tag{7}$$

這曲線的法線族就具有方程：

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \text{ 或 } (X - x) + y'(Y - y) = 0. \tag{8}$$

這裏，(X,Y) 是法線的變動坐標，(x,y) 是曲線 (L) 上點 M 的坐標，並且 y 是 x 的函數 (7)。如此，曲線上的變點的橫坐標 x 在法

線族的方程 (8) 中就有參變量的作用。應用普通求包絡的法則 [10] 於法線族 (8) 時，我們應當寫出兩個方程：一個是方程 (8)，另一個是由方程 (8) 對參變量 x 求微商得到的新方程：

$$(9)\qquad \begin{aligned}&(X-x)+y'(Y-y)=0;\\ &-1+y''(Y-y)-y'^2=0.\end{aligned}$$

由這兩個方程消去參變量 x，就得到一個連繫 X 與 Y 的方程。這就是法線族的包絡的方程，也就是漸屈線的方程。也可以用另一個作法，就是由方程組 (9) 解出X與 Y，通過參變量 x 來表達，這就得到漸屈線的參變方程：

$$(10)\qquad X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''};\qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

若已知的是曲線(L)的參變方程,則在公式(10)中 y 對 x 的微商就需要通過微分來表達[1,74]：

$$y'=\frac{dy}{dx};\qquad y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{dx^3},$$

把這兩個表達式代入到 (10) 中，就得到在這情形下漸屈線的參變方程：

$$(11)\qquad X=x-\frac{dy(dx^2+dy^2)}{d^2y\,dx-d^2x\,dy};\qquad Y=y+\frac{dx(dx^2+dy^2)}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}.$$

例 1. 求橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\qquad (a>b)$$

的漸屈線。

寫出橢圓的參變方程

$$x=a\cos t;\qquad y=b\sin t$$

代入到方程(11)中，作出簡單的計算：

$$X=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t;$$

$$Y=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

由這兩個方程消去參變量 t。第一個方程乘以 a，第二個方程乘以 b，再各乘 $\frac{2}{3}$ 次方，然後相加，就得到橢圓的漸屈線的隱示方程：

$$a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

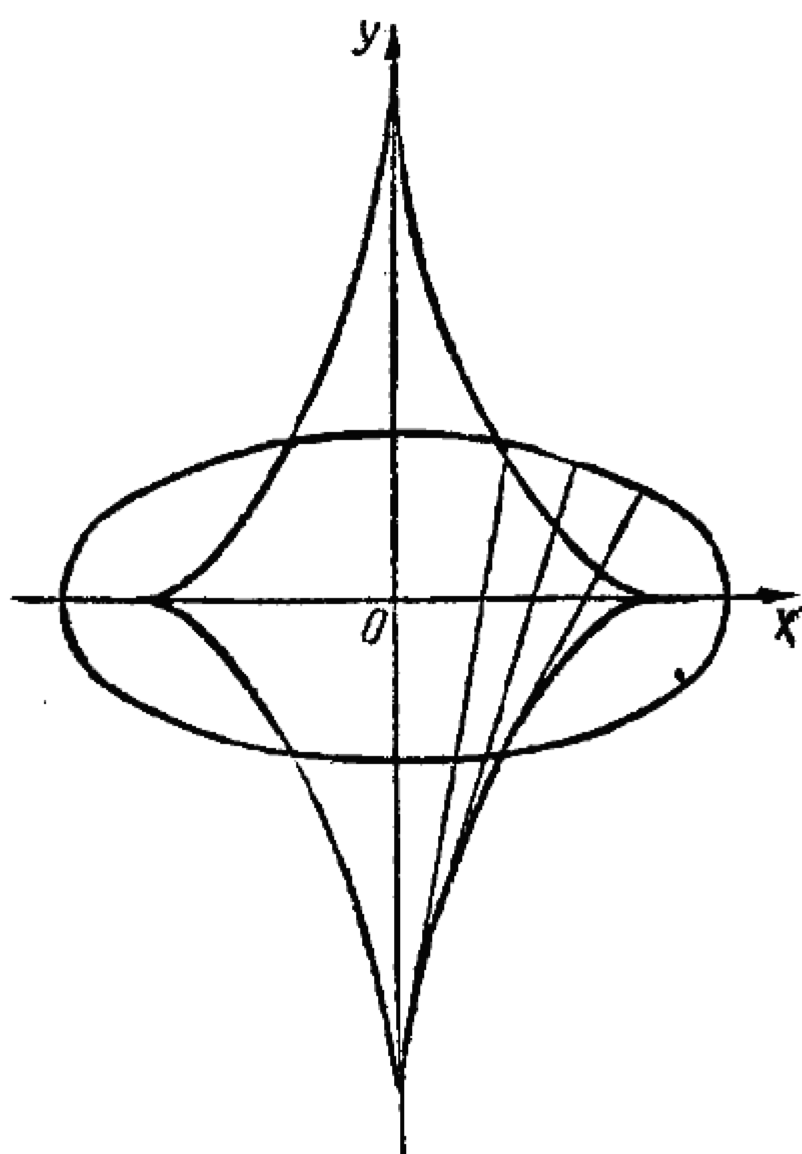


圖 103

利用這些方程，不難作出橢圓的漸屈線。注意，在橢圓的頂點，它的曲率半徑取最小值與最大值，漸屈線在對應的點就有奇異點，它們是歧點（圖 103）。

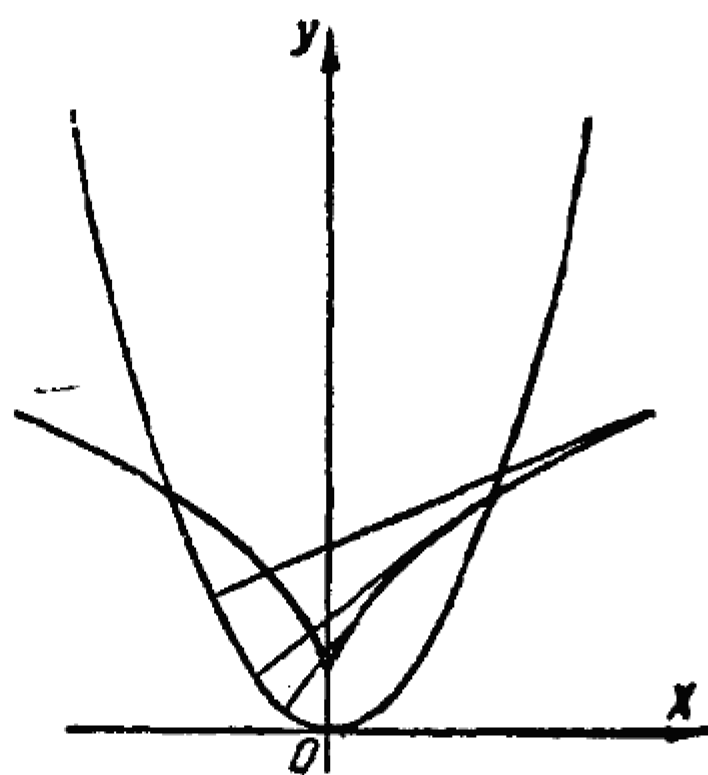


圖 104

2. 求拋物線 $y=ax^2$ 的漸屈線。利用方程(10)，不難得到：

$$X=-4a^2x^3;\quad Y=\frac{1}{2a}+3ax^2$$

由此消去參變量 x，就得到拋物線的漸屈線的顯示方程（圖 104）：

$$Y=\frac{1}{2a}+\frac{3}{2\sqrt[3]{2a}}X^{2/3}.$$

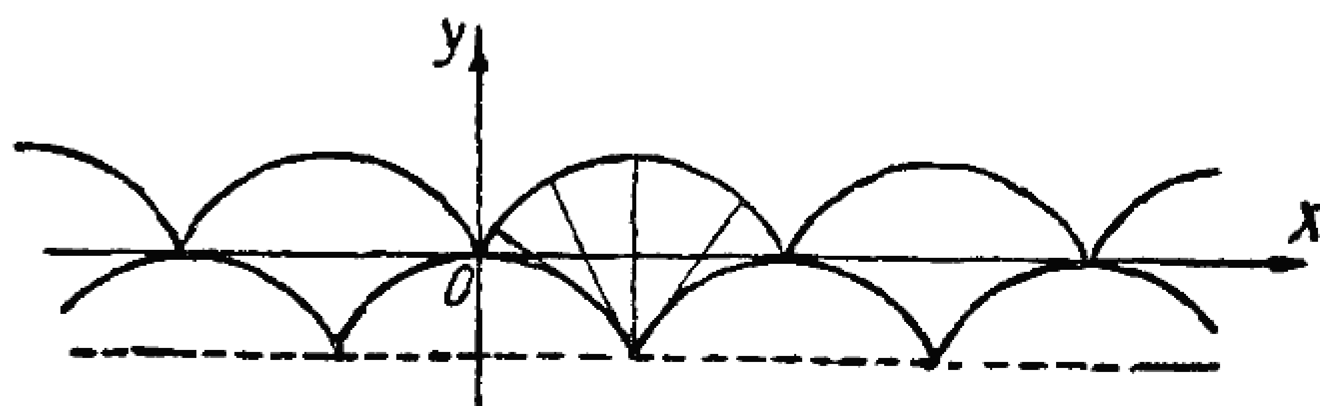


圖 105

3.考慮旋輪線。

$$x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t).$$

利用公式(11)，求出旋輪線的漸屈線的參變方程:

$$X=a(t+\sin t);\quad Y=-a(1-\cos t).$$

不難證明，像給定的曲線一樣，這個曲線也是旋輪線，只是對於坐標軸來講，分佈的位置不同(圖 105)。實際上，讓 $t=\tau-\pi$，後面這公式可以寫成

$$X+a\pi=a(\tau-\sin\tau);$$

$$Y+2a=a(1-\cos\tau),$$

由此直接推知上述的肯定。

122.漸伸線 曲線 (L) 對於它的漸屈線 (L_1) 來講，叫做**漸伸線**。由漸屈線的性質，不難得到已知漸屈線時，作漸伸線的法則。若 C 是 (L_1) 上的變點，s_1 是這個曲線的弧長，則在 (L_1) 在點 C 的切線的負方向上取線段 $\overline{CM}=s_1+a$，其中 a 是某一個常數，就得到點 M 的軌跡 (L)。不難證明，這個軌跡就是要求的漸伸線(圖 106)。為要證明這個，只須證明線段 CM 是曲線 (L) 的法線。像以前一樣，設

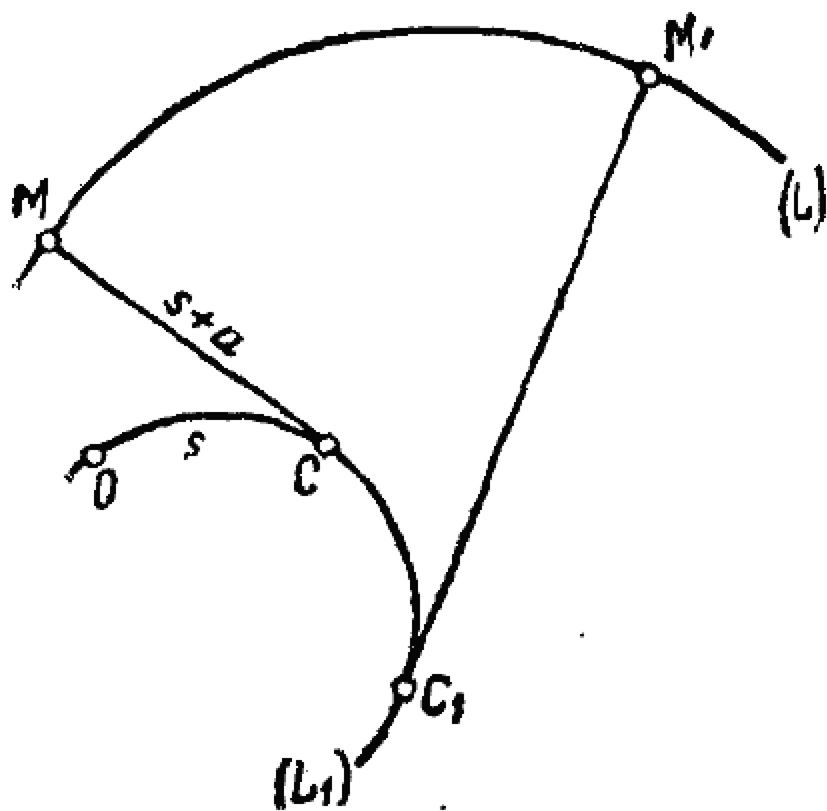


圖 106

$\boldsymbol{r}$ 與 $\boldsymbol{r}_1$ 各為曲線 (L) 與 (L_1) 的向量半徑，$\boldsymbol{t}$ 是 (L_1) 的單位切線向

量。依照作法：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-(s_1+a)\boldsymbol{t}_1,$$

由此對 s_1 求微商，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_1}=\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_1-(s_1+a)\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds_1},\text{ 就是 }\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_1}=-(s_1+a)\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds_1}.$$

由此看出，與 (L) 的切線平行的向量 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds_1}$，同時也平行於向量 $\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds_1}$，就是平行於 (L_1) 的法線，所以 (L_1) 的切線 $\overline{CM}$ 是 (L) 的法線。

在公式 $\overline{CM}=s_1+a$ 中我們可以給常數 a 以任意的值，所以對於一個給定的漸屈線，可以得到無窮多的漸伸線。由這個作法推知，**任何兩個漸伸線具有公共的法線，並且在這兩個漸伸線之間的法線的線段保持有一定的長度，就等於對應於這兩個漸伸線的常數值 a 之差。**這樣的兩條曲線，我們叫做**平行的曲線**。

123. 曲線的本質方程 沿着任何曲線，曲率是弧長的確定的函數

$$\frac{1}{\rho}=f(s). \tag{12}$$

反之，我們現在證明，任何的形狀如 (12) 的方程，對應一條確定的曲線。實際上，取任何一個方向作 X 軸的方向，並設 φ 是曲線的切線與這個軸作成的角度。我們知道，$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{d\varphi}{ds}$，於是方程(12)給出：

$$\frac{d\varphi}{ds}=\pm f(s),$$

由此

$$\varphi=\pm\int_0^s f(s)ds+C.$$

可以算作 X 軸的方向與當 $s=0$ 時切線的方向一致。於是在最後這公式中可以算作 $C=0$，就是說，對於 φ 我們得到表達式：

$$\varphi=\pm F(s),$$

其中

$$F(s)=\int_0^s f(s)ds.$$

再者，我們知道 [1, 70]，

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi;\quad \frac{dy}{ds}=\sin\varphi,$$

由此，根據上面的等式，

$$x=\int_0^s \cos[F(s)]ds+C_1$$

$$y=\pm\int_0^s \sin[F(s)]ds+C_2.$$

取當 $s=0$ 時曲線上的對應點作爲坐標原點，我們就應當算作 $C_1=C_2=0$，於是就得到完全確定的曲線

$$(12_1)\qquad x=\int_0^s \cos[F(s)]\,ds;\quad y=\pm\int_0^s \sin[F(s)]\,ds.$$

$\pm$ 號給出對 OX 軸的對稱關係。

如此，我們證明了，在上述意義下，方程 (12) 可以確定一條曲線，並且當選擇好坐標系時，方程 (12_1) 應當給出這曲線的參變方程。不難驗證，實際上，由方程 (12_1) 所確定的曲線的曲率具有的值恰好是由公式 (12) 所確定的。

在這意義下，方程（12）叫做**曲線的本質方程**，這個方程與坐標軸是怎樣選擇的沒有關係，而且它對應於一條完全確定的曲線（不計對稱關係）。

例 1.若方程（12）是 $\frac{1}{\rho}=C$，就是說曲率半徑是常量，則我們知道圓周適合這樣的方程 [I,71]。由以上所述推知，圓周是曲率半徑爲常量的唯一的曲線。

2.設曲率 $\frac{1}{\rho}$ 與弧長成正比

$$\frac{1}{\rho}=2as,$$

其中 $2a$ 是正的比例係數，在這情形下，上面的計算給出：

$$(13)\qquad x=\int_0^s \cos(as^2)ds \qquad y=\int_0^s \sin(as^2)ds$$

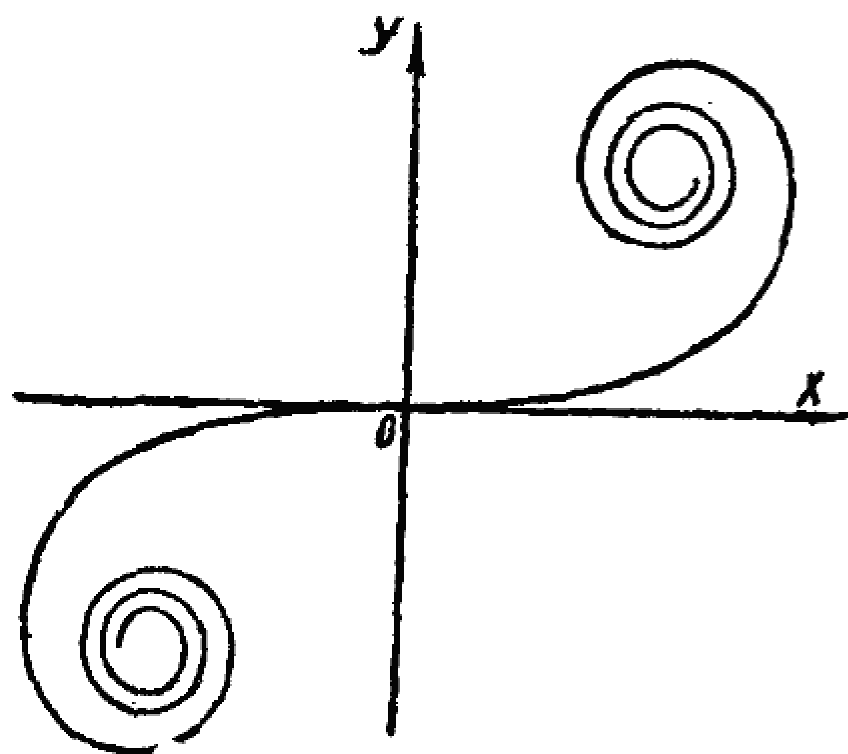


圖 107

根據積分

$$\int_0^\infty \cos(as^2)ds;\ \int_0^\infty \sin(as^2)ds$$

的收斂性 [83]，可以肯定，當 s 無限增加時，這曲線趨向一個點，這個點的坐標就等於上面兩個積分的值，並且它成螺線狀環繞着這個點（圖 107）。若在公式（13）中 s 取負值，則得到在第三象限中的一部分曲線。這裏得到的曲線叫做柯尼螺線，在光學中會遇到它。

124.空間曲線的基本元素 空間曲線 (L) 可以用由原點 O 到曲線上變點 M 的變向量半徑 $\boldsymbol{r}(t)$ 來確定（圖 108）。取曲線的弧長 s 作參變量 t，求 $\boldsymbol{r}$ 對 s 的微商，就得到曲線的單位切線向量 [107]

$$(14)\qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}.$$

$\boldsymbol{t}$ 對 s 的微商叫做**曲率向量**:

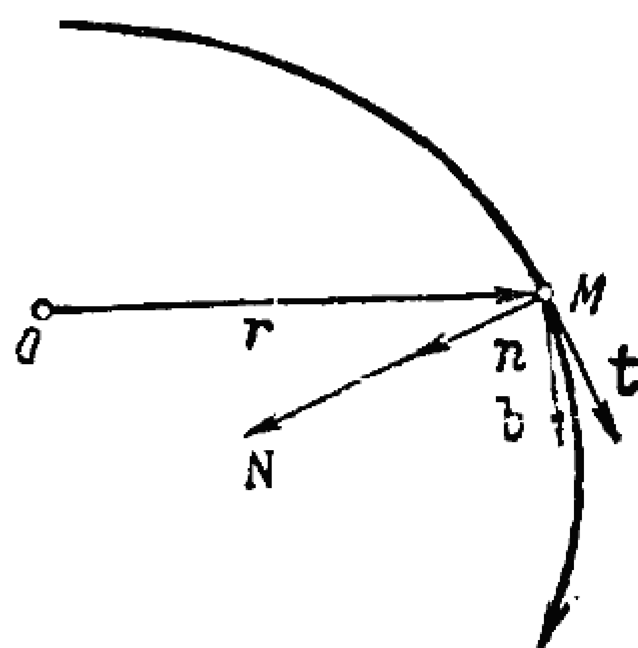


圖 108

(15) $$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\boldsymbol{N}.$$

這個曲率向量的長度給出**曲線的曲率** $\frac{1}{\rho}$，它的倒數 ρ 叫做**曲率半徑**。像平面曲線的情形一樣，向量 $\boldsymbol{N}$ 垂直於 $\boldsymbol{t}$，向量 $\boldsymbol{N}$ 的方向叫做**曲線的主法線**的方向。引用單位主法線向量 $\boldsymbol{n}$，可以寫成:

(16) $$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

再引入一個垂直於 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 的單位向量:

(17) $$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}.$$

這個向量叫做**單位次法線向量**。

這三個單位向量與坐標軸具有相同的定轉向，它們組成所謂的**連繫於曲線** (L) **的變動三標**。若是平面曲線，則向量 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 出現在曲線所在的平面上，於是單位次法線向量 $\boldsymbol{b}$ 就是一個定向量，長度等於一，而垂直於曲線所在的平面。對於非平面曲線，微商 $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 表現出曲線離開平面形式的偏差度，它叫做**撓率向量**。現在我們證明，**撓率向量平行於主法線**，依照公式(17)

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}.$$

不過向量 $\boldsymbol{N}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 的方向一致，所以它們的向量積等於零，於是

(18) $$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

由此推出向量 $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 與 $\boldsymbol{t}$ 垂直。另一方面，我們知道，單位向量的微商

$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$垂直於向量 $\boldsymbol{b}$。如此，向量$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$垂直於向量 $\boldsymbol{i}$ 與 $\boldsymbol{b}$，就是實際上平行於向量 $\boldsymbol{n}$，於是我們可以寫成

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}, \tag{19}$$

其中數量的係數$\frac{1}{\tau}$叫做**曲線的撓率**，它的倒數 τ 叫做**撓率半徑或第二曲率半徑**。注意，$\frac{1}{\tau}$的大小可以是正的，也可以是負的，這一點與曲率$\frac{1}{\rho}$不同，曲率總被算作不是負的。自然，切線向量、曲率向量以及撓率向量的存在性是與表達它們的微商的存在性連繫着的。

現在我們講計算曲率以及撓率的公式。引用坐標軸 OX, OY, OZ 以及對應於它們的單位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，可以寫成:

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{t}=\frac{dx}{ds}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{ds}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{ds}\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{N}=\frac{d^2x}{ds^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\boldsymbol{k},$$

由此對於向量 $\boldsymbol{N}$ 的長度我們得到:

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{20}$$

由公式 (19)推出,撓率 $\frac{1}{\tau}$ 可以表達成數量積

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}$$

或者根據 (18)，

$$\frac{1}{\tau}=\left(\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)\cdot\boldsymbol{n}.$$

用公式 (16) 中 $\boldsymbol{n}$ 的表達式

$$\boldsymbol{n}=\rho\boldsymbol{N}$$

來替代 n，可以得到：

$$\frac{1}{\tau}=\left(t\times\frac{d(\rho N)}{ds}\right)\cdot\rho N=\left[t\times\left(\frac{d\rho}{ds}N+\rho\frac{dN}{ds}\right)\right]\cdot\rho N=$$
$$=\rho\frac{d\rho}{ds}(t\times N)\quad N+\rho^2\cdot\left(t\times\frac{dN}{ds}\right)\cdot N.$$

不過向量積 $t\times N$ 垂直於向量 N，所以最後這個表達式中第一項等於零，於是我們得到：

$$\frac{1}{\tau}=\rho^2\left(t\times\frac{dN}{ds}\right)\cdot N,$$

或者，交換向量積的兩個因子：

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{dN}{ds}\times t\right)\cdot N.$$

作向量的循環排列並利用公式(14)與(15)，最後得到：

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}. \tag{21}$$

注意，$-\rho^2$ 的係數是由向量 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$，$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$，$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$ 作成的平行六面體的容積[105]。

現在我們回到關於曲率的公式(20)。在這個公式中，坐標 x,y,z 是作爲弧長的函數來表達的。現在我們把公式(20)變換成一個新的形狀，使得它適用於利用任何的參變量給定的曲線。爲此，我們需要通過坐標的微分來表達坐標對弧長的微商。求公式

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{22}$$

的微分，我們得到：

$$dsd^2s=dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z. \tag{23}$$

此外，我們有[1,74]

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2xds-d^2sdx}{ds^3};\quad\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2yds-d^2sdy}{ds^3};\quad\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d^2zds-d^2sdz}{ds^3}. \tag{24}$$

代入到公式(20)中，就有:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-2dsd^2s(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)+(d^2s)^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{ds^6}$$

或者根據(22)與(23):

$$(25)\quad \frac{1}{\rho^2}=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2}{ds^6}$$

現在我們回憶一個初等代數中的恒等式，以下我們要用到它[104]:

$$(26)\qquad (a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2$$
$$=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2.$$

對於表達式(25)的分子應用這個恒等式，關於曲率的平方的公式結果可以寫成:

$$(27)\qquad \frac{1}{\rho^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{(dx^2+dy^2+dz^2)^3},$$

其中

$$A=dyd^2z-dzd^2y;\quad B=dzd^2x-dxd^2z;\quad C=dxd^2y-dyd^2x.$$

若曲線(L)是運動點的軌跡，則速度向量由下面這公式來確定

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{t}.$$

再對時間求一次微商，就求得到加速度向量:

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{dt},$$

或者根據(15)與(16).

$$\boldsymbol{w}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}\quad\left(v=\frac{ds}{dt}\right),$$

由此看出，加速度向量沿切線的支量等於$\frac{d^2s}{dt^2}$，沿主法線的支量等於$\frac{v^2}{\rho}$，沿次法線的支量等於零。

125. 富列耐公式　我們用附表中的記號來記對於不動的坐標軸變動三標的軸線的方向餘弦。

	X	Y	Z
$\boldsymbol{t}$	α	β	γ
$\boldsymbol{n}$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{b}$	α_2	β_2	γ_2

富列耐公式給出這九個方向餘弦對 s 的微商的表達式。

單位向量 $\boldsymbol{t}$ 的支量是 α, β 與 γ，於是公式

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\boldsymbol{N}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$$

給出前三個富列耐公式:

(28) $$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho};\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{\rho};\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{\rho}.$$

同樣由公式 (19) 引出下面三個富列耐公式:

(28_1) $$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{\tau};\quad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{\beta_1}{\tau};\quad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{\gamma_1}{\tau}.$$

由變動三標直接得到 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{b}$，對 s 求微商，就得到:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}$$

這就給出最後三個富列耐公式:

(28_2) $$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau};\quad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\beta_2}{\tau};\quad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau}.$$

利用公式 (28)，不難證明，**若沿着線 (L) 曲率 $\frac{1}{\rho}$ 總等於零，則這是直線**。實際上，恒等式 $\frac{1}{\rho}=0$ 給出

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=0,$$

由此看出，α, β 與 γ 是常量。不過，我們知道 [1,160]，切線的方向餘弦 α, β 與 γ 各自等於 $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ 與 $\frac{dz}{ds}$ 現在這些微商是常

量，所以坐標 x，y，z 是 s 的一次多項式，就是說，這個線是直線。

同理不難證明，**若沿着一條曲線撓率總等於零，則這曲線是平面曲線。**

126. 密切平面 由向量 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 確定的平面叫做**曲線的密切平面**。向量 $\boldsymbol{b}$ 是這個平面的法線。我們來求這個向量的方向餘弦的表達式。

由於這是一個單位向量，它的方向餘弦就等於它的支量 b_x, b_y, b_z，由公式 (17) 推出：

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= b_x = t_y n_z - t_z n_y; \\
\beta_2 &= b_y = t_z n_x - t_x n_z; \qquad (29)\\
\gamma_2 &= b_z = t_x n_y - t_y n_x,
\end{aligned}
$$

其中 $t_x, \cdots n_x, \cdots$ 各爲向量 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 的支量。不過，以上我們看到，t_x，t_y，t_z 與 dx，dy，dz 成比例，而 n_x，n_y，n_z 與向量 $\boldsymbol{N}$ 的支量成比例，向量 $\boldsymbol{N}$ 的支量等於 $\frac{d^2x}{ds^2}$，$\frac{d^2y}{ds^2}$ 與 $\frac{d^2z}{ds^2}$，根據 (24) 這些支量顯然與下面的差成比例：

$$d^2xds - d^2sdx; \quad d^2yds - d^2sdy; \quad d^2zds - d^2sdz. \qquad (30)$$

在公式 (29) 中用 dx，dy，dz 來替代 t_x，t_y，t_z；用 (30) 中的差來替代 n_x，n_y，n_z，再展開括號，就得到次法線的方向餘弦與下列表達式成比例：

$$A = dyd^2z - dzd^2y; \quad B = dzd^2x - dxd^2z; \quad C = dxd^2y - dyd^2x, \qquad (31)$$

以前我們已經引用過它們 [124]。用 (x, y, z) 記曲線 (L) 上變點 M 的坐標，密切平面的方程就可以寫成下面的形狀：

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0.$$

127. 螺旋線 設有一個柱面，它的母線平行於 OZ 軸，並設它的位於平面 XY 上的導線是 (l)（圖 109）。引用曲線 (l) 的弧長 σ，弧長由這曲線與 OX 的交點 A 起始按照一定的

方向來計算，設導線的方程是

(32) $x=\varphi(\sigma);y=\psi(\sigma)$.

在 (l) 上截取某一段弧 AN，並作平行於 OZ 軸的線段 $NM=k\sigma$，這裏 k 是一個確定的數量係數（螺旋的旋率）。點 M 的軌跡就給出螺旋線 L，它畫在這個柱面上。這個線的參變方程顯然就是：

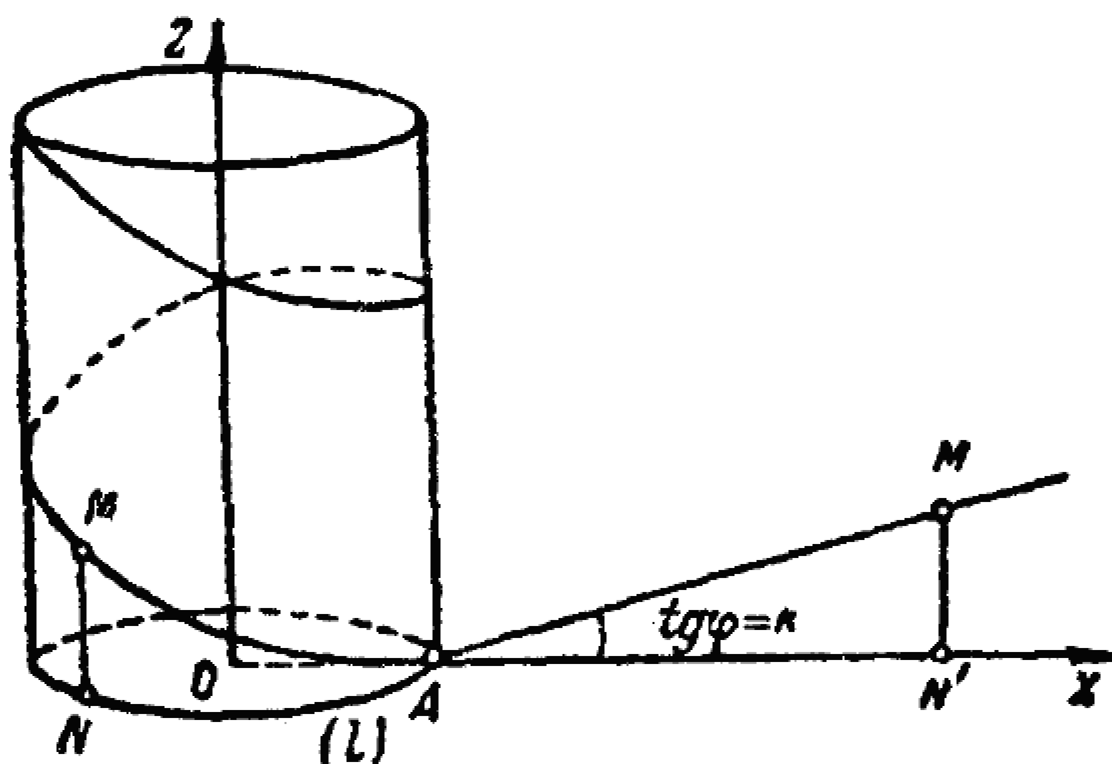


圖 109

(33) $$x=\varphi(\sigma);\quad y=\psi(\sigma);\quad z=k\sigma.$$

設由點 A 算起，曲線 (L) 的弧長是 s。我們就有：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=[\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)+k^2]d\sigma^2.$$

不過 $\varphi'(\sigma)$ 與 $\psi'(\sigma)$ 各自等於曲線 (l) 的切線與 OX 軸作成的角度的餘弦與正弦 [I, 70]，所以 $\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)=1$，上面這公式就可以寫成下面的形狀：

$$ds=\sqrt{1+k^2}\,d\sigma,$$

由此

$$s=\sqrt{1+k^2}\,\sigma.$$

現在我們來確定 (L) 的切線與 OZ 軸作成的角度的餘弦：

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{ds}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}};$$

這就給出螺旋線的第一個性質：螺旋線的切線與某一個不變的方向作成定角。

由 (38) 中第三個公式。在這情形下它給出：

$$0=\frac{\gamma_1}{\rho}\text{ 或 }\gamma_1=0,$$

於是推知螺旋線的主法線垂直於 OZ 軸，也就是垂直於柱面的母線。另一方面，它又垂直於螺旋線的切線。不難看出，在螺旋線上任何點，柱面的母線與螺旋線的切線所確定的平面是這柱面的切面，由以上推出，螺旋線的主法線垂直於切面。如此我們就得到螺旋線的第二個性質：在螺旋線的所有的點，它的主法線與所在的柱面的法線重合。

現在再看螺旋線的變動三標與 OZ 軸作成的角度的餘弦 γ,γ_1,γ_2，注意 $\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$，並且我們講過 γ 與 γ_1 都是常量，就可以斷定 γ_2 是個常量。在現在的情形下，(28_2) 中第三個公式給出 $-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau}=0$，由此我們得到比 $\frac{\rho}{\tau}$ 是個常量: 於是就有螺旋線的第三個性質: 沿着螺旋線，曲率半徑與撓率半徑之比是常量。我們用 r 來記平面曲線 (l) 的曲率半徑。注意曲率向量的平方等於坐標對弧長的二級微商的平方和，我們可以寫成

$$\frac{1}{r^2}=\varphi''^2(\sigma)+\psi''^2(\sigma),$$

而

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\frac{1}{(1+k^2)^2}$$

由此

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}+\frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}=\frac{1}{(1+k^2)^2r^2}$$

或 $\rho=(1+k^2)r$，就是說，在對應的點，螺旋線的曲率半徑與導線的曲率半徑只差一個常數因子。若導線 (l) 是圓周，柱面就是圓柱面，則 r 是常量， 於是 ρ 也是常量， 那時， 依照第三個性質，τ 也就是常量，這就是說，圓柱面上的螺旋線的曲率與撓率都是常量。

最後我們再提出螺旋線一個的重要性質。這個性質的結論是: 若要連接柱面上兩個點，則通過這兩點的螺旋線給出在柱上這兩點間的最短距離。 在這個關係中， 柱面上的螺旋線就完全類似平面上的直線。 這個性質通常這樣說: 螺旋線是柱面的短程線。 一般說來，給出曲面上兩點間的最短距離的線叫做這曲面上的短程線。

如果我們繞着通過 A 點的母線把柱面在 XZ 平面上舖開， 則根據弧長 AN 與線段 NM 之比保持常數值 $\frac{1}{k}$，螺旋線就在平面上畫出一條直線來。這樣把柱面舖開在平面上時，長度保持不變， 所以上述的螺旋線的性質——給出柱面上的最短距離——顯然成立。 注意，這個性質與螺旋線的第二個性質有直接的連繫， 第二個性質是說螺旋線的主法線與柱面的法線重合。 在幾何學中， 一般的可以證明: 任何曲面的短程線的主法線與這曲面的法線重合。

128.單位向量場 設 $\boldsymbol{t}$ 是一個單位向量場，就是在空間每一點有一個給定的單位向量 $\boldsymbol{t}$。我們講一個關於這個場的向量曲線的曲率向量 $\boldsymbol{N}$ 的簡單而且重要的公式。引用坐標

(x, y, z)及向量曲線的弧長s，可以寫成：

$$\frac{dx}{ds}=t_x;\quad \frac{dy}{ds}=t_y;\quad \frac{dz}{ds}=t_z.$$

我們來確定曲率向量的支量N_x：

$$N_x=\frac{dt_x}{ds}=\frac{\partial t_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial t_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial t_x}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

或

$$N_x=\frac{\partial t_x}{\partial x}t_x+\frac{\partial t_x}{\partial y}t_y+\frac{\partial t_x}{\partial z}t_z.$$

由恆等式

$$t_x^2+t_y^2+t_z^2=1$$

對x求微商得到：

$$t_x\frac{\partial t_x}{\partial x}+t_y\frac{\partial t_y}{\partial x}+t_z\frac{\partial t_z}{\partial x}=0.$$

把這個和由上面得到的N_x的表達式中減掉，就可以寫成

$$N_x=\left(\frac{\partial t_x}{\partial z}-\frac{\partial t_z}{\partial x}\right)t_z-\left(\frac{\partial t_y}{\partial x}-\frac{\partial t_x}{\partial y}\right)t_y,$$

就是說$N_x=(\operatorname{rot}\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t})_x$，顯然，對於其餘兩個支量可以得到同樣的結果，於是得到所要求的關於向量曲線的曲率向量的公式。

(34)　　　　$$\boldsymbol{N}=\operatorname{rot}\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}.$$

爲要使得向量曲線是直線，必須且僅須使得N的長度，就是曲率$\frac{1}{\rho}$，等於零[135]。由此得到：<u>爲要使得單位向量場$\boldsymbol{t}$的向量曲線是直線，必須且僅須使得</u>

(35)　　　　$$\operatorname{rot}\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t}=0$$

此外，我們講過，爲要有與向量曲線正交的曲面族存在，必須且僅須[101]

(36)　　　　$$\operatorname{rot}\boldsymbol{t}\quad\boldsymbol{t}=0$$

只有在$\operatorname{rot}\boldsymbol{t}=0$的情形條件(35)與(36)才能同時成立，因爲如果$\operatorname{rot}\boldsymbol{t}$不是零，則條件(35)相當於向量$\operatorname{rot}\boldsymbol{t}$與$\boldsymbol{t}$平行，而條件(36)相當於它們垂直。由此推知，只有在

rot $t=0$ 的情形，單位向量場 t 的向量曲線才是某一個曲面族的法線。這個命題在討論幾何光學時有重要的作用。

129. 曲面的參變方程 到現在爲止，我們考慮過的具有坐標軸的空間的曲面的方程，是顯示形式的 $z=f(x, y)$ 或隱示形式的

(37) $$F(x, y, z)=0.$$

曲面的方程可以寫成參變形式，用兩個無關的參變量 u 與 v 的函數來表達曲面上點的坐標：

(38) $$x=\varphi(u,v);\quad y=\psi(u,v);\quad z=\omega(u,v).$$

如果把這些個通過 u 與 v 來表達坐標的關係式代入到方程 (37) 的左邊，就應當得到一個關於 u 與 v 的恒等式。由這個恒等式對自變量 u 與 v 求微商，就得到：

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=0.$$

把這兩個方程考慮作關於 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial F}{\partial z}$ 的齊次方程，應用在 [104] 中所講的代數的預備定理，就得到：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=k\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}\right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

其中 k 是某一個比例係數。爲簡短起見，我們用下面的記號來記上面所寫的三個差：

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{d(y,z)}{d(u\ v)};$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{d(z,x)}{d(u,v)};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{d(x,y)}{d(u,v)}.$$

我們知道，在曲面的某一點 (x,y,z)，這曲面的切面的方程可以寫成下面的形狀 [1,160]:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

或者，用成比例的量來替換 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial F}{\partial z}$，就可以把切面的方程寫成:

$$(39)\quad \frac{d(y,z)}{d(u,v)}(X-x)+\frac{d(z,x)}{d(u,v)}(Y-y)+\frac{d(x,y)}{d(u,v)}(Z-z)=0.$$

我們知道，這個方程的係數與曲面的法線的方向餘弦成比例。

曲面上變點 M 的位置由參變量 u 與 v 的值來決定,於是這兩個參變量通常叫做曲面的點的坐標。

給參變量 u 與 v 以常數值，在曲面上就得到兩族線，我們叫做曲面的坐標線：沿着坐標線 $u=C_1$ 只是 v 改變，沿着坐標線 $v=C_2$ 只是 u 改變。這兩族坐標線給出曲面上的坐標網。

作爲特例，我們來考慮中心在坐標原點半徑爲 R 的球面。這個球面的參變方程可以寫成下面的形狀:

$$x=R\sin u\cos v;\quad y=R\sin u\sin v;\quad z=R\cos u.$$

在這情形下，坐標線 $u=C_1$ 與 $v=C_2$ 顯然就代表球面上的緯線與經線。

脫離開坐標軸，我們可以用由定點 O 到曲面上的變點 M 的變向量半徑 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 來表現曲面。這向量半徑對參變量的偏微商 $\boldsymbol{r}'_u$ 與 $\boldsymbol{r}'_v$ 顯然給出沿坐標線的切線方向的向量。依照 (38) 這兩個向量沿 OX,

OY，OZ 軸的支量就是 φ'_u，ψ'_u，ω'_u 以及 φ'_v，ψ'_v，ω'_v，由此看出，切面的方程 (39) 的係數恰好是向量積 $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ 的支量。這個向量積是一個垂直於切線 $\boldsymbol{r}'_u$ 與 $\boldsymbol{r}'_v$ 的向量，就是一個沿曲面的法線方向的向量。這個向量的長度的平方，顯然由向量 $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ 與它自己的數性積來表達，可以簡單說是由這個向量的平方來表達[1]。以下曲面的單位法線向量對我們有很重要的作用，我們可以把它寫成下面的形狀：

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{\sqrt{(\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)^2}}. \tag{40}$$

如果改變所寫的向量積的因子的順序，就得到相反方向的向量。以下我們將用一定的方式固定因子的順序，也就是用一定方式來固定曲面的法線方向。

在曲面上取某一點 M，通過這點在曲面上引任何一條曲線 (L)。一般說來，這個曲線不是坐標線，沿着它 u 與 v 都改變。如果算作在點 M 的近傍沿着 (L) v 是 u 的一個函數，且有微商，則這曲線的切線方向就由向量 $\boldsymbol{r}'_u + \boldsymbol{r}'_v \dfrac{dv}{du}$ 來確定。由此看出，**在曲面上的曲線的任何點 M，這曲線的切線方向由 $\dfrac{dv}{du}$ 在這點的值可以完全決定。**給切面下定義並求出它的方程 (38) 時，我們假定了在所考慮的點及其近傍函數 (38) 具有連續偏微商，並且在所考慮的點方程 (39) 的係數中至少有一個不等於零。例如，若係數 $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}$ 不等於零，則在所考慮的點的近傍由 (38) 中前兩個方程可以解出 u 與 v 來 [I,157]，就是說，可能通過 x 與 y 來表達 (u, v)，把這兩個表達式代入到 (38) 的第三個

1) 一般說來，若 $\boldsymbol{A}$ 是某一個向量，則我們用 $\boldsymbol{A}^2$ 來記這個向量的長度的平方，也就是數量積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$.

方程中，就給出這曲面在所考慮的點的近傍的顯示方程 $z=f(x,y)$。

130.高斯第一微分式 現在我們來考慮在所給的曲面上任何曲線的弧的微分的平方：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2.$$

去掉括號就得到所謂的**高斯第一微分式**：

$$ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)du\,dv+G(u,v)dv^2, \tag{41}$$

其中

$$\begin{cases} E(u,v)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \\ F(u,v)=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}; \\ G(u,v)=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{cases} \tag{42}$$

或

$$E=\mathbf{r}'^2_u;\quad F=\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{r}'_v;\quad G=\mathbf{r}'^2_v. \tag{42$_1$}$$

像在[119]中完全一樣，可以證明，坐標線 $u=C_1$ 與 $v=C_2$ 互相垂直的必要且充分條件是係數 F 等於零。在這特殊情形下，曲面上的曲坐標 u 與 v 叫做正交坐標系。

現在我們講通過表達式(41)的係數來表達曲面的面積單元的公式。我們考慮在曲面上的界於很近的兩對坐標線之間的微小面積（圖110）。設 (u,v) 是基本頂點 A 的坐標。邊 AD 與 AB 就各自是 $\mathbf{r}'_u du$ 與 $\mathbf{r}'_v dv$。把這微小的

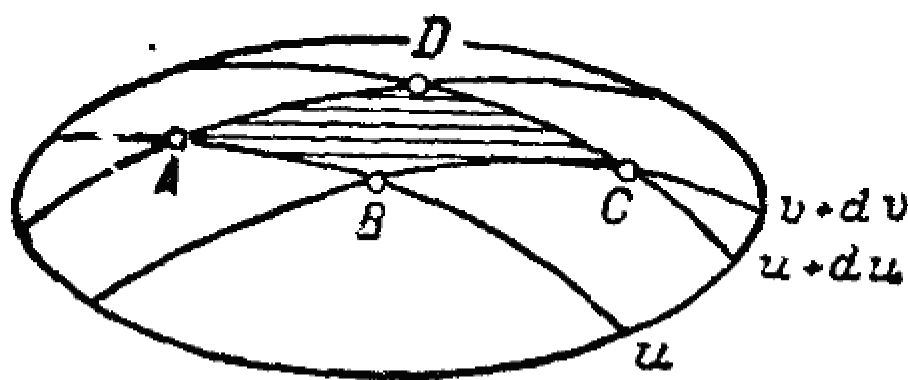


圖 110

面積考慮作平行四邊形〔參考 57〕，就可以用一個向量的長度作爲這個平行四邊形的面積的表達式，這個向量就是上述兩個向量的向量積：

$$dS=|\boldsymbol{r}'_u\,du\times\boldsymbol{r}'_v\,dv|=|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|\,du\,dv.$$

對於這個向量的長度的平方，我們有：

$$(\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

由此，根據〔124〕中恒等式(26)，

$$(\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v)^2=EG-F^2, \tag{43}$$

於是對於曲面的面積單元，結果就有：

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{44}$$

同理，把(43)代入到公式(40)中，可以把曲面的單位法線向量寫成下面的形狀：

$$\boldsymbol{m}=\frac{\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{45}$$

注意，根據(43)，差 $EG-F^2$ 是正的。

131. 高斯第二微分式 考慮曲面上的任何曲線 (L)，設 $\boldsymbol{t}$ 是它的單位切線向量。顯然，它垂直於曲面的單位法線向量，就是說 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{m}=0$。由這關係式對曲線 (L) 的弧長 s 求微商，就有：

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=0\ \text{或}\ \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})+\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=0,$$

其中 ρ 是曲率半徑，$\boldsymbol{n}$ 是曲線 (L) 的單位主法線向量。這等式可以寫成下面的形狀：

$$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{\rho}=-\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}\ \text{或}\ \frac{\cos\varphi}{\rho}=-\frac{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{m}}{ds^2},$$

其中 φ 是曲面的法線與曲線的主法線之間的角。通過坐標參變量 u 與 v 來表達微分 $d\boldsymbol{r}$ 與 $d\boldsymbol{m}$，可以寫成:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{-(\boldsymbol{r}'_u du+\boldsymbol{r}'_v dv)(\boldsymbol{m}'_u du+\boldsymbol{m}'_v d_v)}{ds^2} \tag{46}$$

去掉分子中的括號，就得到**高斯第二微分式**:

$$-(\boldsymbol{r}'_u du+\boldsymbol{r}'_v dv)(\boldsymbol{m}'_u du+\boldsymbol{m}'_v dv)=$$
$$=L(u,v)du^2+2M(u,v)dudv+N(u,v)dv^2,$$

其中

$$L=-\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_u;\quad M=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_u); \tag{47}$$
$$N=-\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_v,$$

公式(46)結果就是

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \tag{48}$$

現在我們再講係數 L, M 與 N 的一種表達式。由顯然的關係式

$$\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}=0,\ \boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}=0$$

對自變量 u 與 v 求微商，就得到四個關係式:

$$\boldsymbol{r}''_{u^2}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_u=0;\quad \boldsymbol{r}''_{uv}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v=0;$$
$$\boldsymbol{r}''_{uv}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_u=0;\quad \boldsymbol{r}''_{v^2}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_u=0,$$

由此，替代公式(47)，對於高斯第二微分式的係數，可以寫出下列的表達式:

$$L=\boldsymbol{r}''_{u^2}\cdot\boldsymbol{m};\quad N=\boldsymbol{r}''_{v^2}\cdot\boldsymbol{m}; \tag{49}$$
$$M=\boldsymbol{r}''_{uv}\cdot\boldsymbol{m}=-\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v=-\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_u.$$

回憶關於向量 $\boldsymbol{m}$ 的表達式(45)，可以把等式(49)寫成下面的形

狀:

$$(50)\qquad L=\frac{\boldsymbol{r}''_{u^2}\cdot(\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}};\quad M=\frac{\boldsymbol{r}''_{uv}\cdot(\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$$N=\frac{\boldsymbol{r}''_{v^2}\cdot(\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

現在我們考慮已知的曲面方程是顯示式的情形:

$$(51)\qquad z=f(x,y).$$

在這情形下，x 與 y 有參變量的作用，關於向量半徑以及它對參變量的微商我們就有下列的表達式:

$$\boldsymbol{r}(x,y,z);\ \boldsymbol{r}'_x(1,0,p);\ \boldsymbol{r}'_y(0,1,q)$$

$$\boldsymbol{r}''_{x^2}(0,0,r);\ \boldsymbol{r}''_{xy}(0,0,s);\ \boldsymbol{r}''_{y^2}(0,0,t),$$

其中

$$(52)\qquad p=\frac{\partial f}{\partial x};\quad q=\frac{\partial f}{\partial y};\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y};\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

應用公式 (42_3) 與 (50)，就得兩個高斯微分式的係數的表達式:

$$E=1+p^2;\ F=pq;\ G=1+q^2$$

$$(53)\quad L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\ M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\ N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

現在我們用一定的方式來選擇坐標軸，就是，取曲面上某一點 M_0 作為坐標原點，坐標軸 OX 與 OY 取在這曲面在點 M_0 的切面上，而 Z 軸要在曲線的法線方向。用附標零來記各個量在點 M_0 的值。當這樣選定坐標軸時，在點 M_0 曲面的法線與 OX, OY 作成的角度的餘弦等於零，我們得到 [62] $p_0=q_0=0$，並且公式 (53) 給出，在點M_0:

$$(54)\qquad L_0=r_0;\quad M_0=s_0;\quad N_0=t_0.$$

132. 關於曲面上的曲線的曲率 我們再來考慮公式 (48)，它的右

邊依賴於兩個高斯微分式的係數以及比 $\frac{dv}{du}$. 只要把分子分母都用 du^2 除，就直接看出這個事實。所說的係數是參變量 (u, v) 的函數，在曲面的給定的點它們具有確定的數值。至於比 $\frac{dv}{du}$，我們講過 [129]，由它可以決定曲線的切線方向。所以我們可以肯定，只要固定好曲面上的點以及我們所考慮的曲面上的曲線的切線方向，則公式 (48) 的兩邊有確定的值。如果在曲面上通過一個固定的點取兩條曲線，它們不只切線方向相同，並且主法線的方向也相同，則對於這兩個曲線角度 φ 也相同，所以根據公式 (48)，ρ 的大小是相同的，也就是說，我們有下面這個定理:

第一定理　曲面上在某一點具有相同的切線與主法線的兩條曲線，在這點曲率半徑也相同。

若有曲面上任何一條曲線 (L) 及其上某一點 M，則作出通過這曲線在點 M 的切線與主法線的平面，我們就得到這平面與曲面的截線，它是一條平面曲線，而與所給的曲線具有相同的切線與主法線，所以曲率也相同。如此，由第一定理，使得對於曲面上任何曲線的研究，可以化爲對於這曲面的一個平面截線的研究。

曲面上由通過這曲面在點 M 的法線的任何一個平面截割而成的截線叫做法截線。顯然，我們有無窮多的法截線，如果在曲面的切面上給定了切線方向，也就是給定了比 $\frac{dv}{du}$ 的值，就可以固定一個確定的法截線。注意，法截線的主法線與向量 $\boldsymbol{m}$ 的方向或者一致或者相反，所以角度 φ 或者等於 0 或者等於 π，於是推知 $\cos\varphi = \pm 1$。

現在我們考慮曲面上任何一條曲線 (L) 及其上一個確定的點 M。在點 M 與曲線 (L) 具有公共切線的法截線叫做在點 M 對應於曲線 (L)

的法截線。設 ρ 是曲線 (L) 的曲率半徑，R 是對應的法截線的曲率半徑。因爲這兩條曲線具有相同的切線，則對於這兩條曲線公式 (48) 右邊是相同的，於是我們可以寫成

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{\pm 1}{R},\ \text{就是}\ \rho=\pm R\cos\varphi, \tag{55}$$

其中 φ 是曲線的主法線與曲面的法線之間的角。公式 (55) 給出下面這個定理。

第二定理(梅尼定理)　曲面上任何曲線的曲率半徑等於對應的法截線在這點的曲率半徑乘以曲面的法線與曲線的主法線之間的角度的餘弦。 這個定理也可以敍述如下：曲面上任何曲線的曲率半徑等於在曲面的法線上截取對應的法截線的曲率半徑時它在這曲線的主法線上的投影。

在球面的情形，如果我們取球面上任何一個圓周作爲曲線 (L)，法截線就是一個大圓周，於是公式 (55) 化爲所述兩個圓周的半徑之間的顯然的關係式 (圖 111)。

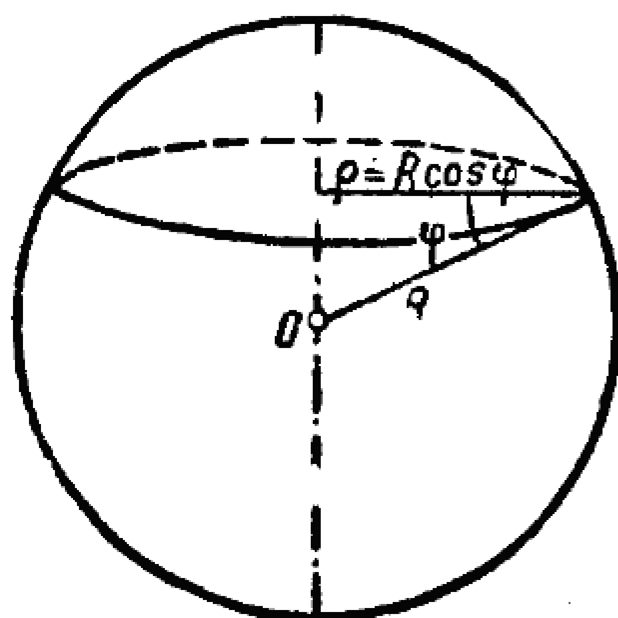


圖 111

依照第二定理，對於曲面上的曲線的曲率的研究就化爲對於在給定的點曲面的法截線的曲率的研究。我們講過，在公式 (48) 中對於法截線需要算作 $\cos\varphi=\pm 1$。遇到負號時，我們規定 ρ 是負的，就是說，如果法截線的主法線與向量 $\boldsymbol{m}$ 的方向相反，就規定算作法截線的曲率半徑是負的。這樣規定時，對於法截線我們就有公式

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{56}$$

我們還要提出，在這公式的右邊諸微分式的係數有確定的值，因

為我們固定了曲面上的某一點，於是$\frac{1}{R}$只依賴於比$\frac{dv}{du}$的值，就是只依賴於切線方向的選擇。公式(56)右邊的分母總有正值，因為它表達ds^2的值，所以法截線的曲率$\frac{1}{R}$的符號由分子的符號來確定，可以表示成下列三種情形:

1.若在所取的點$M^2-LN<0$，則對於所有的法截線$\frac{1}{R}$具有相同的符號，就是說，所有的法截線的主法線的方向在相同的一側。曲面上這樣的點叫做**橢圓性的點**。

2.若$M^2-LN>0$，則$\frac{1}{R}$就有不同的符號，就是說，在所取的點，有的法截線的主法線方向相反。曲面上這樣的點叫做**雙曲線性的點**。

3.若$M^2-LN=0$，則這時公式(56)右邊的分子是個整平方，於是$\frac{1}{R}$不變號，而且在某一個法截線的位置等於零。曲面上這樣的點叫做**拋物線性的點**。

注意，在雙曲線性點的情形下，公式(56)右邊的分子中的三項式變號，所以要等於零，並且有兩個法截線的曲率等於零。在橢圓性點的情形下沒有這樣的法截線。

像我們在[131]中所作的一樣，選定坐標軸，取曲面上所取的點作為坐標原點，在切面上取OX, OY軸。

根據公式(54)，等式(56)可以寫成:

$$\frac{1}{R}=\frac{r_0dx^2+2s_0dxdy+t_0dy^2}{ds^2}$$

法截線的切線位於XY平面上，並且比$\frac{dx}{ds}$與$\frac{dy}{ds}$各自等於$\cos\theta$與$\sin\theta$，其中θ是切線與X軸作成的角度。如此，上面這公式可以寫成:

$$\frac{1}{R}=r_0\cos^2\theta+2s_0\cos\theta\sin\theta+t_0\sin^2\theta. \tag{57}$$

在這公式中，我們有曲率 $\frac{1}{R}$ 依賴於切線方向的顯示式，切線方向是由角度 θ 來表現的。這時，若 $s_0^2-r_0t_0<0$，則點是橢圓性的，在 $s_0^2-r_0t_0>0$ 的情形是雙曲線性的，在 $s_0^2-r_0t_0=0$ 的情形是拋物線性的。

在 $s_0^2-r_0t_0<0$ 的情形，函數 $z=f(x,y)$ 在所考慮的點就有等於零的極大值或極小值 [I, 163]，就是說，在這點附近曲面分佈在切面的一側。當 $s_0^2-r_0t_0>0$ 時，沒有極大值也沒有極小值，就是說，在所考慮的點的任何近傍，曲面分佈在切面的兩側。最後，在拋物線性點的情形，$s_0^2-r_0t_0=0$，對於切面來講，曲面的位置不一定怎麼樣。

由公式 (53) 直接推出，當任意選擇軸 XYZ 時，(M^2-LN) 的符號與 (s^2-rt) 的符號相同，於是推知，當 $s^2-rt<0$ 時，點是橢圓性的；當 $s^2-rt>0$ 時是雙曲線性的；當 $s^2-rt=0$ 時是拋物線性的。

在同一個曲面上可能有不同類型的點。例如，由一個圓周環繞一個與圓周在同一平面上而在其外的直線轉成的環面 [I, 107]，位於外側的點是橢圓性點，位於內側的點是雙曲線性點。這兩個區域由上下兩個極端的平行環線分開，這兩個環線上所有的點都是拋物線性點。

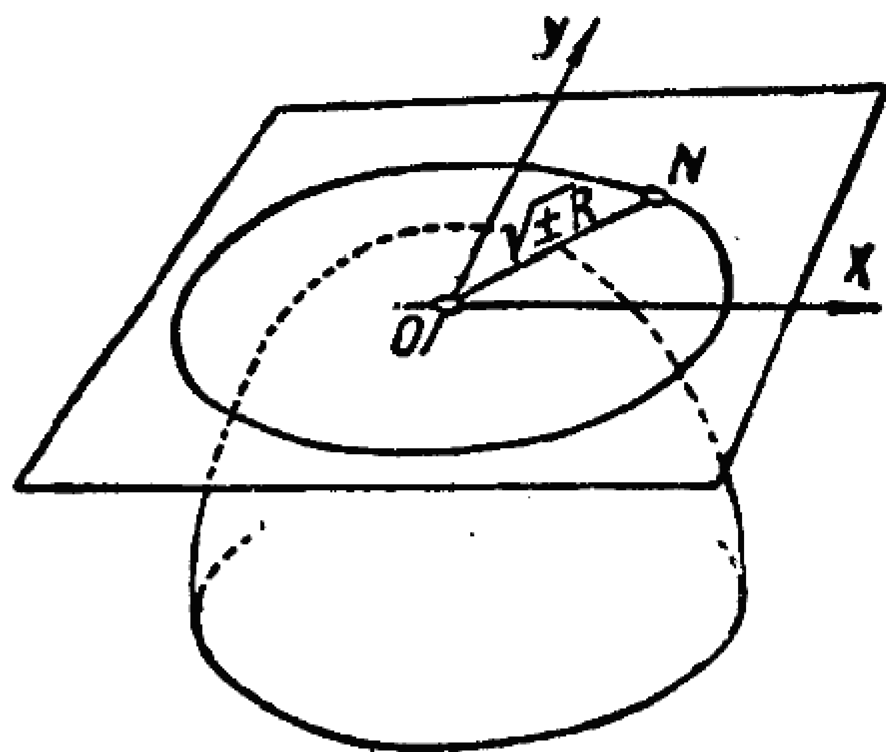


圖 113

133. 杜潘指示線與尤拉公式

像在上一段中所作的一樣，固定好坐標軸，在切面上，就是 XY 平面上按照下述方法作一條輔助

曲線：在過O點的每一個向量半徑上截一個線段 $ON=\sqrt{\pm R}$，其中 R 是以這向量半徑爲切線的法截線的曲率半徑。我們所取的(±)號要使得根號下是正的。所作的線段的端點 N 的軌跡是一條曲線，它叫做**杜潘指示線**。依照作法，這個曲線有下述的性質：它的每一個向量半徑的平方給出以這向量半徑爲切線的法截線的曲率半徑的絕對值（圖 112）。

我們來求指示線的方程。設 (ξ,η) 是指示線上的變點的坐標。依照作法

$$\xi=\sqrt{\pm R}\cos\theta;$$
$$\eta=\sqrt{\pm R}\sin\theta,$$

就是

$$\xi^2=\pm R\cos^2\theta;$$
$$\eta^2=\pm R\sin^2\theta,$$

其中 R 是正的時取上面的符號，R 是負的時取下面的符號。把等式 (57) 的兩邊乘以 $\pm R$，顯然就得到：

$$r_0\xi^2+2s_0\xi\eta+t_0\eta^2=\pm 1. \tag{58}$$

這就是杜潘指示線的方程。當法截線繞着曲面的法線轉時曲率半徑的大小的改變情形，由這個曲線給出很清楚的幾何表示法。在橢圓性點的情形，曲線 (58) 是橢圓，在右邊需要取確定的符號。在雙曲線性點的情形，方程 (58) 對應於兩條共軛雙曲線。在拋物線性點的情形，方程 (58) 的左邊是完全平方，它可以寫成下面的形狀：

$$k(a\xi+b\eta)^2=\pm 1, \quad \text{就是} \quad (a\xi+b\eta)^2=\pm\frac{1}{k}=l^2$$

或

$$a\xi+b\eta=\pm l,$$

於是我們有兩條平行線。在全部三種情形下，點 O 是曲線的中心，並

且曲線有兩個對稱軸。我們可以取 X, Y 軸與這兩個對稱軸重合，這時，我們知道，方程(58)的左邊就沒有含乘積 $\xi\eta$ 的項，就是說，當這樣選擇坐標軸時，應當是 $s_0 = 0$，於是當這樣選擇坐標軸時，公式(57)給出

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\theta + t_0 \sin^2\theta. \tag{59}$$

我們來看係數 r_0 與 t_0 的幾何意義。在公式(59)中讓 $\theta=0$，我們得到切於X軸的法截線的曲率 $\frac{1}{R_1}$，於是 $r_0=\frac{1}{R_1}$. 同理，讓 $\theta=\frac{\pi}{2}$，我們得到 $t_0=\frac{1}{R_2}$，其中 $\frac{1}{R_2}$ 是切於 Y 軸的法截線的曲率。把求得的 r_0 與 t_0 的值代入到公式(59)中，就得到尤拉公式：

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{60}$$

注意，X, Y 軸的方向與曲線(58)的對稱軸的方向一致，顯然，在這兩個方向，等於 $\sqrt{\pm R}$ 的指示線的向量半徑有極大值或極小值。對於 R 與曲率 $\frac{1}{R}$ 也有同樣的情況，我們把這裏得到的結果敘述成下面的定理：

第三定理 在曲面的每一點的切面上存在有兩個互相垂直的方向，在這兩個方向，曲率 $\frac{1}{R}$ 達到極大值與極小值，並且若 $\frac{1}{R_1}$ 與 $\frac{1}{R_2}$ 是對應於這兩個方向的曲率的值，則任何法截線的曲率由公式(60)來表達，其中 θ 是所考慮的法截線的切線與給出曲率 $\frac{1}{R_1}$ 的方向作成的角度。

曲率半徑 R_1 與 R_2 叫做在所考慮的點的的**截線的主曲率半經**。切面上對應於它們的兩個方向叫做主方向。此外，在雙曲線性點的情形，

我們再提出切面上兩個有用的方向，就是杜潘指示線的漸近線的方向。對於這兩個漸近線的方向，指示線的向量半徑等於無窮大，於是在所考慮的點對應的法截線的曲率等於零。

在橢圓性點的情形，R_1 與 R_2 具有相同的符號。在雙曲線性點的情形，這兩個數異號。在拋物線性點的情形，主法截線之一的曲率半徑等於零，例如算作 $\frac{1}{R_2}=0$，在拋物線性點的情形，我們就有公式

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}$$

還要提出曲面上橢圓性點的一個特殊情形，就是當 R_1 與 R_2 相同時的情形，$R_1=R_2$。這時公式(60)給出 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}$，就是說，在這情形下，在所考慮的點所有的法截線具有相同的曲率。曲面上這樣的點叫做**圓性點**。在這樣的點的附近，曲面非常逼近於球面。可以證明所有的點都是圓性點的唯一的曲面是球面。

134. 主曲率半徑與主方向的確定　關於法截線的曲率的基本公式(56)可以寫成

(61)　$(LR-E)du^2+2(MR-F)dudv+(NR-G)dv^2=0.$

用 dv^2 除並引用表現法截線的切線方向的輔助量 $t=\frac{dv}{du}$，就得到方程：

$$\varphi(R,t)=(LR-E)t^2+2(MR-F)t+(NR-G)=0,$$

由這個方程法截線的曲率半徑 R 就依賴於 t 來確定。在主方向 R 的大小達到極大值或極小值，所以 R 對 t 的微商應當等於零。不過這個微商顯然用下面這公式表達 [I, 69]:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi}{\partial R}},$$

於是在主方向微商$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$應當等於零，就是

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (LR-E)t+(MR-F)=0.$$

替換$t=\frac{du}{dv}$，再乘以dv，就得到：

$$(LR-E)du+(MR-F)dv=0. \tag{62}$$

如果我們用du^2除方程(61)，並取表現切線方向的$t_1=\frac{dv}{du}$作變量，則同理對於主方向就得到等式：

$$(MR-F)du+(NR-G)dv=0. \tag{62$_1$}$$

把等式(62)與(62_1)中含有dv的項移到等號之右，再用其中一個等式逐項除另一個等式，就有：

$$\frac{LR-E}{MR-F}=\frac{MR-F}{NR-G}$$

或

$$(LN-M^2)R^2+(2FM-EN-GL)R+(EG-F^2)=0. \tag{63}$$

由這個二次方程給出R_1與R_2.用R^2除這個方程，就得到用以確定主法截線的曲率的二次方程，就是確定$\frac{1}{R_1}$與$\frac{1}{R_2}$的二次方程：

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}+(2FM-EN-GL)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0. \tag{64}$$

表達式

$$K=\frac{1}{R_1 R_2} \tag{65}$$

叫做在指定的點曲面的**高斯曲率**，而表達式

(66) $$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

叫做曲率中值。由二次方程 (64) 直接得到高斯曲率與曲率中值的表達式，通過高斯第一與第二微分式的係數來表達：

(67) $$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2};\quad H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}.$$

把方程 (62) 與 (62_1) 寫成下面的形狀：

$$(Ldu+Mdv)R=Edu+Fdv;\ (Mdu+Ndv)R=Fdu+Gdv.$$

用一個逐項除另一個就消去字母 R，再經過初等變換就得到方程：

(68) $$(EM-FL)du^2+(EN-GL)dudv+(FN-GM)dv^2=0.$$

用 du^2 除它，就有關於 $\frac{dv}{du}$ 的二次方程。它的兩個根給出在曲面每一點表現主方向的量：

(69) $$\frac{dv}{du}=\varphi_1(u,\ v);\quad \frac{dv}{du}=\varphi_2(u,\ v);$$

135. 曲率線 **所謂曲面上的曲率線是指曲面上的這樣的曲線，在它的每一點它的切線方向都在主方向。**由於在曲面的每一點有兩個主方向，所以在曲面上我們有兩族曲率線，而且這兩族是互相正交的。如此，所有曲率線的全部給出曲面上一個正交網。方程 (68)，或者與它相當的方程 (69) 是曲率線的微分方程。求出它們的積分，通過 u 來表達 v，再把這個表達式代入到曲面的方程中，就得到曲率線的方程。

設在曲面上給定某一個坐標網。我們來求在什麼條件下這個坐標網是曲率線網。首先，如果這個網要是曲率線網，則它應當是正交網，就是說應當 $F=0$。此外，如果坐標線 $u=C_1$ 與 $v=C_2$ 是曲率線，則

當用常數代入作 u 或 v 時應當滿足方程(68)。注意已經得到的結果 $F=0$，就有 $GM=0$ 以及 $EM=0$。不過我們講過差 $EG-F^2$ 是正的，所以 E 與 G 不可能等於零，於是由上面兩個公式推出 $M=0$。總之，條件 $F=M=0$ 是使得坐標網是曲率線網的必要條件。反之，若這個條件成立，則曲率線的微分方程(68)有解 $u=C_1$ 與 $v=C_2$，就是說，坐標線是曲率線，於是我們得到下面這個定理：**使得坐標網是曲率線網的必要且充分條件是在整個曲面上高斯的兩個微分式的中間項的係數等於零**，就是 $F=M=0$。

可以用另一種方式來確定曲率線，以替代我們在本段開始所給的定義。考慮在曲面上的某一條曲線 (L)。沿着這條曲線的曲面的法線形成具有一個參變量的直線族，這個參變量是確定點在 (L) 上的位置的，一般說來，這個直線族沒有包絡。不過若用一定的分式來選擇曲線 (L)，則可能存在有這樣的包絡[1]。我們現在求在什麼條件下會有包絡。

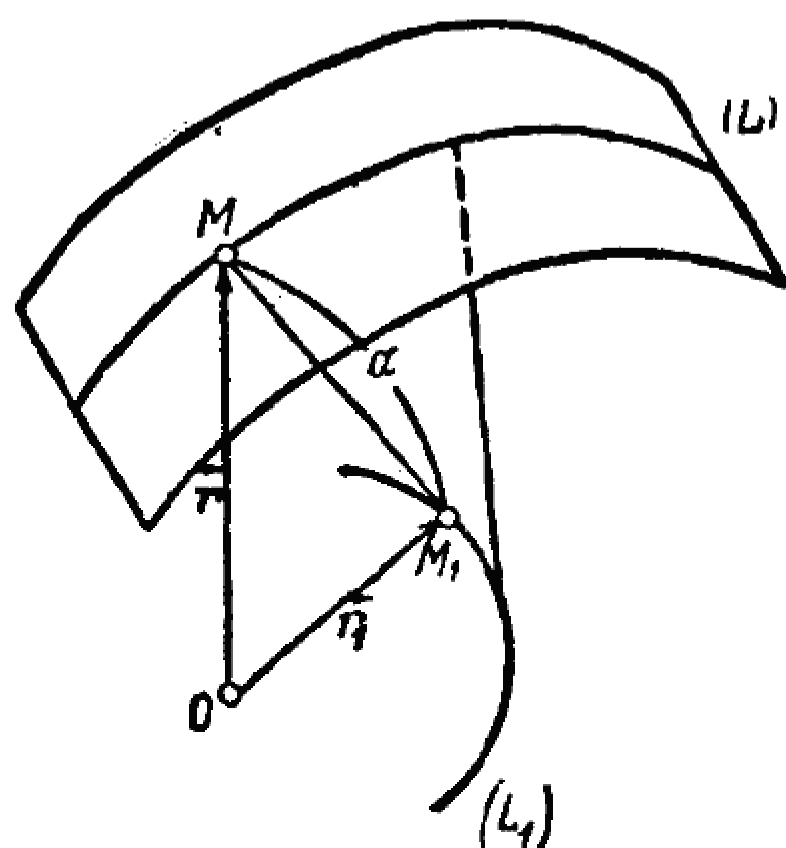


圖 113

設我們在曲面上選擇這樣一條線 (L)，使得沿着 (L) 的曲面的法線有包絡 (L_1) (圖 113)。用 $\boldsymbol{r}$ 記曲線 (L) 上的點的向量半徑，用 $\boldsymbol{r}_1$ 記 (L_1) 的對應的向量半徑，用 a 記曲面的法線在 (L) 與 (L_1) 之間的一段的代數的長度，顯然我們可以寫成：

(70) $$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{m},$$

1) 在空間一般的具有一個參變量的直線族沒有包絡，就是說，這些直線不可能都是任何一條曲線的切線。只有在例外的情形下可能有包絡。

其中 $\boldsymbol{m}$ 是曲面的單位法線向量。既然曲線 (L_1) 是法線的包絡，則沿它的切線方向的向量 $d\boldsymbol{r}_1$ 應當與向量 $\boldsymbol{m}$ 平行，於是我們可以寫成，$d\boldsymbol{r}_1=b\boldsymbol{m}$，其中 b 是某一個數量。由公式 (70) 求微分，就得到:

(71) $b\boldsymbol{m}=d\boldsymbol{r}+ad\boldsymbol{m}+da\cdot\boldsymbol{m}$，就是 $d\boldsymbol{r}+ad\boldsymbol{m}=c\boldsymbol{m}$，

其中 c 是某一個數量。我們來證明：$c=0$. 爲此，求 (71) 的兩邊與 $\boldsymbol{m}$ 的數量積:

$$d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}+ad\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=c.$$

向量 $d\boldsymbol{r}$ 是在 (L) 的切線方向的，就是說，它是垂直於 $\boldsymbol{m}$ 的，於是 $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}=0$. 此外，由等式 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=1$ 推出 $d\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=0$，於是上面這等式給出 $c=0$，所以 (71) 可以寫成

(72) $$d\boldsymbol{r}+ad\boldsymbol{m}=0.$$

這個公式通常叫做柔德黎格公式 (Olinde Rodrigues)。我們導出這公式時假定了沿着 (L) 的曲面的法線有包絡。現在我們反過來設沿着曲面上某一條曲線 (L) 公式 (72) 成立。這時公式 (70) 就確定某一條曲線 (L_1)。由這公式求微分並注意 (72)，就得到：$d\boldsymbol{r}_1=da\boldsymbol{m}$，就是說，向量 $\boldsymbol{m}$ 的方向與 (L_1) 的切線方向平行。換句話說，沿着 (L) 的曲面的法線是 (L_1) 的切線。於是公式 (72) 給出沿着 (L) 的曲面的法線具有包絡的必要且充分條件。注意，包絡可能是一個點，那時法線形成柱面或錐面，可以證明條件 (72) 仍然應當成立。

把 (72) 寫成展開的形狀:

$$\boldsymbol{r}'_u du+\boldsymbol{r}'_v dv+a(\boldsymbol{m}'_u du+\boldsymbol{m}'_v dv)=0$$

再求乘以 $\boldsymbol{r}'_u$ 的數量積。

根據公式 (42_1)，(47) 與 (49)，我們得到:

$$Edu+Fdv+a(-Ldu-Mdv)=0,$$

而這就是當 $a=R$ 時的等式 (62)。同理，求與 $\boldsymbol{r}'_v$ 的數量積就得到等

式 (62_1)。反之，不難證明，由確定主曲率半徑與主方向的等式 (62) 與 (62_1) 當 $a=R$ 時可以得到公式 (72)。我們現在不證。如此，法線的包絡存在的條件 (72) 就相當於 (62) 與 (62_1)，其中 a 是主曲率半徑之一的大小。上述的理由引導我們得到下面這個結論：**曲面的曲率線由下面這個性質突出的表現，沿着這個曲線的曲面的法線具有包絡（或者形成錐面或柱面），並且界於曲面與包絡之間的法線的一段長等於主曲率半徑之一。**

某一平面曲線繞着位於它所在的平面上的一個軸廻轉時，所得到的廻轉面的曲率線就是它的經線與緯線，沿着經線，曲面的法線形成平面，沿着緯線形成錐面。

136. 杜潘定理 設在空間有三族互相垂直的曲面

$$\varphi(x, y, z)=q_1; \quad \psi(x, y, z)=q_2; \quad \omega(x, y, z)=q_3$$

它們形成一個空間的正交曲坐標網 [119]。由原點到空間的變點 M 的向量半徑 $\boldsymbol{r}$ 由這點的曲坐標 q_1，q_2 與 q_3 來表現。偏微商 $\boldsymbol{r}'_{q_1}$，$\boldsymbol{r}'_{q_2}$，$\boldsymbol{r}'_{q_3}$ 給出沿坐標線的切線方向的向量，坐標正交的條件可以寫成下面的向量形式：

$$\boldsymbol{r}'_{q_2}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_3}=0; \quad \boldsymbol{r}'_{q_3}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_1}=0; \quad \boldsymbol{r}'_{q_1}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_2}=0. \tag{73}$$

第一個等式對 q_1 求微商，第二個對 q_2 求微商，第三個對 q_3 求微商，就有：

$$\boldsymbol{r}''_{q_1q_2}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_3}+\boldsymbol{r}'_{q_2}\cdot\boldsymbol{r}''_{q_1q_2}=0$$

$$\boldsymbol{r}''_{q_2q_3}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_1}+\boldsymbol{r}'_{q_3}\cdot\boldsymbol{r}''_{q_2q_3}=0$$

$$\boldsymbol{r}''_{q_1q_3}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_2}+\boldsymbol{r}'_{q_1}\cdot\boldsymbol{r}''_{q_2q_3}=0.$$

由此直接得到：

$$\boldsymbol{r}''_{q_1q_2}\cdot\boldsymbol{r}_{q_3}=\boldsymbol{r}''_{q_2q_3}\cdot\boldsymbol{r}_{q_1}=\boldsymbol{r}''_{q_3q_1}\cdot\boldsymbol{r}_{q_2}=0$$

對照三個等式：

$$\boldsymbol{r}'_{q_1}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_3}=\boldsymbol{r}'_{q_2}\cdot\boldsymbol{r}'_{3}=\boldsymbol{r}'_{q_1q_2}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_3}=0$$

由它們推知向量 $\boldsymbol{r}'_{q_1}$，$\boldsymbol{r}_{q_2}$ 與 $\boldsymbol{r}''_{q_1q_2}$ 垂直於同一個向量 $\boldsymbol{r}_{q_3}$，於是它們是共面的，由此推知 [105]：

(74) $$\boldsymbol{r}''_{q_1q_2}\cdot(\boldsymbol{r}'_{q_1}\times\boldsymbol{r}'_{q_2})=0.$$

現在我們來考慮坐標曲面 $q_3=C$。在其上參變量 q_1 與 q_2 是坐標參變量，坐標線 $q_1=C$ 與 $q_2=C$ 就是所取的曲面與我們的空間正交坐標的其餘兩族坐標曲面中的曲面的交線。我們有過下面的公式 [130，131]：

$$F=\boldsymbol{r}'_{q_1}\cdot\boldsymbol{r}'_{q_2};\quad M=\frac{\boldsymbol{r}''_{q_1q_2}\cdot(\boldsymbol{r}'_{q_1}\times\boldsymbol{r}'_{q_2})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

於是等式 (73) 與 (74) 說明，在這情形下 $F=M=0$，就是說，坐標線 q_1 與 q_2 是曲面 $q_3=$ 常數的曲率線，這就引出下述的杜潘定理：**若在空間有三族互相正交的曲面，在不同兩族中的任何兩個曲面的交線是這兩個曲面的曲率線。**

137. 例 1. 扁迴轉橢圓面的方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>c^2)$$

可以寫成下面形狀的參變式：

$$x=a\cos u\sin v;\quad y=a\sin u\sin v;\quad z=c\cos v.$$

顯然，坐標線 $u=c_1$ 是通過迴轉軸的平面 $y=x\operatorname{tg}c_1$ 與這橢圓面的交線，也就是經線，坐標線 $v=c_2$ 是垂直於迴轉軸的平面 $z=c\cos c_2$ 與橢圓面的交線，也就是緯線。應用 [130，131] 中公式 (42) 與 (50)，並注意 x，y，z 是向量 $\boldsymbol{r}$ 的支量，就得到：

$$E=a^2\sin^2 v;\quad F=0;\quad G=a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v;$$

$$L=\frac{ac\sin^2 v}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}};\quad M=0;\quad N=\frac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}}$$

由等式 $F=M=0$ 可以想到經線與緯線是迴轉橢圓面的曲率線。其餘的係數只依賴於參

變量 v，而 v 是表現經線上的點的位置的。顯然主方向與經線及緯線的切線方向重合。在這情形下，表達式 $(LN-M^2)$ 在整個曲面上是正的，就是說，在這橢圓面的所有的點都是正的。不必計算各別的主曲率半徑，可以求出高斯曲率的表達式：

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{c^2}{(a^2\cos^2v+c^2\sin^2v)^2}.$$

2.把二次錐面的方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

寫成顯示式：

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

直接求微商，不難得到：

$$p=\frac{c^2x}{a^2z};\quad q=\frac{c^2y}{b^2z};\quad r=\frac{c^4y^2}{a^2b^2z^3};\quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3};\quad t=\frac{c^4x^2}{a^2b^2z^3}$$

利用公式 (53)，可以確定高斯微分式的所有的係數。只是要提出，在這情形下 $rt-s^2=0$，就是說，曲面上所有的點都是拋物線性點，並且有一個主曲率半徑等於無窮大。顯然，對應的主方向與錐面的母直線重合。

3.考慮雙曲拋物面

$$z=\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}.$$

在這情形下 $r=\frac{1}{a^2}$，$s=0$，$t=-\frac{1}{b^2}$，所以 $rt-s^2<0$，於是曲面上任何點都是雙曲線性點。在這情形下，杜潘指示線由兩個共軛雙曲線組成，而且這曲面的兩個母直線就是杜潘指示線的漸近方向。對於單葉拋物面我們也有類似的情況。

4.空間的普通直角坐標，球面坐標與柱面坐標都是簡單的空間正交坐標的例。我們再講一種這樣的坐標的例。考慮含有參變量 ρ 的二次曲面的方程：

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0, \tag{75}$$

其中 $a^2>b^2>c^2$。對於固定的點 $M(x,y,z)$，消去分母，就得到一個關於 ρ 的三次方程。不難證明，這個方程有三個實根 u,v 與 w，並且它們有下列的界限：

(76) $+\infty>u>-c^2;\quad -c^2>v>-b^2;\quad -b^2>w>-a^2.$

實際上，當ϱ取很大的正值時，方程(75)的左邊逼近(−1)而有(−)號，當ϱ的值比$(-c^2)$略大時，$\frac{z^2}{c^2+\varrho^2}$這一項有很大的正值，於是方程(75)的左邊有(+)號。如此在區間$(-c^2,\infty)$內應當存在有這樣一個ϱ的值，使得方程(75)的左邊等於零。用類似的方法可以肯定在區間$(-b^2,-c^2)$與$(-a^2,-b^2)$內有根存在。(u,v,w)三個數叫做所取的點$M(x,y,z)$的橢圓坐標。在以上的討論中我們假定點(x,y,z)的三個坐標都不等於零。否則，對於ϱ我們得到的方程就低於三次。例如，若$z=0$，而x與y不等於零，則方程(75)給出u與v，而w就需要算作等於$(-c^2)$。

現在我們來討論在橢圓坐標系中的坐標曲面。代入$\varrho=u$到方程(75)中，其中u是區間$(-c^2,+\infty)$中某一個數，就得到曲面

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1, \tag{77}$$

它顯然是個橢圓面，因爲根據(76)中第一個不等式，方程(77)的三個分母都是正的。讓$\varrho=v$，其中v在區間$(-b^2,-c^2)$中，就得到單葉雙曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1, \tag{78}$$

因爲在這情形下$a^2+v>b^2+v>0$而$c^2+v<0$。最後，當$\varrho=w$時，其中w在區間$(-a^2, -b^2)$中，就得到雙葉雙曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1. \tag{79}$$

我們現在證明，所得到的三個坐標曲面互相正交。方程(77)與(78)相減就得到:

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=0. \tag{80}$$

曲面(77)與(78)的法線的方向餘弦各與下列兩組數成比例[I,155]:

$$\frac{x}{a^2+u};\quad \frac{y}{b^2+u};\quad \frac{z}{c^2+u}\quad 與\quad \frac{x}{a^2+v};\quad \frac{y}{b^2+v};\quad \frac{z}{c^2+v},$$

由等式(80)表達出這兩個法線互相垂直，就是說，我們證明了曲面(77)與(78)的正交性。同理可以證明其餘的坐標面互相正交。利用杜潘定理，可以肯定，固定的橢圓面(77)上的兩族曲率線可以由這橢圓面與族(78)及(79)中所有可能相交的雙曲面的交線得來。

138.高斯曲率 現在我們來看關於高斯曲率的概念的幾何意義。取這個曲面的曲率線作爲曲面的坐標線。沿着其中每一條線都滿足關係式(72)，並且我們講過係數 a 是主曲率半徑之一。這就給出下面的關係式：

$$\boldsymbol{r}'_u+R_1\boldsymbol{m}'_u=0;\qquad \boldsymbol{r}'_v+R_2\boldsymbol{m}'_v=0. \tag{81}$$

對應於在曲面上取的點 M，我們在半徑爲一的球面上取一點 M_0，讓 M_0 是由球心作出的向量 $\boldsymbol{m}$ 與這球面上的交點，其中 $\boldsymbol{m}$ 是曲面在點 M 的單位法線向量。**曲面上的點與球面上的點的對應通**常叫做**曲面的球面映射**。點 M_0 的位置也由表現 M 的位置的參變量 u 與 v 來決定。由於坐標線是曲率線，就有：

$$E=\boldsymbol{r}'^2_u;\qquad F=0;\qquad G=\boldsymbol{r}'^2_v. \tag{82}$$

依照定義，球面映射 M_0 的向量半徑是 $\boldsymbol{m}$，根據公式(81)與(82)，對於球面映射高斯第一微分式的係數是：

$$E_0=\boldsymbol{m}'^2_u=\frac{1}{R_1^2}E;\qquad F_0=\boldsymbol{m}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v=0;\qquad G_0=\boldsymbol{m}'^2_u=\frac{1}{R_2^2}G. \tag{83}$$

只是中間這個等式需要證明，因爲其餘兩個由(81)與(82)可以直接推出來。公式(49)給出 $M=-\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v=-\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_u$。若取曲率線作爲坐標線，則 $M=0$，就是說 $\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v=\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{m}'_u=0$。由(81)中第一個等式乘以 $\boldsymbol{m}'_v$ 或第二個乘以 $\boldsymbol{m}'_u$，就得到 $\boldsymbol{m}'_u\cdot\boldsymbol{m}'_v=0$。

這個曲面的面積單元與對應的球面映射的單元是：

$$dS=\sqrt{EG}\,dudv;\qquad dS_0=\sqrt{E_0G_0}\,dudv,$$

或者，根據(83)，

$$dS_0=\frac{1}{|R_1R_2|}dS,$$

由此看出，**在點 M 的高斯曲率的絕對值是當球面映射的面積單元與對**

應的曲面的面積單元之比當後者趨向點 M 時的極限。顯然，所說的比表現出在單元上的點的曲面的法線束的分散程度。

在 [134] 中我們講過高斯曲率 K 通過兩個高斯微分式的係數的表達式 。高斯曲率的表達式 K 也可以只通過 E, F, G 以及它們對 u 與 v 的微商來表達 。我們現在講由這情況推出的一個重要推論。設在兩個曲面 (S) 與 (S_1) 之間建立了點對應關係，並且對應點由參變量 u 與 v 的相同的值來決定。每一個曲面各有表示長度單元的平方的高斯第一微分式。這兩個微分式恒等就相當於上述的對應關係保有長度，或者說它們是**互展平面**。這時，對於這兩個曲面，係數 E,F,G 以及它們對 u 與 v 的微商都相同，所以在這兩個曲面的對應點曲率 K 具有相同的值，就是說，曲面的相互映射保有長度時，在兩個曲面的對應點高斯曲率具有相同的值。

特別是在平面上高斯曲率等於零，如果曲面能夠展在平面上而不歪曲長度，則應當是 $LN-M^2=0$，就是說，所有的點都是拋物線性點。以前我們講過這樣的曲面的例，如錐面與柱面。

139. 面積單元的變值與曲率中值 設 (S) 是某一曲面，(u,v) 是它的坐標參變量，$\boldsymbol{r}(u,v)$ 是它的向量半徑。在曲面的每一點 $M(u,v)$ 沿法線 $\boldsymbol{m}$ 截一段 MM_1，長度爲一個代數的量 $n(u,v)$，其中 $n(u,v)$ 是 u 與 v 的某一個函數，由點 M_1 就形成一個新的曲面 (S_1)。對於點 M_1 我們有對於點 M 的參變量 u 與 v 來表現，我們說，(S) 與 (S_1) 的點之間建立了沿 (S) 的法線的對應關係。依照定義，曲面 (S_1) 的向量半徑 $\boldsymbol{r}^{(1)}(u,v)$ 是 $\boldsymbol{r}^{(1)}(u,v)=\boldsymbol{r}(u,v)+n(u,v)\boldsymbol{m}(u,v)$. 對 u 與 v 求微商，就得到：

$$\boldsymbol{r}_u^{(1)\prime}=\boldsymbol{r}_u'+n_u'\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{m}_u';\qquad \boldsymbol{r}_v^{(1)\prime}=\boldsymbol{r}_v'+n_v'\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{m}_v'.$$

計算對於曲面(S_1)的高斯第一微分式的係數 E_1,F_1,G_1，我們算作

長度 n 及其對 u 與 v 的微商很小，就可以忽略這些量的二次項：

$$E_1=(r_u^{(1)\prime})^2=(r_u'+n_u'm+nm_u')(r_u'+n_u'm+nm_u')=$$

$$=r_u'^2+2n_u'(r_u'\cdot m)+2n(r_u'\cdot m_u').$$

向量 r_u' 與 m 互相垂直，$r_u'\cdot m=0$，於是公式（47）給出 $E_1=E-2nL$。同理不難得到 $F_1=F-2nM$，$G_1=G-2nN$. 由此：

$$E_1G_1-F_1'^2=EG-F^2-2n(EN-2FM+GL),$$

或者，根據(67)：

$$E_1G_1-F_1^2=(EG-F^2)(1-4nH),$$

開平方，再依照牛頓二項式公式展開$(1-4nH)^{1/2}$，略去高於一次的項，就有：

$$\sqrt{E_1G_1-F_1'^2}=\sqrt{EG-F^2}(1-2nH). \tag{84}$$

乘以 $dudv$ 再求積分，就得到曲面（S）與（S_1）很近時面積之差 δS 的準確到二級微小量的的表達式：

$$\iint_{(S_1)}\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\,dudv-\iint_{(S)}\sqrt{EG-F^2}\,dudv= \tag{85}$$

$$=-\iint_{(S)}2nH\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

或

$$\delta S=-\iint_{(S)}2nH\,dS.$$

這個公式直接連繫於著名的柏拉圖問題"**確定以已知界線**（L）**為界的具有最小面積的曲面**"，不難看出，**在這樣的曲面上曲率中值應當等於零**。實際上，例如，若在這樣的曲面的某一塊 σ 上H是正的，

則選擇微小量 n，使得在 σ 上它也是正的，而在曲面的其餘部分以及 (L) 上它等於零，根據（85），對於 δS 我們就得到負値

$$\delta S=-\iint_{(\sigma)}2nH\,dS,$$

於是以 (L) 爲界的曲面 (S_1) 的面積就小於 (S) 的面積，這與我們的假定相違。由於上述的情況，曲率中值等於零的曲面我們叫做最小曲面。

由公式（84）也可以推出求沿變的閉曲面的積分對參變量的微商的公式。設某一個變的閉曲面的位置由參變量 λ 的值來確定，並且當 $\lambda=\lambda_0$ 時曲面取 (S) 的位置，當 λ 逼近於 λ_0 時 (S_1) 的位置逼近於 (S)。像以上描述的一樣，在曲面 (S) 的點 M 與曲面 (S_1) 的點 M_1 之間建立起沿法線的對應關係。這時 n 就是 u,v 與 λ 的函數，當 $\lambda=\lambda_0$ 時對 u 與 v 來講這個函數恒等於零，就是說

$$n(u,v,\lambda_0)\equiv 0. \tag{86}$$

再設 $f(N)$ 是空間的點的某一個函數，不依賴於參變量 λ. 積分

$$I(\lambda)=\iint_{(S_1)}f(M_1)dS_1 \tag{87}$$

的大小就依賴於參變量 λ，因爲曲面的形狀依賴於這個參變量。我們來求微商 $I'(\lambda)$ 的表達式。(84) 的兩邊乘以 $dudv$，可以寫成 $dS_1=(1-2nH)dS$，於是表達式（87）可以寫成：

$$I(\lambda)=\iint_{(S)}f(M_1)dS-\iint_{(S)}f(M_1)2nH\,dS.$$

這裏的積分區域是原來的曲面 (S)，它不依賴於 λ，於是我們可以應用普通的在積分號下求微商的法則［80］。點 M_1 位於曲面 (S_1) 上，設 M 是它在曲面 (S) 上的對應點，於是 $\overline{MM_1}=n(u,v)$ 是 (S)

的法線上的線段，就是說具有 **m** 的方向。當 $\lambda=\lambda_0$ 時因子 $f(M_1)$ 對 λ 求微商給出：

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{f(M_1)-f(M)}{\lambda-\lambda_0}=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{f(M_1)-f(M)}{MM_1}\cdot\frac{\overline{MM_1}}{\lambda-\lambda_0}=$$

$$=\frac{\partial f(M)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}\bigg|_{\lambda=\lambda_0},$$

其中 m 記法線 **m** 的方向。注意，當 $\lambda=\lambda_0$ 時 n 成爲零，我們用 $\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}$ 來記當 $\lambda=\lambda_0$ 時微商的值，就得到：

$$I'(\lambda_0)=\iint_{(S)}\frac{\partial f(M)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}dS-\iint_{(S)}f(M)\,2H\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}dS. \tag{88}$$

設變曲面 (S_1) 的方程記作隱示式：

$$\varphi(M_1;\lambda)=0 \text{ 或 } \varphi(x,y,z,\lambda)=0 \tag{89}$$

直接，並且像對函數 $f(M_1)$ 所作的一樣通過中間變量 M_1，對 λ 求微商，得到，當 $\lambda=\lambda_0$ 時：

$$\frac{\partial\varphi(M_1,\lambda_0)}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial\varphi(M_1,\lambda_0)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}=0.$$

由此確定出 $\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}$，代入到公式 (88) 中，就得到下面的關於微商的表達式：

$$I'(\lambda_0)=-\iint_{(S)}\frac{\partial f}{\partial m}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}dS+2\iint_{(S)}fH\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}dS. \tag{90}$$

若在積分 (87) 中，被積函數 f 含有參變量 λ，則像在 [120] 中一樣，(90) 的右邊需要補充以下面形狀的一項

$$\iint_{(S)}\frac{\partial f}{\partial\lambda_0}dS.$$

140. 曲面族與曲線族的包絡　在 [10] 中討論一級常微分方程的奇異解時，我們講過關於平面曲線族的包絡的概念。同樣討論偏微分方程的解就引出曲面族的包絡的概念。我們現在簡單的講一下這個概念。

設有具有一個參變量的曲面族

$$F(x,y,z,a)=0. \tag{91}$$

固定好數值 a，就得到族中一個確定的曲面。考慮一個新的曲面 (S)，它的方程有方程 (91) 的形狀，不過 a 是由下面這個方程得到的變量

$$\frac{\partial F(x,y,z,a)}{\partial a}=0. \tag{92}$$

可以說，(S) 的方程是由方程 (91) 與 (92) 消去 a 得到的。若固定 $a=a_0$，則，一方面得到族 (91) 中一個確定的曲面 (S_0)，另一方面，把 $a=a_0$ 代入到方程 (91) 與 (92) 中就得曲面 (S) 上的某一條曲線 (l_0)，於是 (l_0) 就是 (S) 與 (S_0) 的公共曲線。我們現在證明，沿着 (l_0) 它們有公共的切面。

對於曲面 (91)，由於 a 是常量，沿這曲面的無窮小改變的投影 dx, dy, dz 應當滿足關係式

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

在曲面 (S) 上 a 是變量，於是我們應當寫成

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial a}da=0.$$

不過根據 (92) 這個關係式與上面的全同，就是說，(S_0) 與 (S) 上在公共點的無窮小改變垂直於同一個方向，它的方向餘弦與下列諸量成比例：

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z},$$

由此推知，(S_0)與(S)沿(l_0)相切。如此，**由方程(91)與(92)消去a，就得到曲面族(91)的包絡的方程，這裏相切性是沿着某一條曲線的。**

例 設有球心在Z軸上半徑爲r的球面族

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2.$$

對a求微商:

$$-2(z-a)=0.$$

消去a，就得到一個圓柱面的方程

$$x^2+y^2=r^2,$$

它與每一個上述的球面沿着一個圓周相切。

現在我們考慮含有兩個參變量的曲面族:

$$F(x,y,z,a,b)=0 \tag{93}$$

由這個方程與下列兩個方程

$$\frac{\partial F(x,y,z,a,b)}{\partial a}=0;\quad \frac{\partial F(x,y,z,a,b)}{\partial b}=0. \tag{94}$$

消去a與b，不難證明，所得到的曲面(S)與曲面族(93)相切。不過在這情形下，不是沿着一條線相切，而只是在某一點相切。實際上，固定好值$a=a_0$與$b=b_0$，一方面我們得到族(93)中一個確定的曲面(S_0)，另一方面，把$a=a_0$與$b=b_0$代入到(93)與(94)這三個方程中，一般就得到曲面(S)上的某一點M_0。這個點M_0就是(S)與(S_0)的公共點。

例 設有球心在XY平面上半徑爲r的球面:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$$

對a與b求微商:

$$-2(x-a)=0;\quad -2(y-b)=0;$$

消去a與b就得到方程$z^2=r^2$，就是說，包絡是由兩個平行的平面$z=\pm r$組成的，它與每

一個上述的球面在某一點相切。

對於曲面族的包絡的求法像［10］中對於曲線族的包絡求法一樣，要作一個附註，就是由方程（91）與（92）消去 a 所得到的不僅是曲面的包絡，也可能是族（91）中的曲面的奇異點的軌跡，所謂奇異點是曲面上沒有切面的點。若方程（91）的左邊是連續函數且有連續一級微商，則任何的曲面，在它的所有的點與族（91）的各個曲面相切的，可以用上述的由方程（91）與（92）消去 a 這個方法得到。在這一段及下一段中，我們不給證明也不講準確的條件，只限於一般的講些基礎事實。

現在我們考慮依賴於一個參變量的空間曲線族：

$$F_1(x,y,z,a)=0; \qquad F_2(x,y,z,a)=0. \tag{95}$$

我們來求這個族的包絡，就是這樣的曲線 Γ，在它的所有的點與族（95）中的各個曲線相切。我們可以算作 Γ 也由方程（95）確定［10］，只不過 a 不是常量，而是變量。沿曲線（95）的無窮小改變在軸上的投影應當滿足方程：

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0;$$

同樣，沿着 Γ 的無窮小改變的投影 $\delta x,\delta y,\delta z$ 應當滿足方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.$$

由相切的條件，這些投影成比例，就是

$$\frac{\delta x}{dx}=\frac{\delta y}{dy}=\frac{\delta z}{dz},$$

根據以上的關係式，這些條件相當於兩個方程 $\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0$ 與 $\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0$，或者算作 $\delta a\neq 0$，就是說 a 不是常量，就得到兩個方程：

$$(96)\qquad \frac{\partial F_1(x,y,z,a)}{\partial a}=0;\quad \frac{\partial F_2(x,y,z,a)}{\partial a}=0.$$

一般說來，(95) 與 (96) 中的四個方程不能確定一條曲線，就是，一般說來，**空間的曲線族沒有包絡**。不過如果這四個方程可以化爲三個，就是說其中一個可以由另外三個推出來，則由這三個方程，坐標 (x,y,z) 可以確定作參變量 a 的函數，就是說，我們可以得到一條空間曲線，它是包絡［或曲線族 (95) 的奇異點的軌跡］。在下一段中我們有具有包絡的空間直線族的例。

141. 可展曲面 作爲特殊情形，我們考慮具有一個參變量 a 的平面族

$$(97)\qquad A(a)x+B(a)y+C(a)z+D(a)=0.$$

由下面兩個方程消去 a 就得到包絡曲面 (S)：

$$(98)\qquad \begin{cases} A(a)x+B(a)y+C(a)z+D(a)=0 \\ A'(a)x+B'(a)y+C'(a)z+D'(a)=0 \end{cases}$$

對於固定的 a 這兩個方程給出某一條直線 (l_a)，而曲面 (S) 是這些直線的軌跡，就是說一定是線性曲面。以下我們會看到並非任何的線性曲面都可以由上述的方法得到。沿着直線 (l_a) 曲面 (S) 與平面 (97) 相切，就是說，**沿着母直線 (l_a) 曲面 (S) 有相同的切面**。如此，在 (S) 上的切面族只依賴於一個表現母線 (l_a) 的參變量 a。在一般情形下，曲面的切面族依賴於兩個參變量，這兩個參變量是確定曲面上點的位置的。設 (S) 的方程是顯示式：$z=f(x,y)$，並且我們用［26］中的記法來記函數 $f(x,y)$ 的偏微商。法線的方向餘弦的前兩個是一個參變量 a 的函數：

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_1(a)$$

$$\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_2(a).$$

由這兩個方程消去 a，就得到 p 與 q 之間的連繫，它可以寫成下面的形狀：

$$q=\varphi(p)$$

在整個曲面 (S) 上都應當滿足這個關係式，求它對自變量 x 與 y 的微商，就得到

$$s=\varphi'(p)r;\quad t=\varphi'(p)s,$$

或

$$rt-s^2=0, \tag{99}$$

就是說，**具有一個參變量的平面族的包絡曲面上的所有的點都是拋物線性點。**

曲面 (S) 是由直線族 (98) 形成的。不難看出，這個直線族有包絡。實際上，求方程 (98) 對 a 的微商，得到兩個方程：

$$\begin{cases} A'(a)x+B'(a)y+C'(a)z+D'(a)=0, \\ A''(a)x+B''(a)y+C''(a)z+D''(a)=0. \end{cases} \tag{100}$$

(98) 與 (100) 中的四個方程可以化爲三個。如此我們可以肯定，曲面 (S) 是由某一條空間曲線 Γ 的切線形成的。如果曲線 Γ 退化爲一點，則 (S) 是錐面，如果這個點在無窮遠，則 (S) 是柱面。現在我們來證明，反之，若給定空間曲線 Γ，

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad z=\omega(t); \tag{101}$$

則曲線 Γ 的切線形成的曲面 (S) 是一個具有一個參變量的平面族的包絡，這個平面族是曲線 Γ 的密切面族。實際上，這個族有方程：

(102) $$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

其中 (x,y,z) 由公式 (101) 確定，而 A,B,C 由 [126] 中公式 (31) 來確定。求 (102) 對參變量 t 的微商，並注意，根據 (31)

(103) $$Adx+Bdy+Cdz=0,$$

就得到:

(104) $$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0,$$

其中替代對 t 的微商，我們寫成了微分，族 (102) 的包絡曲面由方程 (102) 與 (104) 所確定的直線組成，我們只要證明這兩個方程確定 Γ 在點 (x,y,z) 的切線。由關係式 (103) 求微分，並注意，根據 (31) $Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0$，就得到:

(105) $$dAdx+dBdy+dCdz=0.$$

關係式 (103) 與 (105) 說明，平面 (102) 與 (104) 的通過點 (x,y,z) 的法線垂直於曲線 Γ 的切線，就是說，平面 (102) 與 (104) 都通過這個切線，這就是我們所要證明的。

以前我們講過，條件 (99) 是 (S) 具有一個參變量的平面族的包絡的必要條件。可以證明，它也是充分條件。以前我們也講過 [138]，條件 (99)（或與它相當的條件 $LN-M^2=0$）也是 (S) 可以展成平面而不歪曲長度的必要條件。反之，可以證明，若這條件成立，則足够小的一塊曲面可以按上述的方式展成平面。所以，具有一個參變量的平面族的包絡叫做**可展曲面**。

並非所有的線性曲面都是可展曲面。例如，如果我們取雙曲拋物面或單葉雙曲面，則對於它們關係式 (99) 不成立 [137]，縱然它們也是線性曲面。由此推知，如果這樣的曲面的變點沿着母直線動，則對應於這變點的切面繞着這母線轉。

第六章　福里哀級數

§1　調和分析

142. 三角函數的正交性　調和振動的運動

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

是週期為 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的週期函數的簡單的例。現在我們限制考慮週期為 2π 的週期函數並把自變量記作 x，於是函數 y 成為

$$y=A\sin(x+\varphi)$$

函數

$$A_k\sin(kx+\varphi_k)\quad(k=0,1,2,3,\cdots),$$

是以 2π 為週期的較複雜的函數，任何多個這樣的函數之和

$$\sum_{k=0}^{n}A_k\sin(kx+\varphi_k),$$

仍是以 2π 為週期的函數，它叫做 n 級三角多項式；由此引起下面的問題：**任意的以 2π 為週期的函數 $f(x)$ 如何可以通過 n 級三角多項式來近似表達**，以至於把函數 $f(x)$ **展開為三角級數**：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(kx+\varphi_k)$$

這就類似於函數通過 n 次多項式的近似表達式，以及它的冪級數形狀的展開式。這三角級數的一般項

$$A_k\sin(kx+\varphi_k)$$

叫做函數 $f(x)$ 的第 k 個調和素。它可以寫成下面的形狀：

$$A_k \sin(kx+\varphi_k)=a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

其中

$$a_k=A_k\sin\varphi_k;\ b_k=A_k\cos\varphi_k,\ (k=0,1,2,$$

零級調和素 $A_0\sin\varphi_0$ 是簡單的常數，爲簡單起見，在以後的公式中我們把它記作 $\frac{a_0}{2}$。於是，我們的問題結果是，**如果可能的話，求出未知常數**

$$a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\cdot$$

以使得級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

收歛而且使得它的和等於給定的以 2π 爲週期的週期函數 $f(x)$。

爲要解决這個問題，我們先講倍角的正弦以及餘弦的一個簡單性質。設 c 是任何一個實數，$(c,c+2\pi)$ 是任何一個長度爲 2π 的區間。不難證明

$$\int_c^{c+2\pi}\cos kx\,dx=0;\quad \int_c^{c+2\pi}\sin kx\,dx=0\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

例如，考慮所寫的第一個積分。$\cos kx$ 的一個原函數是 $\frac{\sin kx}{k}$，由於它的週期性，當 $x=c$ 與 $x=c+2\pi$ 時它的值相同，於是這兩個值之差是零，就是說，實際上，

$$\int_c^{c+2\pi}\cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}\Bigg|_{x=c}^{x=c+2\pi}=0.$$

同理，利用已知的三角公式:

$$\sin kx\cos lx=\frac{\sin(k+l)x+\sin(k-l)x}{2}$$

$$\sin kx\sin lx=\frac{\cos(k-l)x-\cos(k+l)x}{2}$$

$$\cos kx\cos lx=\frac{\cos(k+l)x+\cos(k-l)x}{2}$$

可以證明

$$\int_c^{c+2\pi}\cos kx\sin lx\,dx=0$$

(3) $(k \neq l)$

$$\int_c^{c+2\pi}\cos kx\cos lx\,dx=0;\quad \int_c^{c+2\pi}\sin kx\sin lx\,dx=0.$$

考慮函數族:

(4) $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots,$

這裏，函數族中第一個是個常數，等於一。由公式 (2) 與 (3) 推出下述的事實：**族 (4) 中任何兩個函數的乘積沿任何一個長度爲 2π 的區間的積分等於零**。這樣的性質通常叫做**族 (4) 在所述區間上的正交性質**。現在我們來看族 (4) 中的函數的平方的積分。對於第一個函數，這個積分顯然等於 2π；對於其餘的，根據公式

$$\cos^2 kx=\frac{1+\cos 2kx}{2};\qquad \sin^2 kx=\frac{1-\cos 2kx}{2},$$

我們就有

(5) $$\int_c^{c+2\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi;\quad \int_c^{c+2\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

以後爲確定起見，我們取 $c=-\pi$，就是說，區間 $(c,c+2\pi)$ 是區間 $(-\pi,+\pi)$。

現在回到以上所給的問題。設有某一個函數 $f(x)$，確定於區間 $(-\pi,+\pi)$ 上，而且對於 x 的其他的值，函數 $f(x)$ 的值保持以 2π 爲週期的週期性規律；並設它是級數 (1) 的和：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{6}$$

求這等式兩邊沿區間 $(-\pi,+\pi)$ 的積分，並用每一項的積分之和來替代右邊的無窮和的積分，就得到：

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\,dx\right),$$

根據 (2)，這就化爲等式

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}.2\pi=a_0\pi,$$

由此確定出常數 a_0：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx. \tag{7}$$

再來確定其他的常數。設 n 是某一個正整數。(6) 的兩邊乘以 $\cos nx$，再像上面一樣求積分：

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx+ \tag{8}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right).$$

根據 (2) 與 (3)，除去當 $k=n$ 時的一個積分

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos nx \, dx$$

外，這等式右邊所有的積分都等於零；並且根據(5)，上面寫的這個積分等於π。

如此，公式(8)化爲下面的形狀：

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \pi,$$

由此

$$(7_1) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=1,2,\cdots).$$

同理可以得到公式

$$(7_2) \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1,2,\cdots).$$

注意，當$n=0$時公式(7_1)與公式(7)相同。如此我們可以寫成

$$(9) \qquad \begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx & (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx & (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

以上所講的算法是不嚴格的，只具有引導的意義。實際上，我們對於這級數作了沒有判斷的假定：首先，開始時我們假定了給定的函數可以展成級數(6)，以後我們又用各項的積分之和來替代無窮和的積分，或者換句話說就是用了級數的逐項求積分法，可是並不是總可以這樣作的［參考 I,146］。

嚴格說來要提出下面的問題。設在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上給定一個函數 $f(x)$。依公式 (9) 計算出常數 a_k 以及 b_k，並把這些常數值代入到級數 (1) 中。問：如此得到的級數在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上是否收斂，如果收斂，它的和是否等於 $f(x)$？

由公式 (9) 計算出的係數叫做**函數 $f(x)$ 的福里哀係數**，把由公式 (9) 計算出的 a_k 與 b_k 的值代入到級數 (1) 中所得到的級數叫做**函數 $f(x)$ 的福里哀級數**。在下一段中我們敍述上面所提出的關於所給的函數的福里哀級數的收斂性問題。

附註 當沿任何的長度爲 2π 的區間求積分時，上述的公式 (3) 與 (5) 都成立。一般說來，若 x 取所有的實數值時，$f(x)$ 都確定，且具有某一週期 a，就是說，x 取任何值時，$f(x+a)=f(x)$，則 $f(x)$ 沿任何的長度爲 a 的區間的積分具有確定的值，它不依賴於這個區間的起點，就是說，積分

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx$$

的大小不依賴於 c。實際上，我們可以把 c 這個數寫成 $c=ma+h$ 的形狀，其中 m 是個整數，h 屬於區間 $(0,a)$：

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx=\int_{ma+h}^{(m+1)a+h} f(x)\,dx=\int_{ma+h}^{(m+1)a} f(x)\,dx+\int_{(m+1)a}^{(m+1)a+h} f(x)\,dx.$$

在第一個積分中引用新的積分變量 $t_1=x-ma$，而在第二個中引用 $t_2=x-(m+1)a$：

$$\int_c^{c+a} f(x)dx=\int_h^a f(t_1+ma)\,dt_1+\int_0^h f[t_2+(m+1)a]dt_2.$$

注意 $f(x)$ 的週期性，再把積分變量記作 x，就得到：

$$\int_{c}^{c+a} f(x)\,dx=\int_{h}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{h} f(x)\,dx=\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

由此推知這積分不依賴於 c。若 $f(x)$ 具有週期 2π，則我們可以由公式 (9) 沿任何的長度爲 2π 的區間求積分以計算它的福里哀係數 a_k 與 b_k。

143.狄義赫利定理 只要關於函數 $f(x)$ 作出些限制性的假定，函數 $f(x)$ 的福里哀級數就是收斂的並且它的和等於 $f(x)$。首先我們假定所給的在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上的函數 $f(x)$，或者連續，或者在這區間內只有有限個間斷點。再假定所有這些間斷點具有下述的性質：若 $x=c$ 是 $f(x)$的一個間斷點，則當 x 自右（由較大的值）或自左（由較小的值）趨向 c 時，$f(x)$ 有有限的極限。這兩個極限通常記作 $f(c+0)$與 $f(c-0)$[I,32]。這樣的間斷點通常叫做**第一類間斷點**。最後，假定在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上 $f(x)$ 有有限多個極大值以及極小值，就是說，假定整個區間 $(-\pi,+\pi)$ 可以分爲有限多個部分區間，使得在每一部分上 $f(x)$ 單調的改變。以上所述的條件叫做**狄義赫利條件**，就是說，**所謂一個函數在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上滿足狄義赫利條件，是說在這區間上它或者連續，或者有有限多個第一類間斷點，此外，並且在這區間上它有有限多個極大值與極小值**。還要提出，在端點 $x=-\pi$，重要的只是當 x 自右趨向 $-\pi$ 時 $f(x)$ 所趨向的極限，所以我們寫 $f(-\pi+0)$ 以替代 $f(-\pi)$，同樣寫 $f(\pi-0)$以替代 $f(\pi)$。注意，這兩個極限可能不同，但是當 $x=-\pi$ 與 $x=\pi$ 時，根據函數 (4) 的週期性，級數 (1) 的和自然應當相同。

下面是福里哀級數論中一個基本定理：

狄義赫利定理 若給定在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上的函數 $f(x)$，在這區間上滿足狄義赫利條件，則在整個區間 $(-\pi,+\pi)$ 上這函數的福里哀級數收斂，並且這級數的和：

1)在位於這區間內的所有 $f(x)$ 連續的點，等於 $f(x)$；

2)在所有的間斷點，等於

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

3)在這區間兩端，就是當 $x=-\pi$ 與 $x=+\pi$ 時，等於

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

在本章最後我們再講這個定理的證明。

關於上面敘述的定理，我們給幾個附註。級數(1)的項是以 2π 爲週期的函數。所以，若在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上這級數收斂，則當 x 取所有的實數值時它收斂，並且這級數的和以 2π 爲週期重複取它在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上所取的那些値。如此，若在區間 $(-\pi,+\pi)$ 之外利用福里哀級數，則應當算作在這區間之外 $f(x)$ 以 2π 爲週期延續。由這個觀點，對於如此延續的函數，如果 $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$，區間的端點 $x=\pm\pi$ 是間斷點。

圖114上表示出一個在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上連續的函數，當週期性的延續時，由於在區間的兩端 $f(x)$ 的值不相同，於是給出它的間斷點。

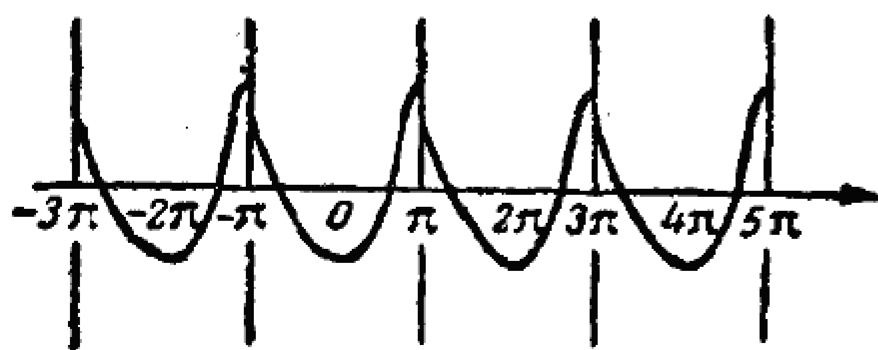


圖 114

計算福里哀係數時，利用下面的輔助定理，常是有用的：

輔助定理 若在區間 $(-a,+a)$ 上 $f(x)$ 是偶函數，就是 $f(-x)$

$=f(x)$ 則

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

若 $f(x)$ 是奇函數，就是 $f(-x)=-f(x)$，則

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0。$$

這個輔助定理的證明，以前我們給過 [1,99]。

144 例 1.在區間 $(-\pi,\pi)$ 上展開 x 爲福里哀級數。乘積 $x\cos kx$ 是 x 的奇函數，所以根據公式(9)所有的係數 a_k 等於零。另一方面，乘積 $x\sin kx$ 是偶函數，於是係數 b_k 可以由下面這公式來計算：

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{+\pi}\cos kx\,dx\right\}=\frac{2(-1)^{k-1}}{k}.$$

圖 115 上實線表示這福里哀級數的圖形，由這圖上看出，在點 $x=\pm\pi$ 有間斷點，這時左極與右限的等差中項顯然等於零。如此，在所考慮的情形下，福里哀級數給出：

$$(10)\quad 2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}+\cdots\right)=\begin{cases}x & 當\ -\pi<x<\pi 時,\\ 0 & 當\ x=\pm\pi 時。\end{cases}$$

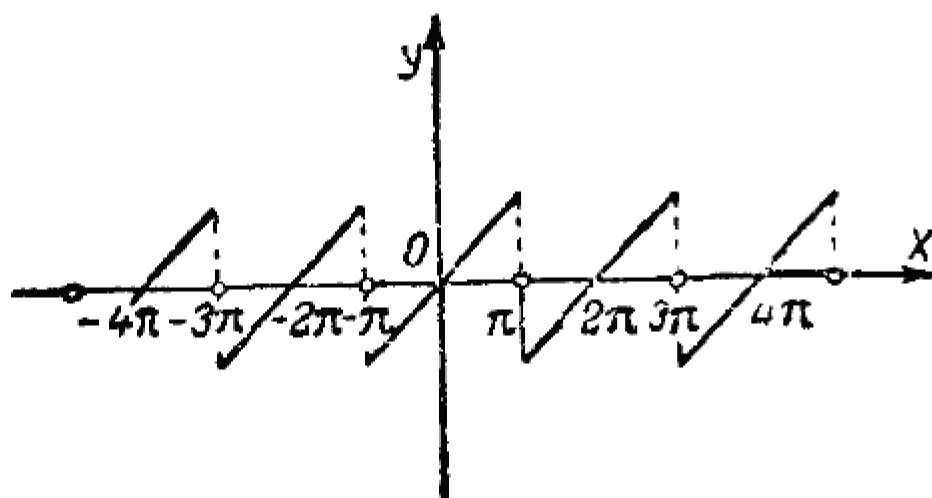


圖 115

2.對於函數 x^2 同樣來作。在這情形下，乘積 $x^2\sin kx$ 是奇函數，於是所有的係數 b_k 等於零。我們來計算 a_k：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2\pi^2}{3}\ ;$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2\sin kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}-\frac{2}{k}\int_0^\pi x\sin kx\ dx\right\}=$$

$$=\frac{4}{\pi k}\left\{\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}-\frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\,dx\right\}=(-1)^k\frac{4}{k^2}.$$

由圖 116 看出，在這種情形下，福里哀級數的圖形沒有間斷點，在整個區間 $(-\pi,\pi)$ 上，包括端點在內，這級數的和等於 x^2:

(11) $$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

讓 $x=0$，得到:

(12) $$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

若設

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\sigma$$

(13) $$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots=\sigma_1,$$

則顯然有:

$$\sigma=\sigma_1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots=\sigma_1+\frac{1}{4}\sigma,\ \sigma_1=\frac{3}{4}\sigma,$$

由等式(12)給出

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\sigma_1-\frac{1}{4}\sigma=\frac{1}{2}\sigma=\frac{\pi^2}{12},$$

就是

(14) $$\sigma=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}。$$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

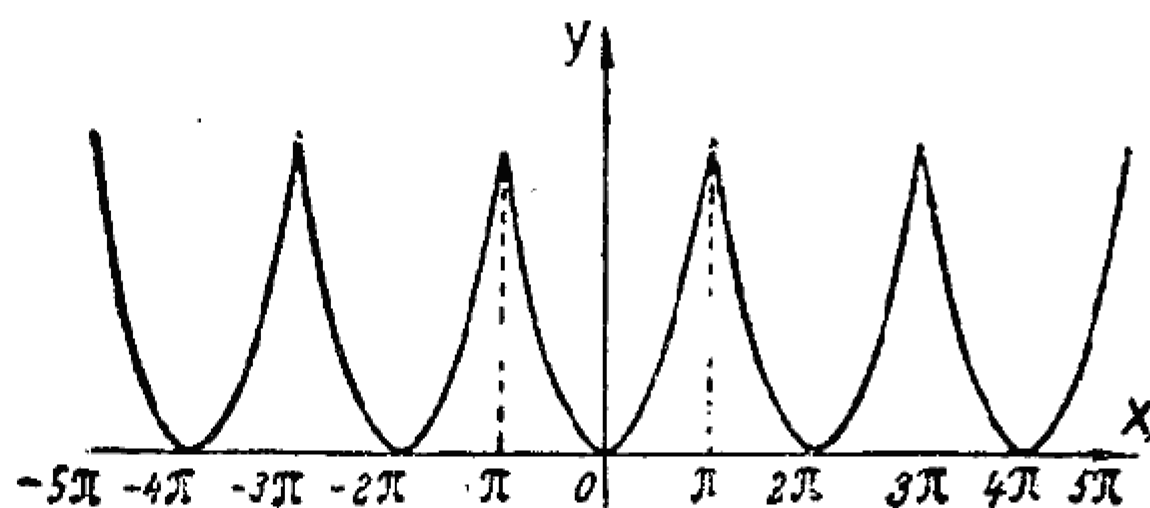


圖 116

3.把函數

$$f(x)=\begin{cases} c_1 & 當 -\pi<x<0 時 \\ c_2 & 當 \ 0<x<\pi 時 \end{cases}$$

展成福里哀級數。

現在我們有:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1\,dx+\int_{0}^{\pi} c_2\,dx\right]=c_1+c_2$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1\cos kx\,dx+\int_{0}^{+\pi} c_2\cos kx\,dx\right]=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi} c_2\sin kx\,dx\right]=$$

$$=(c_1-c_2)\,\frac{(-1)^k-1}{\pi k},$$

就是說，當k是偶數時$b_k=0$，k是奇數時$b_k=-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi k}$，所以，依照狄義赫利定理(圖 117):

$$(15)\qquad \frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right]=\begin{cases} c_1 & 當 -\pi<x<0 時 \\ c_2 & 當 \ 0<x<\pi 時 \\ \frac{c_1+c_2}{2} & 當 x=0 與 \pm\pi 時 \end{cases}$$

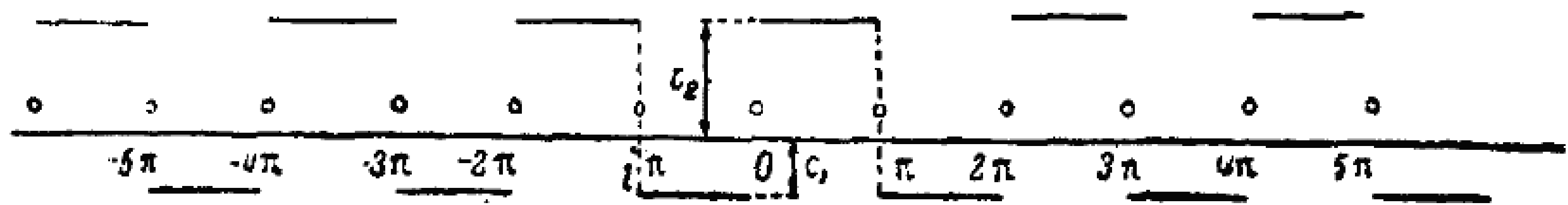


圖 117

145 在區間 $(0,\pi)$ 上的展開式 在以上的例中，我們利用被展開的函數 $f(x)$ 的奇性或偶性，簡化了福里哀係數的計算法。

一般說來，應用[143]中的輔助定理於確定福里哀係數的積分(9)，就得到：當 $f(x)$ 是偶函數時，

$$(16)\qquad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx;\quad b_k=0,$$

當 $f(x)$ 是奇函數時，

$$(17)\qquad a_k=0,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx.$$

於是函數的展開式，當 $f(x)$ 是偶函數時，形狀是

$$(18)\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

當 $f(x)$ 是奇函數時，形狀是

$$(19)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

現在設給定在區間 $(0,\pi)$ 上的任意一個函數 $f(x)$。在區間 $(0,\pi)$ 上，這個函數可以展成只含有餘弦的級數(18)，也可以展成只含正弦的級數(19)。這時，在前一個情形上，依照公式(16)計算係數，而在第二個情形上，依照(17)。在區間 $(0,\pi)$ 內這兩個級數的和就是函數 $f(x)$，而在間斷點級數和等於右限左限的等差中項。不過在區

間 $(0, \pi)$ 之外它們表示完全不同的函數。餘弦級數給出的函數在區間 $(-\pi, 0)$ 上恰如 $f(x)$ 是偶函數，而在 $(-\pi, \pi)$ 之外是以 2π 爲週期作週期性的延續。正弦級數給出的函數在區間 $(-\pi, 0)$ 上恰如 $f(x)$ 是奇函數，而在區間 $(-\pi, \pi)$ 之外是以 2π 爲週期作週期性的延續。

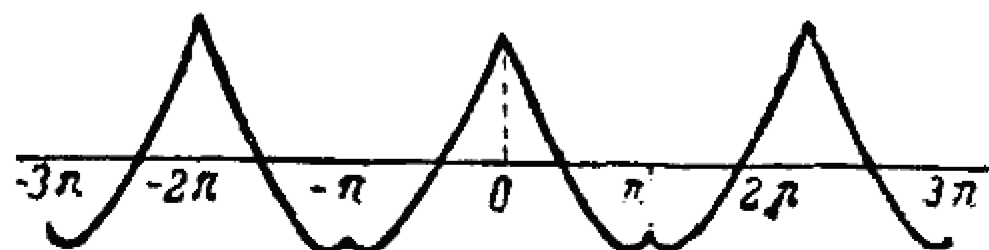


圖 118

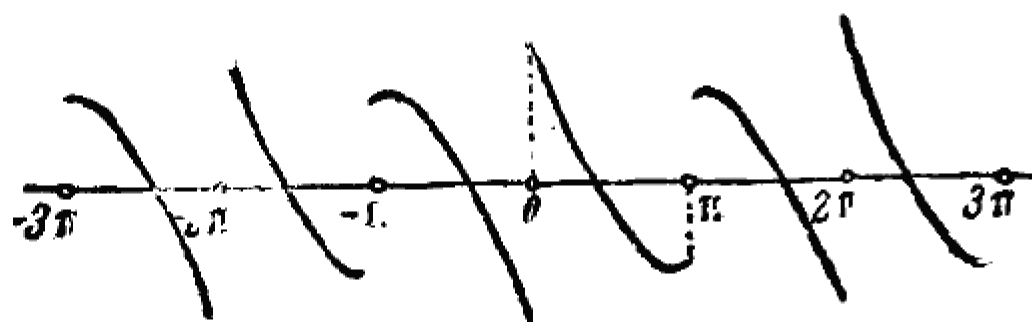


圖 119

如此，當展成餘弦級數時：

$$f(-0)=f(+0);$$

$$f(-\pi+0)=(\pi-0),$$

而當展成正弦級數時：

$$f(-0)=-f(+0);$$

$$f(-\pi+0)=-f(\pi-0).$$

x	餘 弦 級 數	正 弦 級 數
0	$f(+0)$	0
π	$f(\pi-0)$	0

與此對應，在區間的兩端，我們得到表中所列的級數(18)與(19)的值。

圖 118 與 119 上表示出級數 (18) 與 (19) 所表示的函數的圖形，這兩個級數是由在區間 $(0, \pi)$ 上的同一個函數 $f(x)$ 作出來的。

例 1.在 [144] 例 1 與例 2 中，對於函數 x 我們得到在區間 $(0, \pi)$ 上的正弦級數，對

於函數 x^2，得到在區間 $(0,\pi)$ 上的餘弦級數。在區間 $(0,\pi)$ 上把函數 x 展成餘弦級數，我們得到展開式

$$x=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos kxdx=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0 & \text{當}k\text{是偶數時,}\\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{當}k\text{是奇數時。}\end{cases}$$

由此

$$(20)\qquad x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\cdots\right)$$

$$(0<x<\pi).$$

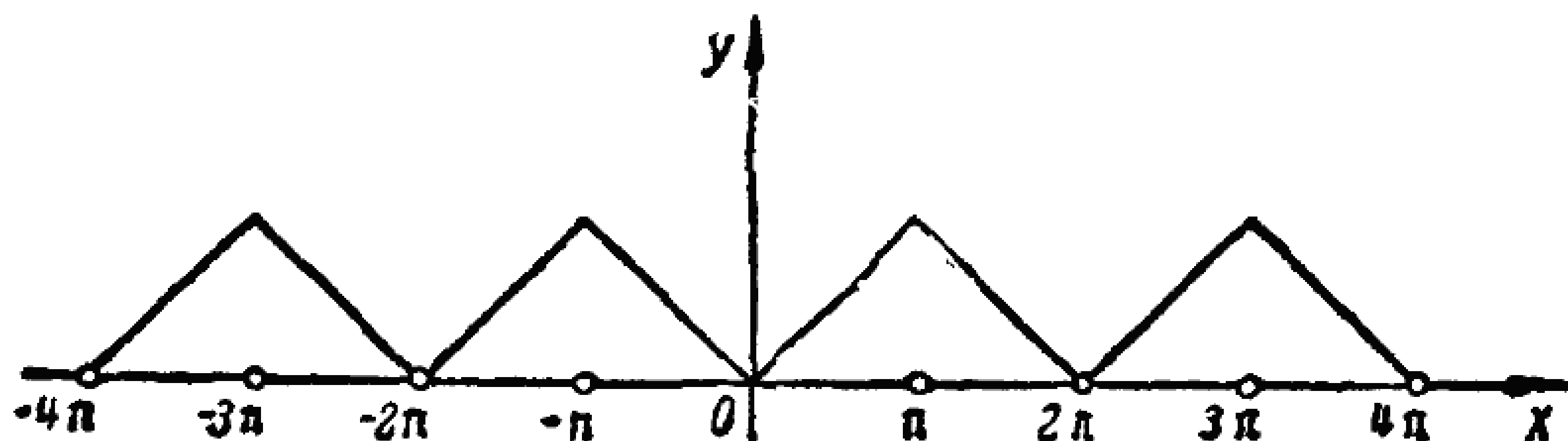


圖 120

在區間 $(-\pi,0)$ 上右邊的級數之和是 $(-x)$，就是說，在整個區間 $(-\pi,\pi)$ 上，它與絕對值 $|x|$ 全同：

$$(21)\qquad |x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

在區間 $(-\pi,\pi)$ 之外，這級數和給出的函數，可以由區間 $(-\pi,\pi)$ 的函數作週期性的重複得到（圖120），在區間 $(0,\pi)$ 上把函數 x^2 展成正弦級數，我們得到：

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin kx\,dx=\frac{2(-1)^{k-1}\pi}{k}+\frac{4[(-1)^k-1]}{\pi k^3}$$

於是在區間 $0<x<\pi$ 上（圖121），

$$x^2=2\pi\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right]-\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right]$$

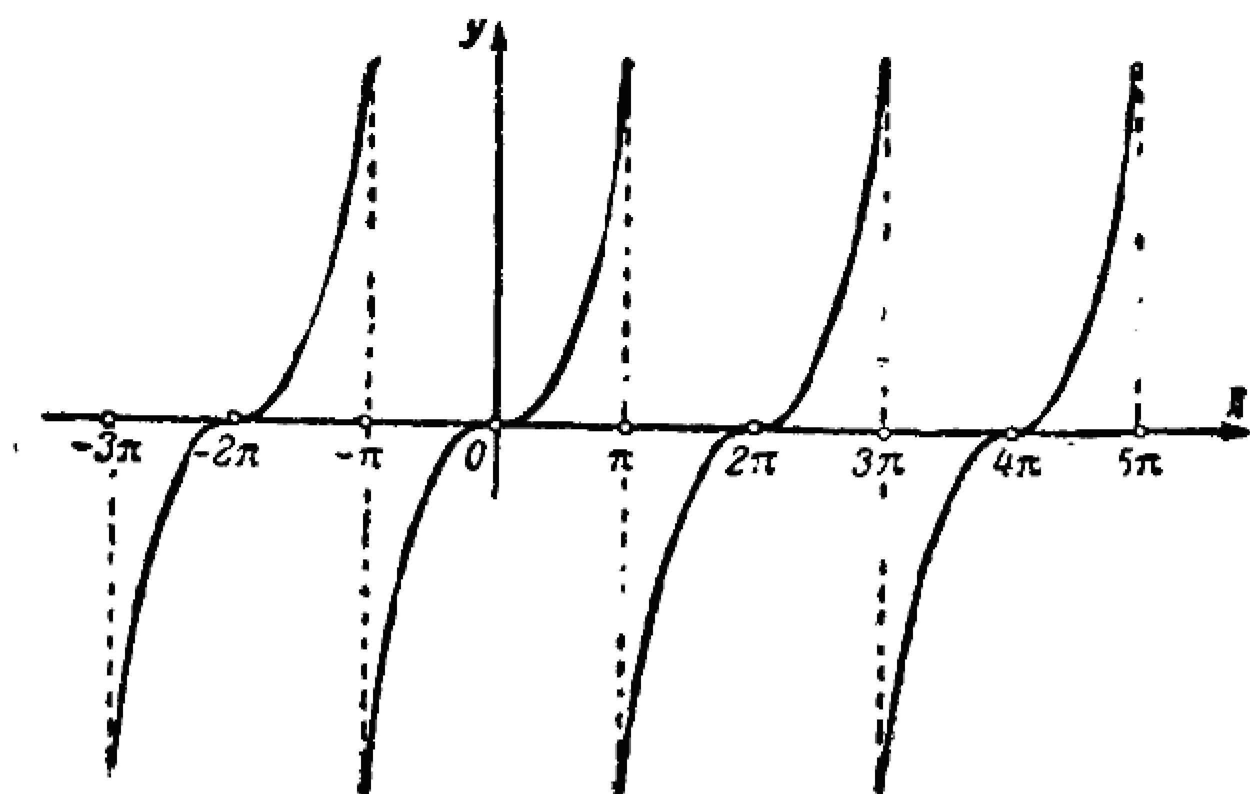


圖 121

2.函數 $\cos zx$ 是 x 的偶函數，所以在區間 $(-\pi,\pi)$ 上它可以展成餘弦級數：

$$\cos zx=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx;\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zx\cos kx\,dx.$$

我們有：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zx\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin zx}{z}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2\sin\pi z}{\pi z}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zx\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(z+k)x+\cos(z-k)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(z+k)x}{z+k}+\frac{\sin(z-k)x}{z-k}\right]_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi z+k\pi)}{z+k}+\frac{\sin(\pi z-k\pi)}{z-k}\right]=$$

$$=(-1)^k\frac{2z\sin\pi z}{\pi(z^2-k^2)}.$$

於是，在區間 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上：

$$\cos zx=\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\frac{\cos 3x}{3^2-z^2}-\cdots\right]$$

現在讓 $x=\pi$，再用 $\sin\pi z$ 除這等式的兩邊，就有：

(22) $$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{k^2-z^2}\right].$$

這個公式叫做函數 $\operatorname{ctg}\pi z$ 分解爲有理分式的展開式。對 z 求微商後用 π 除，再改變符號，就得到函數 $\frac{1}{\sin^2\pi z}$ 分解爲有理分式的展開式：

$$\frac{1}{\sin^2\pi z}=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+z^2}{(k^2-z^2)^2}\right],$$

或者，注意

$$2\frac{k^2+z^2}{(k^2-z^2)^2}=\frac{1}{(z+k)^2}+\frac{1}{(z-k)^2},$$

可以把上面這公式寫成比較對稱的形式

(23) $$\frac{1}{\sin^2\pi z}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k)^2}$$

由公式(22)推出可注意的函數 $\operatorname{ctg} z$ 的冪級數展開式。公式(22)兩邊乘以 πz，再用 z 來替代 πz，就是用 $\frac{z}{\pi}$ 來替代 z，就得到

$$z\operatorname{ctg} z=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z^2}{k^2\pi^2-z^2}.$$

不過

$$\frac{2z^2}{k^2\pi^2-z^2}=\frac{2z^2}{k^2\pi^2\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}=$$

$$=2\frac{z^2}{k^2\pi^2}\left(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}+\frac{z^4}{k^4\pi^4}+\cdots\frac{z^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}}+\cdots\right)(|z|<\pi).$$

代入到上面的公式中，再依照 z^2 的冪來整理，就得到

$$z\operatorname{ctg} z=1-2\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-2\frac{z^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\cdots-2\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}-\cdots$$

用 $\frac{z}{2}$ 來替代 z，就得到：

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right]z^{2n}.$$

把 z^{2n} 的係數記作$\frac{B_n}{(2n)!}$;

$$(24)\qquad \frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=1-\frac{B_1}{2!}z^2-\frac{B_2}{4!}z^4-\cdots-\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n}-\cdots$$

$$B_n=\frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

把$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$看作 $\cos\frac{z}{2}$ 被$\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}$除得的商，直接展成級數 [I,130]，不難確定出前幾個數 B_n：

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_3=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},$$

於是直接看出 B_n 是有理數。它們叫做白諾利數。另一方面，知道了它們的値，就可以確定出下列級數的和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\cdot(2n)!}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

有時代替白諾利數，我們考慮由下列公式確定的尤拉數：

$$(25)\ A_0=1;A_1=-\frac{1}{2};A_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!};\ \ A_{2k+1}=0(k=1,2,3,\cdots).$$

若在等式 (24) 中用$\frac{t}{i}$來替代 z，則由於

$$\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i}=\frac{t}{2i}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2i}}{\sin\frac{t}{2i}}=\frac{t}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2},$$

推出

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{B_nt^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$
$$=A_0+A_1t+A_2t^2+A_3t^3+\cdots$$

在各種不同的分析中常遇到白諾利數與尤拉數。

146 以 $2l$ 爲週期的週期函數 有時需要把一個函數展開成三角級數，這個函數不是確定在區間 $(-\pi,\pi)$ 上，而是確定在區間 $(-l,l)$ 上的，或是要把一個確定在 $(0,l)$ 上的函數展開成餘弦級數或正弦級數。

藉助於尺度的改變，可以把這個問題化爲上面的情形，就是依照下列公式引用輔助變量 ξ 以替代 x

$$x=\frac{l\xi}{\pi};\quad \xi=\frac{\pi x}{l}. \tag{26}$$

設

$$f(x)=f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)=\varphi(\xi).$$

若函數 $f(x)$ 確定在區間 $(-l,l)$ 上，則對於變量 ξ 來講，函數 $\varphi(\xi)$ 就確定在區間 $(-\pi,\pi)$ 上。

把函數 $\varphi(\xi)$ 展成福里哀級數，就得到：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\xi+b_k\sin k\xi),$$

其中，根據(26)：

$$\left\{\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\xi)\cos k\xi d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)\cos k\xi d\xi=\\ &=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

如此，對於區間 $(-l, l)$ 的情形狄義赫利定理保持正確，不過這時展開式 (6) 換成展開式

$$(28)\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

並且係數 a_k 與 b_k 由公式 (27) 來確定。

同樣作法可以把確定在區間 $(0,l)$ 上的函數 $f(x)$ 展開成餘弦級數或正弦級數；對於函數 $f(x)$ 得到級數

$$(29)\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l};\quad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$(30)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l};\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

例 把由下面的等式所確定的函數展開成正弦級數：

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{l} & \text{當 } 0<x<\dfrac{l}{2}\text{ 時}\\ 0 & \text{當 } \dfrac{l}{2}<x<l\text{ 時。}\end{cases}$$

在這情形下我們有：

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

因爲在區間 $\left(\frac{l}{3}, l\right)$ 上被積函數等於零。讀者可以算出來

$$b_k=\begin{cases}0 & \text{當 } k \text{ 是奇數而 } k>1\text{ 時,}\\ -\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}2k}{\pi(k^2-1)} & \text{當 } k \text{ 是偶數時,}\end{cases}$$

$$b_1=\frac{1}{2},$$

所以

$$
(31)\quad \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi x}{l}=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{l} & \text{當 } 0<x<\frac{l}{2}\text{ 時}\\ 0 & \text{當 } \frac{l}{2}<x<l\text{ 時}\\ \frac{1}{2} & \text{當 } x=\frac{l}{2}\text{ 時}\\ 0 & \text{當 } x=0\text{ 或 } l\text{ 時}\end{cases}
$$

像我們對於長度爲 2π 的區間所講的一樣，這裏區間 $(-l,l)$ 可以換成任何的長度爲 $2l$ 的區間 $(c,c+2l)$。這時在區間 $(c,c+2l)$ 上級數 (28) 的和給出函數 $f(x)$，不過當依照公式 (27) 計算係數時積分區間 $(-l,l)$ 需要換成區間 $(c,c+2l)$。

147. 平方中值誤差 現在我們從另一個問題引向福里哀級數的理論。像以上一樣，設 $f(x)$ 是給定的在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上的函數。作出族 (4) 中前 $(2n+1)$ 個函數的一個線性結合：

$$
(32)\qquad \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),
$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_1,\cdots\alpha_n,\beta_n$ 是某些係數。表達式 (32) 通常叫做 n **級三角多項式**。考慮當用和 (32) 來替代 $f(x)$ 時所得到的誤差，就是考慮差：

$$
\Delta_n(x)=f(x)-\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}
$$

在區間 $(-\pi,\pi)$ 上 $|\Delta_n x|$ 的最大值叫做在這區間上和 (32) 表示函數 $f(x)$ 時的**最大偏差** Δ_n：Δ_n 愈小時，用以表示函數 $f(x)$ 的 n 級三角多項式愈準確。不過，用 Δ_n 的大小來衡量近似的程度並不方便，這不僅是因爲討論這個量是比較困難的，而且因爲當解決函數的近似表示法的問題時，更重要的是使得“平均”誤差或“概率”誤差很小，它小於“最大偏差”。圖 122 上表示出近似曲線（虛線）與所給

的函數（實線）的區別。曲線(1)的最大偏差比曲線(2)的小，但是，一般說來，曲線(1)與原來的曲線所差的比曲線(2)更多；在區間$(-\pi,\pi)$上所遇到的曲線(2)的相當大的偏差無論如何比曲線(1)的偏差來得尖銳。

對於觀測的處理，應當用最小二乘法以衡量觀測的準確性時，要應用"平方中值誤差"，它是由下述的方法來確定的：設當測量z的大小時，得到值：

$$z_1, z_2, \cdots, z_N;$$

每次測量的誤差是

$$z-z_k \qquad (k=1,2,\cdots,N);$$

下面這公式確定平方中值誤差δ_n

$$\delta_n^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(z-z_k)^2,$$

就是說，δ_n是各個誤差的平方的算術平均值的平方根。

我們也利用這個平方中值誤差來衡量和(32)對於函數$f(x)$的近似程度。這裏只是應當注意，我們不是對有限個值來求平方中值誤差，而是對於連續分佈在整個區間$(-\pi,+\pi)$上的無窮多個值來求。如此，每個各別的誤差與$\Delta_n(x)$沒有什麼不同，它們的平方的算術平均值就是

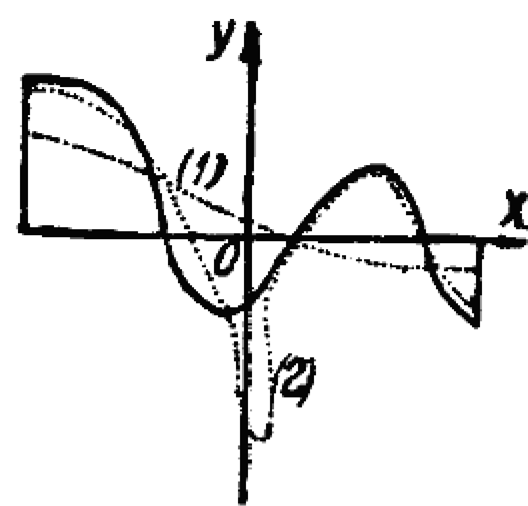


圖 123

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Delta_n^2(x)dx,$$

於是表達式(32)的平方中值誤差由下面的公式來求：

$$(33)\qquad \delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Delta_n^2\ (x)\,dx=$$
$$=\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\ (\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}^2dx.$$

現在我們要挑選出常數 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n$，使得量 δ_n^2 最小，就是解決求函數 δ_n^2 的最小值的問題，δ_n^2 是 $2n+1$ 個變量的函數。

我們先簡化 δ_n^2 的表達式 (33)。作括號的乘方，就求得:

$$(34)\qquad \left\{f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}^2=$$

$$=[f(x)]^2-\alpha_0f(x)-2\sum_{k=1}^{n}\ (\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)f(x)+\frac{\alpha_0^2}{4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2kx+\beta_k^2\sin^2kx)+\sigma_n,$$

其中 σ_n 記下列諸表達式的線性結合:

$$\cos lx\cos mx,\quad \sin lx\sin mx \qquad (l\neq m)$$
$$\cos lx\sin mx,\quad \cos lx,\quad \sin mx$$

根據三角函數的正交性質 [142]，所有這些表達式沿區間 $(-\pi,+\pi)$ 的積分等於零，於是推知，σ_n 沿這個區間的積分等於零。我們知道，$\cos^2kx$ 與 $\sin^2kx$ 的積分等於 π，把表達式 (34) 代入到公式 (33) 中，就得到:

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx+\beta_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx\right]+$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

注意關於函數 $f(x)$ 的福里哀係數的表達式 (9)，可以把 δ_n^2 的表達式寫成下面的形狀:

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2dx-\frac{\alpha_0 a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)+$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2),$$

或者，加減下面的和，

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

可以寫成:

$$(35)\quad \delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+\frac{1}{4}(\alpha_0-a_0)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2].$$

顯然當右邊最後的正項等於零時，也就是若設 $\alpha_0=a_0$ 並且一般的 $\alpha_k=a_k$ 而 $\beta_k=b_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 時，δ_n^2 有最小值。**於是，用 n 級三角多項式作函數 $f(x)$ 的近似表達式時，如果這多項式的係數是函數 $f(x)$ 的福里哀係數，則平方中值誤差最小。**

這時，我們注意一個重要的情況。由所得到的結果推知，使得 δ_n^2 取極小值的數值 α_k 與 β_k 不依賴於附標 n. 若 n 增大，則需要補充以新的係數 α_k 與 β_k，不過以前已經計算出來的係數保留不變。

用 a_k 與 b_k 來替代對應的 α_k 與 β_k，由公式 (35) 就得到最小誤差 ε_n 的大小，於是給出：

(36) $$\varepsilon_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

或

(37) $$2\varepsilon_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

當三角多項式的級數 n 增大時，(37)的右邊就補充了新的負項（或者說，在任何情形下，不是正的項）：$-a_{n+1}^2, -b_{n+1}^2, \cdots$，如此，當 n 增大時，誤差 ε_n 只可以減小，就是說，當 n 增大時，近似的準確程度提高（不降低）。

量 ε_n^2 可以由公式 (33) 來表達，只要在其中用 a_k, b_k 來替代 α_k, β_k 就成，就是說，它是由某一個函數的平方的積分來表達的，所以 ε_n^2 一定是正的，或者嚴格來說，它不是負的。注意這一點，再根據 (37)，就得到：

(38) $$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2dx.$$

到現在為止關於 $f(x)$ 的性質我們沒有給過任何的假定。為了以上的討論，必須要使得我們所利用到的所有的那些積分都存在，就是說，要使得可以由公式 (9) 計算福里哀係數，並且要使得這函數的平方的積分存在。為確定起見，我們算作 $f(x)$ 連續或是有有限個第一類間

斷點。這時所有的上述的積分一定有意義[I, 116]。關於$f(x)$可以作出很廣泛的假定，在任何情形下，在所有以上及以下的討論中，以前所敘述過的狄義赫利條件中關於有限多個極大值以及極小值的假定沒有作用。回憶不等式(38)。當n增大時，左邊的正項的和要增加（不減小），不過這時它保持小於這不等式右邊的確定的正數。由此直接推出，無窮級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

是收斂級數[I, 120]。讓n趨向無窮大，由不等式(38)取極限，就得到：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx. \tag{39}$$

注意，當n無限增加時，收斂級數的一般項應當趨向零；我們可以推出下面這個定理：

定理 **當對於$f(x)$作了上述的假定時，若$k\to+\infty$，則$f(x)$的福里哀係數a_k與b_k趨向零。**

從我們的新的觀點來看，下面這個問題是個基本問題：**當n無限增加時，誤差ε_n是否趨向零。**若當n無限增加時，取公式(37)右邊的極限，則無窮級數$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$代替了有限項和$\sum\limits_{k=1}^{n}$，就是說：

$$\lim_{n\to\infty}2\varepsilon_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

由此推出，ε_n趨向零相當於在公式(39)中我們有＝號，就是

$$(40)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

這個方程通常叫做**封閉性方程**。在本章的下一節中我們證明 $\varepsilon_n\to 0$，就是說，對於所有的具有上述性質的函數 $f(x)$ 來講，實際上方程 (40) 成立。

148. 一般的正交函數組 這一章中所作的絕大部分的討論並非基於三角函數的特殊性質，而只是以函數族 (4) 的正交性爲基礎的。所以這些討論適用於任何的正交函數族。我們會看到，在數學物理的問題中常遇到這樣的函數族。設有在區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的實函數族，爲確定起見，我們算作這些函數是連續的：

$$(41)\qquad \varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$$

若當 $m\neq n$ 時

$$(42)\qquad \int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0,$$

我們就說函數族 (41) 是正交的。族 (41) 中每個函數的平方的積分等於某一個正常數。我們用下面的記號來記這些常數：

$$(43)\qquad k_n=\int_a^b[\varphi_n(x)]^2dx.$$

若族 (41) 中的每一個函數 $\varphi_n(x)$ 乘上一個數因子 $\frac{1}{\sqrt{k_n}}$，則根據(42)與 (43)，新的函數

$$\psi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{k_1}}\varphi_1(x);\psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{k_2}}\varphi_2(x);\cdots;\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{k_n}}\varphi_n(x);\cdots$$

不僅滿足正交性的條件，而且每個函數的平方的積分等於一，就是說

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{當 } m \neq n \text{ 時} \\ 1 & \text{當 } m = n \text{ 時。} \end{cases} \tag{44}$$

若函數族

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\cdots,\psi_n(x),\ \cdots \tag{45}$$

滿足條件(44),則我們說這個函數族是**正交的**而且是**標準的**。設 $f(x)$ 是確定於區間 (a,b) 上的某一個函數，並假定在這區間上它可以依函數(45)展開爲級數形狀來表示：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k(x), \tag{46}$$

其中 c_k 是某些數係數。在(46)的兩邊乘以 $\psi_n(x)$，其中 n 是某一個正整數，再沿區間 (a,b) 求積分，算作右邊的級數可以逐項積分

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)\,dx.$$

注意(44)，就得到下面的關於 c_n 的表達式;

$$c_n=\int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx \quad (n=1,2,\cdots\cdots). \tag{47}$$

由這些公式所確定的係數，叫做**函數 $f(x)$ 關於函數組(45)的廣義福里哀係數**。像在[142]中一樣，以上的討論只有引導的性質，問題的嚴格的提出法如下：若把由公式(47)計算出來的係數代入到(46)右邊的級數中，在區間 (a,b) 上這個級數是否收斂，如果收斂的話，它的和是否等於 $f(x)$？解答這個問題時，自然關於 $f(x)$ 要作出某些假定。把由公式(47)求出的 c_n 的值代入到(46)中所得到的級數通常叫做函數 $f(x)$ 的**廣義福里哀級數**。

現在我們轉到第二個觀點。我們寫出，當用下面形狀的有限項和

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x)$$

來表示給定的函數 $f(x)$時，關於平方中值誤差的公式。這個誤差的平方由下面的公式來表達：

$$\delta_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x) \right]^2 dx.$$

注意 (44) 與 (47)，並重複像在 [147] 所作的計算，就得到：

$$(b-a)\delta_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - c_k)^2.$$

像以上一樣，由此直接推出，若 γ_k 等於函數 $f(x)$ 的福里哀係數，則 δ_n^2 有最小值，並且關於這個最小值 ε_n，我們有公式：

$$(b-a)\varepsilon_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

像以上一樣，由此推出級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

的收斂性，以及不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx, \tag{48}$$

這個不等式通常叫做**貝塞耳不等式**。現在基本問題是：當 n 無限增加時，ε_n 是否趨向零，而 ε_n 趨向零就相當於在 (48) 中我們有 = 號，就是說

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{49}$$

這個方程叫做 f (x) **關於函數組** (45) **的封閉性方程**。若對於具有上一段中所述性質的任何函數，方程 (49) 是正確的，則這個函數組叫做**封閉的**。我們提出，若是這樣的，則可以證明對於比較更廣泛的函數來講，方程 (49) 還是正確的。

在 B. A. 斯捷克洛夫的工作中，關於各種的正交函數組，他給了封閉性方程的證明。在這些工作中，還顯示出在正交組的理論中封閉性方程的重要意義。對於三角級數，封閉性方程的證明，首先是 A. M. 拉普諾夫給的。

回到函數族

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

這些函數在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上具有正交性，但不是標準的，就是說它們的平方的積分不等於一。由以前所述的計算 [142] 推知，在這情形下，函數族

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \cdots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \cdots$$

是正交的而且是標準的。

以上所作有簡單的幾何的類似處。我們考慮普通的三維空間；設 $\boldsymbol{A}$ 是這空間的一個向量，而且 A_x, A_y, A_z 是它在某一套直角坐標軸上的支量。這個向量的長度的平方由下面的公式表達 [103]：

(50)
$$|\boldsymbol{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 .$$

若 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 是兩個向量，則它們垂直的條件是 [103]：

(51)
$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0.$$

現在我們考慮比較更廣泛的向量空間，我們算作給定的在區間 (a, b) 上的任何實函數 $f(x)$ 是這空間的向量，這些函數要具有某些一般的性質，就像我們在上一段中所講過的使得有可能作出我們所需要的積分的性質。

類似於(50)，我們取積分

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

的大小作爲我們的函數空間的向量 $f(x)$ 的長度的平方，並且類似於(51)，若對於這函數空間中的兩個向量 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$，

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = 0,$$

則叫做這兩個向量垂直或是正交。在這情形下，沿區間 (a, b) 的積分代替了公式(50)與(51)中的有限項和。應用這樣的辭彙，我們可以說，條件(44)相當於，組成族(45)的向量對對正交而且長度等於一，就是說，在我們的函數空間中，向量 $\psi_n(x)$ 就類似於普通空間中對對正交的基本單位向量組。可以說由公式(47)計算出來的 c_n 是向量 $f(x)$ 在基本向量 $\psi_n(x)$ 上的投影。貝塞爾不等式(48)相當於：支量的平方和 $\leqslant$ 這向量的長度的平方。在三維空間中，若我們取三個對對正交的基本單位向量，則根據(50)，我們總有 $=$ 號。不過，例如，如果我們取消沿 OZ 軸方向的第三個基本向量，則代替了 $=$ 號我們就應當寫成

$$A_x^2 + A_y^2 \leqslant |\boldsymbol{A}|^2,$$

其中＝號只是對於在 XY 平面上的向量成立，而對於其餘的向量我們有＜號。在函數空間中存在有無窮多的對對正交的基本向量，但是不可能簡單的計算出對於這樣多的基本向量，是否還有漏掉的存在。

若對於所有的函數 $f(x)$，就是說，對於我們的函數空間中所有的向量，類似於公式(50)的封閉性公式(49)成立，則這就是沒有丟掉一個基本向量的判別法，就是說，對於族(45)，不可能再補充一個新的基本向量 $\psi_0(x)$，使得它與所有的已經有的都正交。實際上，設存在一個這樣的函數 $\psi_0(x)$，就是說

$$\int_a^b \psi_0(x)\psi_n(x)dx = 0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

根據(47)，由此推知，函數 $\psi_0(x)$ 關於函數族(45)的所有的福里哀係數都等於零。由條件，公式(49)對於所有的 $f(x)$ 都應當成立，特別是對於 $\psi_0(x)$。不過對於 $\psi_0(x)$ 所有的 c_n 都等於零，於是公式(49)給出

$$\int_a^b [\psi_0(x)]^2 dx = 0. \tag{52}$$

例如，若假定 $\psi_0(x)$ 是連續函數，則由(52)推知，在區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上 $\psi_0(x)$ 恒等於零。若除去恒等於零的函數外不存在有任何的連續函數與所有的函數(45)都正交，則對於連續函數來講，正交函數組(45)叫做完整的。由以上所述推知，由封閉性可以推出對於連續函數的完整性。對於完整性用較廣泛的定義時(不只是對連續函數來講)，有可能由完整性得到封閉性。

149. 實用的調和分析 把已知函數展開成福里哀級數的運算叫做調和分析。若函數

$f(x)$ 是由分析法給定的，則確定福里哀係數的公式(27)解決了這個問題。不過在實用中常遇到的很多的情形中，函數是由實驗法給定的，那時調和分析的問題就包含有尋求計算福里哀係數的最方便的方法，或直接求給定函數的各級調和素的最方便的方法。

調和分析的計算方法基礎在於應用積分的近似計算公式以計算關於 a_k 與 b_k 的積分。這些近似計算公式中最簡單的是矩形公式[I，108]。

我們算作區間的長度等於 2π. 只要適當的選擇 OX 軸上的尺度這是總可以達到的。區間的端點算作在點 $x=0$ 與 $x=2\pi$. 現在把區間 $(0, 2\pi)$ 分爲 n 個部分區間，用下面的記號記分點的橫坐標：

$$x_0=0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2\pi,$$

把函數 $f(x)$ 在這些點的值記作

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2, \cdots,\ Y_{n-1},\ Y_n.$$

這時由矩形公式求得：

$$(53)\qquad a_k \approx \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos kx_i;\qquad b_k \approx \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \sin kx_i,$$

計算係數 a_k 與 b_k 時有各種的方法可以完全簡化公式(53)，並且可能減少必要的算乘法的數目。

以下我們講的方法是 W. Lohmann[1] 的書中所講的，這個方法基於公式(53)的某一變換，使得要作的手續非常簡單方便，並且結果有相當高度的準確性。

1.設有要作調和分析的曲線的圖形，把橫坐標軸放在這曲線之下，並且盡可能的與它接近(圖123)，以使得沒有負的縱坐標而且盡可能沒有很大的縱坐標。我們把這個曲線的週期分爲二十等分。

[1] "Harmonische Analyse zum Selbstunterricht". Berlin, 1921.

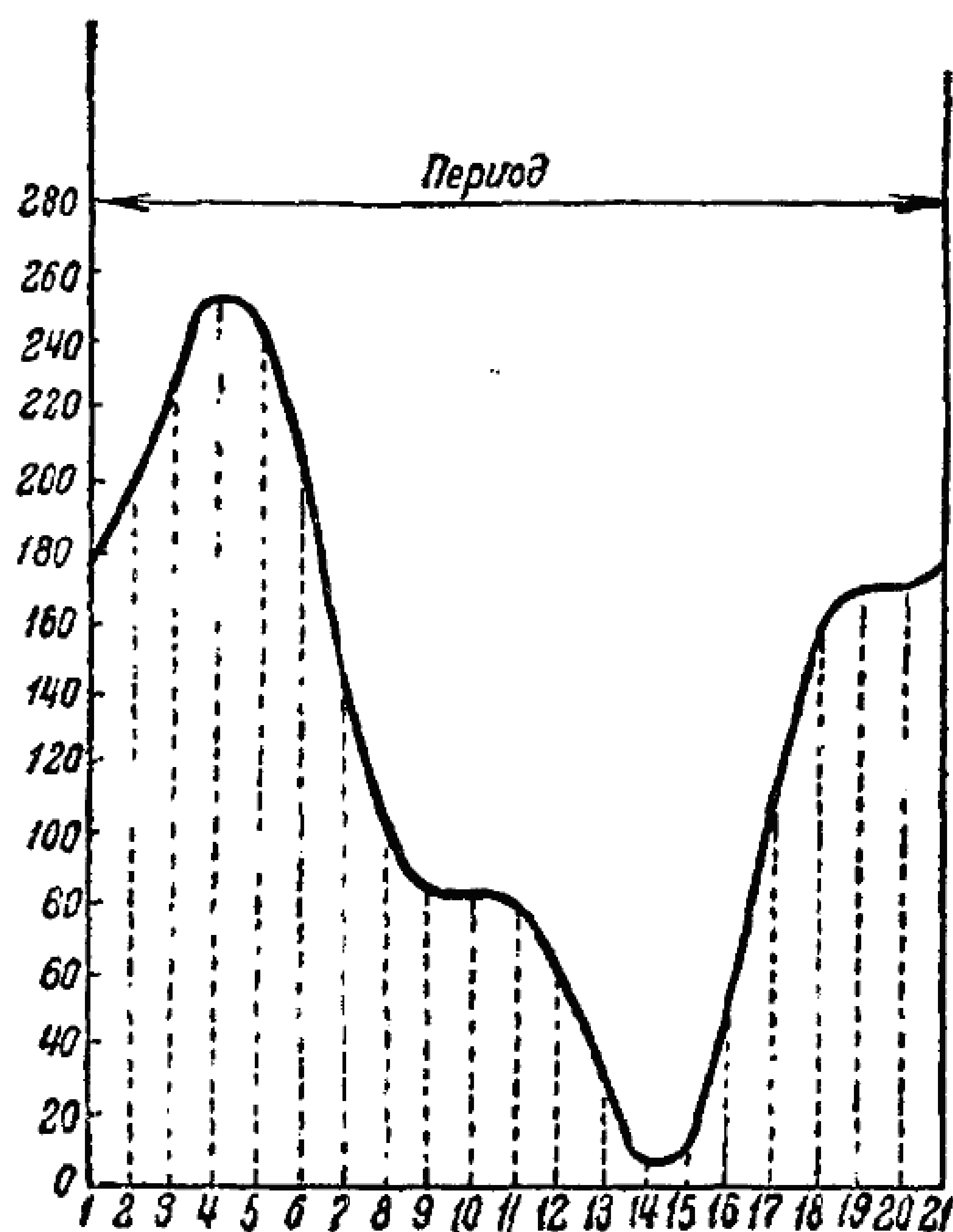


圖 123

1	175	—	—	—	—	■
2	196	186	159	116	59	
3	230	218	186	136	69	
4	253	240	205	149	76	
5	245	233	198	145	74	
6	205	—	—	—	—	
7	135	128	109	80	41	
8	100	95	81	59	30	
9	82	78	66	48	25	
10	85	81	69	50	26	
11	82	—	—	—	—	
12	64	61	52	38	19	
13	29	28	23	17	9	
14	10	10	8	6	3	
15	15	14	12	8	5	
16	50	—	—	—	—	
17	110	105	89	65	33	
18	158	150	125	93	47	
19	174	165	141	103	52	
20	173	164	140	102	52	

圖 124

2.在另外一張作好方格的紙上(如圖 124 所示)作一個表。第一行記第幾個橫坐標的欵數 1, 2, …, 20; 在第二行中寫出曲線上對應於它們的縱坐標，這可以由函數的圖形上直接量出來，並且利用選擇好的足够小的尺度，以使得這些縱坐標的量都是整數

下一行中記錄這些縱坐標與 $\cos 18^\circ=0.95$ 的乘積，第三行中——縱坐標與 $\cos 36^\circ=$ $=0.81$ 的乘積，再以後——縱坐標與 $\cos 54^\circ=0.59$ 的乘積，最後——縱坐標與 $\cos 72^\circ=$ $=0.30$ 的乘積。最後一行保持空白，它的頂上一個畫黑了。

3.爲要確定展開式中的常數項 $\frac{a_0}{2}=r_0$，作出所有的縱坐標之和，再用二除這個和。

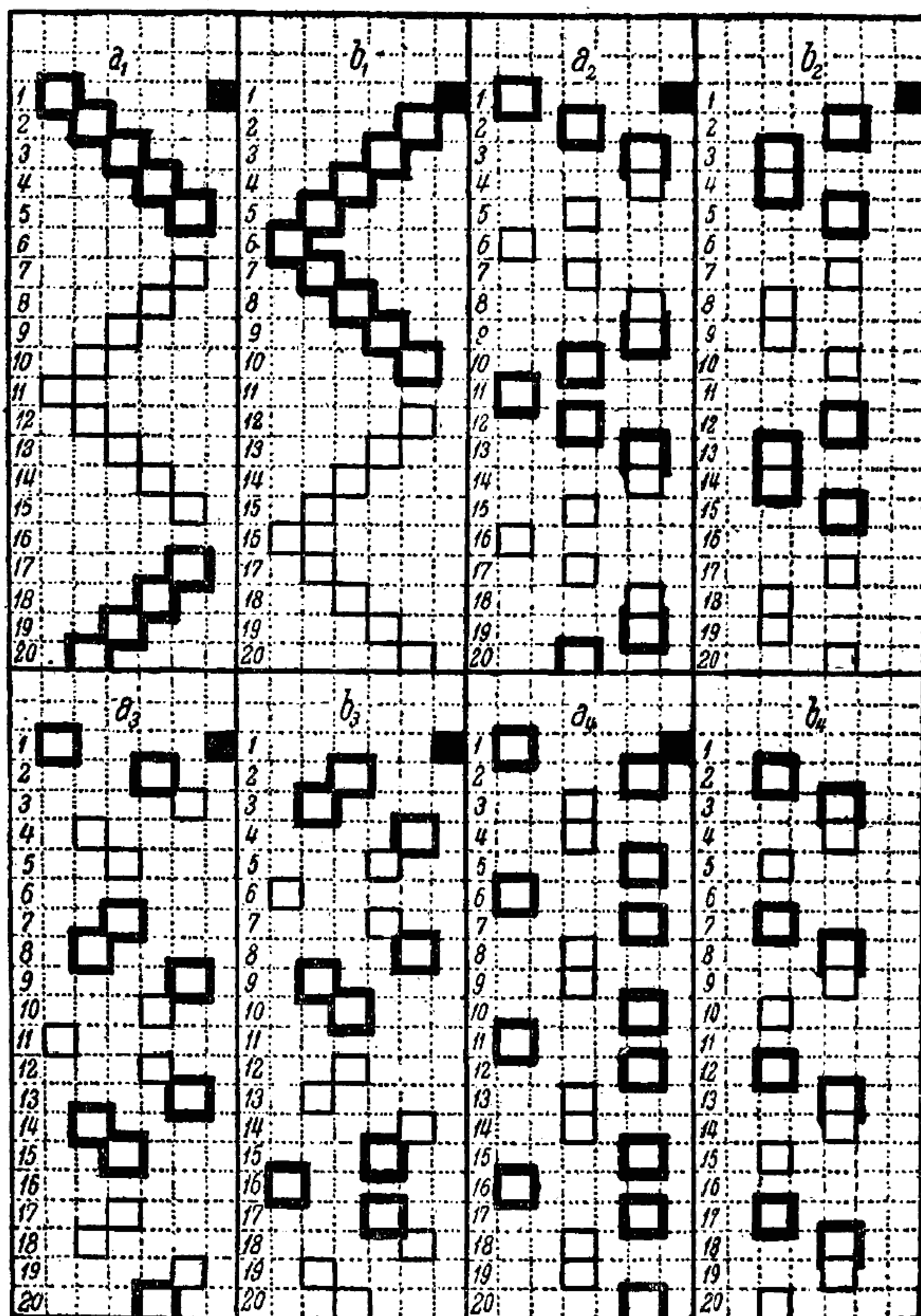


圖 125a

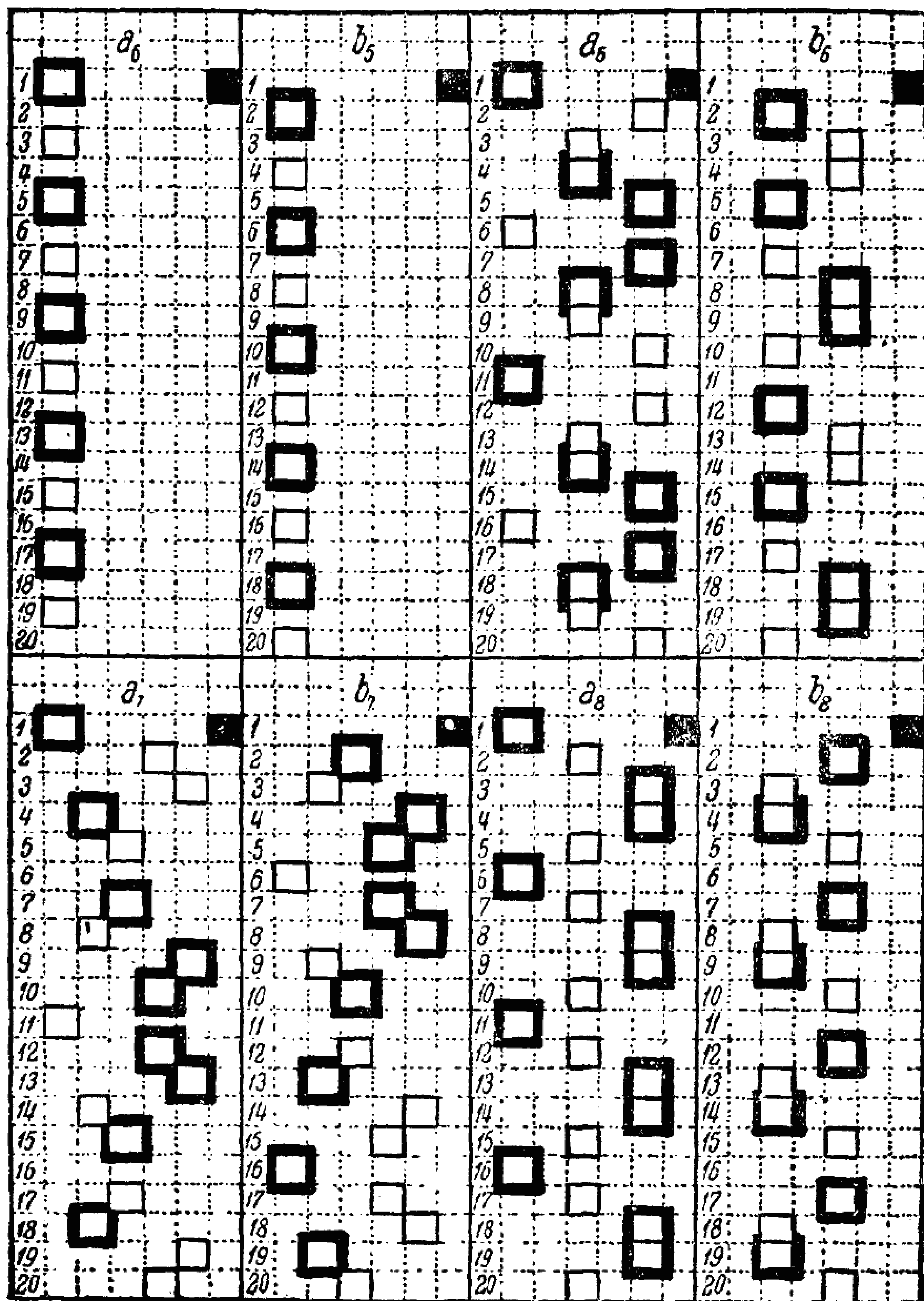


圖 1356

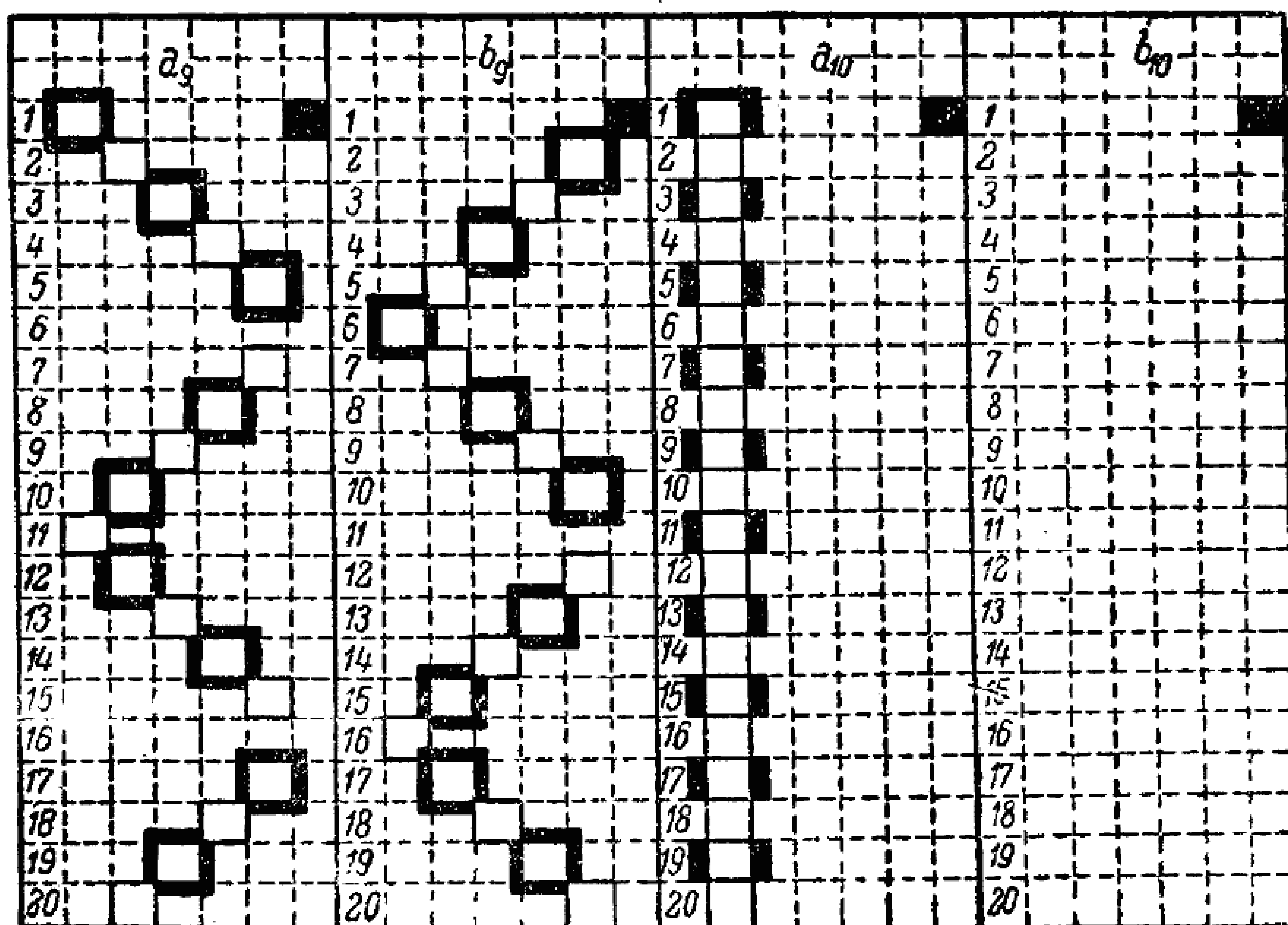


圖 125 B

4.爲要確定其餘的係數 a_k, b_k ($k=1,2,\cdots,10$)，對於每一個係數，像圖 125 所作的形式，用透明的蠟紙作好模子。在其上模子與格子的大小應當恰好與圖 124 上表中的對應相同。模子中所指示出的格子應當用粗細線圈好，或用不同的顏色圈好，把每一個格子放在表上(圖 124)計算粗線圈的格子中的數之和 $\Sigma_{(+)}$, 以及細線圈的格子中的數之和 $\Sigma_{(-)}$

用所有的模子這樣作，並作出對應的和之差 ($\Sigma_{(+)}-\Sigma_{(-)}$)，再把每一個用 10 除；得到的商就給出係數 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_{10}, b_{10}$。

5.由公式

$$r_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

確定未知展開式中各個調和素的振幅 $r_1, r_2, \cdots, r_{10}$。

由公式

$$\operatorname{tg}\varphi_k=\frac{a_k}{b_k}$$

來確定各個調和素的相 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{10}$。

爲了確定角度 φ，可以利用下表，這樣求出的 φ 準確到 1°。

		0° ↑	1° ↑	2° ↑	3° ↑	4° ↑	5° ↑	6° ↑	7° ↑	8° ↑	9° ↑
0°	0	0,01	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,11	0,13	0,15	0,17
10°	0,17	0,19	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	2	0,33	0,35
20°	0,35	0,37	0,39	0,41	0,43	0,46	0,48	0,50	0,5	0,54	0,57
30°	0,57	0,59	0,61	0,64	0,66	0,69	0,71	0,74	0,77	0,80	0,82
40°	0,82	0,85	0,88	0,92	0,95	0,98	1,02	1,05	1,09	1,13	1,17
50°	1,17	1,21	1,26	1,30	1,35	1,40	1,46	1,51	1,57	1,63	1,70
60°	1,70	1,75	1,84	1,90	2,06	2,10	2,20	2,30	2,40	2,5	2,7
70°	2,7	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,9	4,2	4,5	4,9	5,4
80°	5,4	6,0	6,7	7,6	9	10	13	16	23	38	115
90°	115	—	—	—	—	—	—	—	—	—	∞

在這表中可以找出兩個數，使得比 $\left|\frac{a_k}{b_k}\right|$ 在它們之間，把對應的角度記作 ψ_k，所述兩個數所在的一列的左邊記的是度數的十位數，這兩個數之間向上的箭頭指出個位數。

求出 ψ_k，在由下面的表確定 φ_k，它依賴於 a_k 與 b_k 的符號：

a_k	b	k
+	+	$\varphi_k=\psi_k$
+	−	$\varphi_k=180°-\psi_k$
−	−	$\varphi_k=180°+\psi_k$
−	+	$\varphi_k=360°=\psi_k$

所有這些計算可以列成一個表的形狀，下面所作的是對於圖 123 上的曲線作的。

$r_0=120$	$\Sigma(+)$	$\Sigma(-)$	$a=\frac{\Sigma(+)-\Sigma(-)}{10}$	$\Sigma(+)$	$\Sigma(-)$	$b=\frac{\Sigma(+)-\Sigma(-)}{10}$	a^2	b^2	$r=\sqrt{a^2+b^2}$	$\operatorname{tg}\psi=\frac{b}{a}$	ψ°	φ°
1	1201	424	+77,7	1121	496	+62,5	6037,3	3906,3	100	1,24	51	51
2	332	819	+ 1,3	804	785	+ 1,9	1,7	3,6	2	0,68	34	34
3	653	968	−31,5	754	865	−11,1	992,3	123,2	33,4	2,84	71	251
4	821	838	− 1,7	785	798	− 1,3	2,9	1,7	2	1,38	54	234
5	641	634	+ 0,5	654	640	+ 1,4	0,3	2,0	2	0,36	20	20
6	832	827	+ 0,5	797	785	+ 1,1	0,3	1,2	1	0,45	24	24
7	808	813	− 0,5	802	817	− 1,5	0,3	2,3	2	0,33	18	198
8	823	828	− 0,5	792	797	− 0,5	0,3	0,3	1	1,00	45	225
9	816	809	+ 0,7	815	802	+ 1,3	0,5	1,7	2	0,54	29	29
10	1277	1294	− 1,7	—	—	—	—	—	2	∞	90	270

最後我們提出，上述方法只是對於第一調和素給出比較正確的結果。

§2 福里哀級數理論中的補充知識

150. 福里哀級數展開式 在這一節中我們比較深入而且嚴格的來討論福里哀級數的理論，從討論展開 $f(x)$ 爲福里哀級數的定理的證明開始。在這裏我們讓 $f(x)$ 符合一些條件，但不同於狄義赫利條件，以使得證明可以化簡。以後我們再講狄義赫利定理的證明。

回到函數 $f(x)$ 的福里哀級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos kt\,dt;\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin kt\,dt,$$

我們把積分變量記作 t， 是爲了計算出積分後不致於與公式（1）中的變量 x 混淆。把 a_k 與 b_k 的表達式代入到公式（1）中，求函數 $f(x)$ 的福里哀級數的前 $(2n+1)$ 項之和，我們把它記作 $S_n(f)$：

$$S_n(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

不過我們有下面的公式［I, 174］

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos(n-1)\varphi=\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

在這公式中用 $(n+1)$ 來替代 n， 並由兩邊減去 $\frac{1}{2}$，就得到：

$$\frac{1}{2}+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

由此

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)=\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}. \tag{2}$$

於是上面的 $S_n(f)$ 的表達式可以寫成下面的形狀。

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

由給定的在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上的函數 $f(x)$，以 2π 爲週期作週期性的延續，於是我們可以算作對於 x 的所有的實數值它是確定的，而且以 2π 爲週期。根據(2)，對 t 來講，積分號下的分式也以 2π 爲週期。注意[142]中的附註，在上面的積分中我們可以用任何的長度爲 2π 的區間來替換積分區間 $(-\pi, +\pi)$。無論取出 $f(x)$ 的自變量 x 的一個什麼值，可以取 $(x-\pi, x+\pi)$ 作爲積分區間：

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

我們再提一下，所有以後我們用的 $f(x)$，瞭解作一個函數，它是由區間 $(-\pi, +\pi)$ 按照上述形式延續到 x 的所有的實數值的。

把整個積分分爲兩個：一個是 $\int_{x-\pi}^{x}$，另一個是 $\int_{x}^{x+\pi}$。在第一個積分中依照公式 $t=x-2z$ 引用新的積分變量 z 以替代 t，在第二個中——依照公式 $t=x+2z$。在積分號下作好變量替換並計算出新的積分限，就得到：

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz. \tag{3}$$

若我們設在整個區間 $(-\pi, +\pi)$ 上 $f(x)$ 等於1，則顯然它的福里哀級數中的自由項 $\frac{a_0}{2}$ 就等於1，而其餘的項是零，就是說，對於任何

的 n， $S_n(f)$ 等於 1，於是我們有下面的等式：

$$(4)\qquad 1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz \qquad (n=1,2,3\ldots).$$

在證明基本命題之前，我們先證明一個輔助定理：

輔助定理　若 (a, b) 是區間 $(-\pi, +\pi)$ 或是它的一部分，而 $\psi(z)$ 是一個函數，在 (a,b) 上連續，或是在這區間上有有限個第一類間斷點，則當整數 n 無限增加時，積分

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\cos nz\,dz \quad \text{與} \quad \frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\sin nz\,dz$$

趨向零。 若 (a,b) 是區間 $(-\pi, +\pi)$，則這個輔助定理與[147]中的定理完全一樣。現在設 (a,b) 是區間 $(-\pi, +\pi)$ 的一部份。把 $\psi(z)$ 由 (a, b) 延續整個區間 $(-\pi, +\pi)$，使得在位於 (a,b) 之外的區間 $(-\pi, +\pi)$ 一部份上它等於零，就是說，確定一個新的函數 $\psi_1(z)$，使得當 $a\leqslant z\leqslant b$ 時 $\psi_1(z)=\psi(z)$，當 z 屬於 $(-\pi, +\pi)$ 而在 (a, b) 之外時 $\psi_1(z)=0$，這時，我們可以寫成。

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\cos nz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_1(z)\cos nz\,dz,$$

於是根據上述的[147]中的定理，這個積分趨向零。注意，在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上，$\psi_1(z)$ 也是或者連續或者有有限多個第一類間斷點。不難證明，若 (a,b) 是任何的有限區間，這個輔助定理保持是正確的。

現在回來證明展開 $f(x)$ 爲福里哀級數的基本定理。在等式(4)兩邊乘以 $f(x)$，把這個因子移到積分號下，再由(3)式減去所得到

的等式，就有：

$$S_n(f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x-2z)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2z)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz,$$

還可以寫成下面的形狀：

$$(5)\quad S_n(f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x-2z)-f(x)}{-2z}\cdot\frac{-2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2z)-f(x)}{2z}\cdot\frac{2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz.$$

爲要證明函數 $f(x)$ 的福里哀級數收歛而有和 $f(x)$，需要證明當 n 無限增加時差 $[S_n(f)-f(x)]$ 趨向零。

我們在區間 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上考慮函數

$$\psi(z)=\frac{f(x-2z)-f(x)}{-2z}\cdot\frac{-2z}{\sin z}.$$

由 $f(x-2z)$ 的間斷點可以產生出 $\psi(z)$ 的第一類間斷點，此外，需要特別討論 $z=0$ 這個值。設在所取的點 x 函數 $f(z)$ 不僅連續而且有微商。由微商的定義以及顯然的等式

$$\lim_{z\to 0}\frac{-2z}{\sin z}=-2$$

推出，當 $z\to 0$ 時，$\psi(z)$ 趨向一個確定的極限，這個極限等於 $-2f'(x)$。應用上述的輔助定理於函數 $\psi(z)$，由此推出，當 n 無限增加時，公式 (5) 右邊的第一項趨向零。同樣可以證明第二項趨向

零，由此推出，在所取的點 x，差 $[S_n(f)-f(x)]$ 趨向零。如此我們得到下面的定理：

定理 **若在區間** $(-\pi,+\pi)$ **上** $f(x)$ **連續或有有限多個第一類間斷點，則在** $f(x)$ **有微商的任何點，它的福里哀級數收斂而有和** $f(x)$。

不難得到更廣泛的結果，設在點 x 函數連續或者縱然是第一類間斷點，而存在有有限的極限

$$(6)\qquad \lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}\ \text{以及}\ \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

這兩個極限的存在，也就是左微商與右微商存在，在幾何上就相當於有確定的左切線與右切線存在。這時，下述的對於已證明的定理的補充成立：**若存在有有限極限** (6)，**則在這點函數** $f(x)$ **的福里哀級數收斂而且它的和等於** $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ [**若** $f(x)$ **連續，還就等於** $f(x)$]。

(4) 式乘以 $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ 再由 (3) 式減掉，可以寫成：

$$(7)\qquad S_n(f)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-2z}\cdot\frac{-2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2z)-f(x+0)}{2z}\cdot\frac{2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz.$$

需要證明，當 n 無限增加時，上式右邊趨向零。

注意極限 (6) 存在，我們可以肯定，當 $z\to0$ 時，兩個分式

$$\frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-2z} \text{ 與 } \frac{f(x+2z)-f(x+0)}{2z}$$

都有有限的極限，再由像以上完全一樣的討論，我們可以相信，當 n 無限增加時，(7) 式右邊的兩個積分都趨向零。如此就證明了以上對於定理的補充。

對於 $x=\pi$ 與 $x=-\pi$ 兩個值，根據 $f(x)$ 的週期延續性，極限 (6) 成爲極限

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(-\pi+h)-f(-\pi+0)}{h} \text{ 與 } \lim_{h\to+0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi-0)}{-h},$$

而級數之和是

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

注意，在前一段我們所考慮過的所有的例中，$f(x)$ 在所有的點都滿足這裏證明的定理或是對於它的補充所需要的條件。

151. 第二中值定理 爲要證明狄義赫利定理以及更仔細的研究福里哀級數，我們需要用積分學中一個命題，它與卷 I 中 [I, 95] 所討論的中值定理很類似，通常叫做第二中值定理。這個命題可以敘述如下：若在有限區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上，$\varphi(x)$ 是單調有界函數而有有限多個間斷點，$f(x)$ 是連續函數，則

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx, \tag{8}$$

其中 ξ 是區間 (a,b) 中的某一個數。記號 $\varphi(a+0)$ 是當 x 由區間 (a,b) 內趨向 a 時 $\varphi(x)$ 的極限。記號 $\varphi(b-0)$ 具有類似的意義。

不難看出，只須對於 $\varphi(x)$ 是上升函數的情形來證明公式 (8)，因爲若 $\varphi(x)$ 是下降函數，則 $[-\varphi(x)]$ 是上升函數，應用公式 (8) 於 $[-\varphi(x)]$ 並把兩邊換成相反的符號，就得到關於 $\varphi(x)$ 的等式 (8)。還要說明，只須對於當 $\varphi(a+0)=0$ 時的情形來證明等式 (8)。實際上，設對於這種情形證明了等式 (8)，而我們所考慮的 $\varphi(x)$ 不滿足 $\varphi(a+0)=0$ 這條件。我們就引用一個新的單調函數 $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(a+0)$，這個函數在端點的極限值就

是 $\psi(a+0)=0$，$\psi(b-0)=\varphi(b-0)-\varphi(a+0)$，依照假定，對於函數 $\psi(x)$ 可以應用公式(8)。再根據 $\psi(a+0)=0$，公式(8)就給出

$$\int_a^b \psi(x)f(x)dx=\psi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx,$$

或

$$\int_a^b [\varphi(x)-\varphi(a+0)]f(x)dx=[\varphi(b-0)-\varphi(a+0)]\int_\xi^b f(x)dx,$$

由此

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx=\varphi(a+0)\left[\int_a^b f(x)dx-\int_\xi^b f(x)dx\right]+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx,$$

而由這等式就直接推出關於 $\varphi(x)$ 的公式(8)。於是只須對於 $\varphi(a+0)=0$ 而且 $\varphi(x)$ 是上升函數或者說是不下降的函數的情形來證明公式(8)。顯然，在區間 (a,b) 上這個函數的值不是負的。

爲要證明，我們在區間 (a,b) 上標記出下列各點把這區間分爲小的部分區間：

$$x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1},x_n=b.$$

我們已知 [I,95]：

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

其中 ξ 是在區間 (x_{i-1},x_i) 內的一個值。

作出和

$$\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

當 n 無限增加而且區間 (x_{i-1},x_i) 之長的最大值無限減小時，這個和趨向一個定積分[在卷 I 中我們講過]，就是說，我們有：

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

現在我們來討論這個和

$$(9)\quad \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \left[\int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{b} f(x)\,dx \right] =$$

$$= \varphi(\xi_1) \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

積分:

$$(10)\quad \int_a^b f(x)\,dx,\quad \int_{x_1}^b f(x)\,dx,\quad \int_{x_2}^b f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_{x_{i-1}}^b f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx$$

都是下面這函數的特殊值

$$(11)\qquad \int_x^b f(x)\,dx = -\int_b^x f(x)\,dx,$$

這個函數是積分變限 x 的連續函數 [I,96]，所以所有的(10)中的值都位於函數(11)的最小值 m 與最大值 M 之間。

注意，在表達式(9)中，所有的因子

$$\varphi(\xi_1) \ \text{與}\ \varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})$$

都不是負的，在這表達式中先用 m 來替代(10)中諸值，再用 M 來替代(10)中諸值，就得到:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \geqslant \left\{ \varphi(\xi_1) + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \right\} m = \varphi(\xi_n)\, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant \left\{ \varphi(\xi_1) + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \right\} M = \varphi(\xi_n)\, M,$$

就是說

$$\varphi(\xi_n)\, m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \leqslant \varphi(\xi_n)\, M,$$

或者，當 $n\to\infty$ 時取極限，我們就有

$$\xi_n \to b-0;\quad \varphi(\xi_n)\to\varphi(b-0),$$

於是就有不等式

$$\varphi(b-0)m \leqslant \int_a^b \varphi(x)f(x)dx \leqslant \varphi(b-0)M,$$

就是

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(b-0)P,$$

其中 P 是在區間 (m,M) 上的某一個數。但是連續函數 (11) 在區間 (a,b) 上要取由最小値 m 到最大值 M 之間的所有的值 [I,43]，而 P 是在 m 與 M 之間的數，所有在區間 (a,b) 上一定有這樣一個値 ξ，使得

$$\int_\xi^b f(x)dx = P,$$

於是推知

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx,$$

根據條件 $\varphi(a+0)=0$，這就與公式 (8) 全同。

注意，我們可以證明公式 (8)，而無須假定 $f(x)$ 的連續性以及 $\varphi(x)$ 的間斷點有有限多個，這裏我們不講這個證明了。最後我們提出，替代公式 (8)，可以證明一個較廣泛的公式：

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = A\int_a^\xi f(x)dx + B\int_\xi^b f(x)dx,$$

其中 A 是 $\leqslant\varphi(a+0)$ 的任何一個固定的數，而 $B\geqslant\varphi(b-0)$。

系 在［147］中我們看到，在某些條件下，當 $n\to\infty$ 時，函數 $f(x)$ 的福里哀係數趨向零。若 $f(x)$ 滿足狄義赫利條件，則可以證明一個更準確的結果，也就是：當 n 增大時，a_n 與 b_n 是無窮小，而且它們的級不低於 $\frac{1}{n}$，就是說，對於它們有下面形狀的估計值

$$|a_n|<\frac{M}{n};\quad |b_n|<\frac{M}{n},$$

其中 M 是確定的正數。依照條件，區間 $(-\pi,+\pi)$ 可以分爲有限個部分區間，使得在每一個區間上 $f(x)$ 單調而有界。設 (α,β) 是一個這樣的部分區間。係數 a_n 就是下面形狀的有限項之和:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx dx,$$

依照中值定理，這樣一項可以寫成:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}f(\alpha+0)\int_{\alpha}^{\xi}\cos nx dx+\frac{1}{\pi}f(\beta-0)\int_{\xi}^{\beta}\cos nx dx$$

$$=\frac{f(\alpha+0)(\sin n\xi-\sin n\alpha)+f(\beta-0)(\sin n\beta-\sin n\xi)}{\pi n}.$$

如此，對於表達式 a_n 中各別的項我們得到形狀如 $\frac{M}{n}$ 的估計值，其中 $M=\frac{2}{\pi}|f(\alpha+0)|+\frac{2}{\pi}|f(\beta-0)|$。顯然，有限個這樣的項之和也具有同樣形狀的估計值，就是說，a_n 具有這樣的估計值。對於 b_n 可以用類似的討論。

若 $f(x)$ 連續，$f(-\pi)=f(+\pi)$ 而有微商，並且它的微商滿足狄義赫利條件，則用分部積分法作積分，並根據 $f(-\pi)=f(\pi)$ 積分以外的一項成爲零，於是得到:

$$nb_n=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,d\cos nx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f'(x)\cos nx\,dx.$$

不過最後一個積分是滿足狄義赫利條件的函數 $f'(x)$ 的福里哀係數，所以它有上述的估計值，於是在所作的假定下，對於 b_n 我們得到估計值:

$$|b_n| \leqslant \frac{M}{n^2}.$$

對於 a_n 可以得到類似的估計值。依賴於函數 $f(x)$ 的性質以更仔細考慮福里哀係數的估計值，我們以後再講。

152. 狄義赫利積分　由公式(3)看出，福里哀級數的收斂問題，也就是和 $S_n(f)$ 的極限的存在問題，引起對於下面型態的積分的討論:

$$\int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz.$$

我們來考慮一種比較簡單些的積分，就是下面形狀的積分:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z} dz, \tag{12}$$

這叫做狄義赫利積分。關於這個積分我們先證明下面一個輔助定理:

輔助定理　若在區間 (a, b) 上 $\varphi(z)$ 滿足狄義赫利條件，則: 1) 若 $a=0$ 而 $b>0$，則當 m 無限增加時積分(12)有極限 $\frac{1}{2}\varphi(+0)$; 2) 若 $a=0$ 而 $b<0$，則這個極限等於 $-\frac{1}{2}\varphi(-0)$; 3) 若 $a<0$ 而 $b>0$，則極限等於 $\frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2}$; 4) 若 a 與 $b>0$ 或 a 與 $b<0$，則所述極限等於零。不難看出，只須證明第一個肯定。如果證明了它，就可以很容易的由它得到其餘的。例如，我們先算作證明了第一個肯定而要證明肯定3與4:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}dz = \frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}dz - \frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}dz.$$

若 a 與 $b>0$，則根據肯定1，右邊的被減數與減數都以 $\frac{1}{2}\varphi(+0)$ 爲極限，於是推知，這個差趨向零，這就證明了肯定4。若 $a<0$ 而 $b>0$，則在減數中用 $(-z)$ 來替代積分變量 z，就得到:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}dz = \frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{-a} \varphi(-z) \frac{\sin mz}{z}dz.$$

因爲 b 與 $(-a)>0$，則對於兩個積分都可以應用肯定 1，於是得到:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\ \frac{\sin mz}{z}dz \to \frac{1}{2}\varphi(+0)+\frac{1}{2}\varphi(-0)=\frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2}.$$

現在我們來證明肯定 1，就是證明，當 $b>0$ 時，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\ \frac{\sin mz}{z}dz \to \frac{1}{2}\varphi(+0). \tag{13}$$

證明時我們先算作 $\varphi(z)$ 不僅滿足狄義赫利條件而且在區間 $(0,b)$ 上是單調的。

以前我們得到過下面這結果:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

考慮積分

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

這是 c 的一個連續函數，當 $c=0$ 時它等於零，當 $c\to\infty$ 時它趨向 $\frac{\pi}{2}$。由此我們可以得到結論：對於所有的正的 c，所寫的積分的絕對值保持小於某一個正數 M. 現在我們考慮具有兩個正的積分限的積分:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{15}$$

顯然我們有:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx-\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx$$

於是

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right|+\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\right|<M+M=2M.$$

就是說，當 a 與 b 是任何的正數時，積分(15)的絕對值保持小於某一個確定的正數 $3M$.

在我們證明(13)之前，先考慮一個比較簡單的積分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

作變量替換 $t=mx$ 並利用(14)，當 n 無限增加時我們得到:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{mb}\frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$$

於是推知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(+0)\frac{\sin mx}{x}\,dx \to \frac{1}{2}\varphi(+0).$$

如此，當要證明(13)，我們只須證明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b [\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx \to 0,$$

就是說，當 n 足够大時，這式子左邊的絕對值要小於任何的正數 ε. 把區間 $(0, b)$ 分爲兩個: $(0,\delta)$ 與 (δ,b)，其中 δ 是一個小的正數，我們以後再固定它。我們來證明，當 n 足够大時，下面兩個積分

$$(16)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx \quad 與 \quad \frac{1}{\pi}\int_\delta^b [\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx$$

中每一個的絕對值都小於 $\frac{\varepsilon}{3}$. 由於函數 $\varphi(x)$ 只有有限多個間斷點，可以取得 δ 足够小，使得在區間 $(0,\delta)$ 上 $\varphi(x)$ 沒有間斷點，於是 $\varphi(x\pm 0)=\varphi(x)$. 注意，依照 $\varphi(x)$ 單調這條件，對於(16)中第一個積分可以應用中值定理，於是得到:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{1}{\pi}[\varphi(\delta)-\varphi(+0)]\int_\xi^\delta \frac{\sin mx}{x}\,dx,$$

於是推知

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[\varphi(x)-\varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}dx\right|<\frac{1}{\pi}\left|\varphi(\delta)-\varphi(+0)\right|\cdot 2M.$$

依照記號 $\varphi(+0)$ 的定義，當 $\delta\to 0$ 時，差 $\varphi(\delta)-\varphi(+0)\to 0$，於是我們可以取得 δ 與零足够近以使得上面這不等式的右邊 $<\frac{\varepsilon}{2}$. 這時，對於任何的 m，(16) 中第一個積分的絕對值 $<\frac{\varepsilon}{2}$. 如此固定好正數 δ，再看 (16) 中第二個積分。對於它也應用中值定理，可以把它寫成下面的形狀:

$$(17)\quad \frac{1}{\pi}[\varphi(\delta)-\varphi(+0)]\int_{\delta}^{\xi}\frac{\sin mx}{x}dx+\frac{1}{\pi}[\varphi(b-0)-\varphi(+0)]\int_{\xi}^{b}\frac{\sin mx}{x}dx.$$

積分之前的因子都是常數，於是我們只須證明當 m 增加時，這兩個積分都趨向零。例如，我們考慮第一個積分，在其中作變量替換 $t=mx$. 我們得到一個積分

$$(18)\qquad \int_{m\delta}^{m\xi}\frac{\sin t}{t}dt.$$

當 m 無限增加時，積分限 $m\delta$ 與 $m\xi$ 也無限增加，因爲 δ 是固定的正數而 ξ 不小於 δ 不過由於積分

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

是收斂的積分，則當積分 (18) 的兩個積分限無限增加時這個積分趨向零 [83]. 表達式 (17) 中的第二個積分可類似的討論，於是整個這表達式 $\to 0$，就是說，(16) 中第二個積分趨向零，於是當 m 足够大時它的絕對值 $<\frac{\varepsilon}{2}$.

在 $\varphi(x)$ 不僅滿足狄義赫利條件而且是單調的假定下，我們證明了 (15) 式，並由它推出了這個輔助定理的所有的肯定。剩下還要證明當 $\varphi(x)$ 只滿足狄義赫利條件時 (15) 式仍然正確。根據狄義赫利條件，區間 $(0, b)$ 可以分爲有限多個部分區間，使得 $\varphi(x)$ 在每一個部分區間上都是單調的。設 $(0, b)$ 可以分爲三個部分區間 $(0, b_1)$, $(b_1\, b_2)$, (b_2, b); 使得在每一部分區間上 $\varphi(x)$ 是單調的。把積分 (15) 分爲三個:

$$(19)\quad \int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz=\int_0^{b_1}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz+\int_{b_1}^{b_2}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz+\\+\int_{b_2}^{b}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz.$$

由於在區間 $(0, b_1)$, (b_1, b_2), (b_2, b) 上函數 $\varphi(z)$ 都是單調的，所以對於右邊每一項都可以應用上面已證的輔助定理。從而，第一項趨向 $\frac{1}{2}\varphi(+0)$，其餘兩項趨向零，所以積分(19) 趨向 $\frac{1}{2}\varphi(+0)$，於是證完。

注意，在狄義赫利積分(12)中，m 這個數可以以任何方式無限增加，不限制只取整數值。下述事實是這裏所得到的結果的原因：當 m 取很大的值時，函數 $\frac{\sin mz}{z}$ 的符號改變的很快；並且當 z 取很大的値時，這函數的値接近零。

153.狄義赫利定理　利用前一段中的輔助定理，不難證明狄義赫利定理[145]．根據3)，我們需要證明，當 n 無限增加時，表達式

$$(20)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}dz$$

趨向 $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$．替代(20)，我們先考慮表達式

$$(21)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}dz.$$

這兩個積分的上限是正數，而且在積分區間上函數 $f(x-2z)$ 與 $f(x+2z)$ 都滿足狄義赫利條件。此外，$m=2n+1\to\infty$，於是依照前一段中所證明的輔助定理，表達式(21)趨向極限 $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$．剩下要證明表達式(20)與(21)之差趨向零。爲此，只須證明積分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz$$

趨向零。我們對於第一個積分來證：

$$(22)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(z)\sin(2n+1)z\,dz,$$

其中

$$\psi(z)=f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right).$$

在積分區間上，第一個因子 $f(x-2z)$ 有有限個第一類間斷點（或者連續）。第二個因子

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{z-\sin z}{z\sin z}=\frac{z-\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}$$

當 $z\to 0$ 時，它趨向零，並且在區間 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上沒有任何的間斷點。從而可以應用 [160] 中的輔助定理於積分 (22)，於是這個積分趨向零。如此就證明了狄義赫利定理中的肯定。

對於已經證明的定理我們補充兩個命題，這兩個命題我們只叙述一下不證明了。我們所得到的命題中只談到，在區間的任何點 x，福里哀級數 $S[f(x)]$ 收斂而有和 $f(x)$，不過在這個命題中沒有談到在區間 $(-\pi,+\pi)$ 上收斂性的特徵。我們現在要叙述的命題，可以補足這個缺陷。

1.在任何的區間上，如果函數 $f(x)$ 在其上滿足狄義赫利條件而且連續，並且這區間位於區間 $(-\pi,+\pi)$ 之內，則級數 $S[f(x)]$ 在這區間上一致收斂。

2.若在整個區間 $(-\pi,+\pi)$ 上 $f(x)$ 滿足狄義赫利條件而且連續，此外並且

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0),$$

則對於所有的 x 值來講，級數 $S[f(x)]$ 一致收斂。

狄義赫利定理對於被展開的函數 $f(x)$ 所需要的條件是相當少的。不過，並不是對於任何的函數，展開爲福里哀級數的定理總成立，甚於存在有不能展開成福里哀級數的連續函數。

在函數確定於區間 $(0,\pi)$ 上的情形，對於只依正弦展開的級數或只依餘弦展開的級數，讀者不難證明與以上所述類似的命題，這時的命題有下述的更改：

在區間 $(0,\pi)$ 上滿足狄義赫利條件時，級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx;\ a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos kt\,dt \tag{23}$$

的和，當 $0<x<\pi$ 時，等於

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{24}$$

而且，當 $x=0$ 時，它等於 $f(+0)$，當 $x=\pi$ 時，它等於 $f(\pi-0)$；級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx;\ b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin kt\,dt \tag{25}$$

的和，當 $0<x<\pi$ 時，等於(24)，當 $x=0$ 或 $x=\pi$ 時，等於零。

所有這些結果都很容易得到，只須把函數 $f(x)$ 延續到相鄰的區間 $(-\pi,0)$，在級數(23)的情形，延續成偶函數的形式；在級數(25)的情形，延續成奇函數的形式；就像我們在[145]中所作的一樣。

154.用多項式作連續函數的近似式 我們的下一個問題是要證明[147]中的封閉性公式(40)。這個證明要以用多項式作函數的近似式

的理論中的某些結果爲基礎。我們現在來講這些結果，它們本身就是很重要的。以下面這個定理爲一切的基礎。

定理 1（維爾斯特拉斯定理） **若 $f(x)$ 是在有限閉區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的任何一個連續函數，則可以作出一個多項式的序列 $P_1(x)$，$P_2(x)$，……在整個閉區間 (a,b) 上，它一致趨向 $f(x)$**[I,144]。

首先我們注意，利用變換 $x'=\frac{x-a}{b-a}$，可以把區間（a，b）換成區間（0,1），把 x 的多項式換成 x' 的多項式，並且是可逆的。所以可以算作區間（a,b）是(0,1)。我們先證明兩個初等代數中的恒等式。先寫出牛頓二項式公式

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m u^m v^{n-m} = (u+v)^n \tag{26}$$

由這恒等式 u 求微商再乘以 u，對所得到的恒等式再這樣作一遍，就得到兩個新的恒等式：

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{n} mC_n^m u^m v^{n-m} = nu(u+v)^{n-1} \\ &\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m u^m v^{n-m} = nu(nu+v)(u+v)^{n-2}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

在 (26) 中讓 $u=x$，$v=1-x$，就有：

$$1=\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{28}$$

(26) 乘以 n^2x^2，(27) 中第一式乘以 $(-2nx)$，(27) 中第二式乘以 1，然後相加，再讓 $u=x, v=1-x$，就得到：

$$\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=nx(1-x)。$$

不難證明〔I,60〕，這等式右邊在區間（0,1）上是正的，當 $x=\frac{1}{2}$ 時它取最大值，由此推知：

$$\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}\leqslant\frac{1}{4}n. \tag{29}$$

現在證明，在區間（0,1）上，多項式

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}f\left(\frac{m}{n}\right)C_n^m x^m(1-x)^{n-m} \tag{30}$$

一致趨向 $f(x)$．(28) 兩邊乘以 $f(x)$，再由所得到的等式減去等式 (30)，可以寫成：

$$f(x)-P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

我們需要證明，對於任何的給定的正數 ε，存在有一個不依賴於 x 的 N，使得

$$\text{當 } n>N \text{ 時，}\left|\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\right|<\varepsilon.$$

由於當 $0\leqslant x\leqslant 1$ 時，乘積 $C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\geqslant 0$，所以

$$\left|\sum_{m=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right|C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

於是只須證明下面這不等式:

(31)當$n>N$時, $$\sum_{m=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right|C_n^m x^m(1-x)^{n-m}<\varepsilon\cdot$$

在區間（0,1）上函數 $f(x)$ 一致連續 [1,35]，就是說，存在有 δ，使得當 $|x_1-x_2|<\delta$ 時 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$。設 x 是區間 (0,1) 中一個固定的值。把和 (31) 分爲兩部分 S_1 與 S_2。在第一個部分和中我們取 m 滿足條件 $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\delta$ 的項。根據 δ 的選擇法，對於由正項組成的第一個和，我們有估計值:

$$S_1<\sum_{(I)}\frac{\varepsilon}{2}C_n^m x^m(1-x)^{n-m},$$

其中記號（I）指示這個和中所取的項是 m 滿足不等式 $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\delta$ 的項。若我們取由 0 到 n 的所有的值作 m，則和只可以增加，就是說

$$S_1<\sum_{m=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^m(1-x)^{n-m}.$$

根據（28）就得到，對於任何的 n，$S_1<\frac{\varepsilon}{2}$ · 再看第二個部分和

$$S_2=\sum_{(II)}\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right|C_n^m x^m(1-x)^{n-m}$$

這裏右邊的和中所取的項是m滿足不等式 $\left|x-\frac{m}{n}\right|\geqslant\delta$或 $|nx-m|\geqslant n\delta$ 的項，我們來估計這個和。函數 $f(x)$ 既是在閉區間（0,1）上連續，在這區間上它應當滿足下面形狀的不等式：$|f(x)|\leqslant M$,

其中 M 是一個確定的正數 [1,35]，從而 $\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right| \leqslant |f(x)|$ $+\left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right| \leqslant 2M$．和 S_2 中各項各乘以因子 $\frac{(nx-m)^2}{n^2\delta^2}$，這樣的因子不小於 1．$2M$ 與 $\frac{1}{n^2\delta^2}$ 是不依賴於 m 的，把它們提出來，就得到：

$$S_2 \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{(II)}(m-nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

所有的項都是正的，若我們取由 0 到 n 的所有的值作 m 求和，則和的值只可以增加。注意（29），就得到：

$$S_2 \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{m=0}^{n}(m-nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{M}{2n\delta^2}$$

M 與 δ 是兩個確定的正數，爲要 S_2 滿足不等式 $S_2<\frac{\varepsilon}{2}$，只須取 $\frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$，也就是 $n>\frac{M}{\varepsilon\delta^2}$。於是我們得到所要求的數 $N=\frac{M}{\varepsilon\delta^2}$．

實際上，當 $n>N$ 時，兩個和 S_1 與 S_2 都 $<\frac{\varepsilon}{2}$，於是不等式（31）成立；這就證明了維爾斯特拉斯定理。不難看出，所證明的定理可以敘述如下：**若 $f(x)$ 是在閉區間 (a,b) 上的連續函數，而 ε 是任何的給定的正數，則存在有 x 的這樣的多項式 $P(x)$，使得在整個區間 (a,b) 上，下面這不等式成立：**

(32) $$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

以維爾斯特拉斯定理爲基礎，對於週期性函數我們證明一個類似的定理。

定理II 若 $f(x)$ 是以 2π 爲週期的連續的週期函數，而 ε 是任何一個給定的正數，則可以求得一個這樣的三角多項式

$$T(x)=c_0+\sum_{k=1}^{m}(c_k\cos kx+d_k\sin kx), \tag{33}$$

使得對於任何的 x：

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon. \tag{34}$$

首先我們提出，根據週期性，我們只須證明在基本區間 $(-\pi,+\pi)$ 上不等式（34）成立。先設 $f(x)$ 是偶函數，並引用新的變量 $t=\cos x$，以替代 x，就是設 $x=\arc\cos t$，這裏我們取這個函數的主値，就是說，當 t 由 1 變到（-1）時，函數 $x=\arc\cos t$ 由 0 連續變到 π。函數 $f(x)=f(\arc\cos t)$ 就是 t 的在區間 $(-1,+1)$ 上的連續函數。依照維爾斯特拉斯定理，存在有這樣的多項式，使得

$$|f(\arc\cos t)-P(t)|<\varepsilon \quad (-1\leqslant t\leqslant+1),$$

回到原來的變量，就得到：

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon \quad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

當用 $(-x)$ 來替代 x 時，由於 $f(x)$ 是偶函數，所以它的値不改變，並且由於 $\cos x$ 是偶函數，$P(\cos x)$ 的値也不改變；就是說，當 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 時，上面這不等式正確；也就是說，在整個基本區間上，這不等式正確。不過，我們知道 [I,176]，$\sin x$ 與 $\cos x$ 的正整數次冪可以通過倍角的正弦與餘弦的線性結合來表達，於是 $\cos x$ 的多項式，也就是 $P(\cos x)$ 可以表示成（33）的形狀，就是說在 $f(x)$ 是偶函數的情形，我們證明了這個定理。

現在我們考慮任何的連續的週期函數 $f(x)$。若我們設：

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\Big[f(x)+f(-x)\Big];\quad \psi(x)=\frac{1}{2}\Big[f(x)-f(-x)\Big], \tag{35}$$

則 $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 與 $\psi(x)$ 之和，這裏 $\varphi(x)$ 是偶函數，$\psi(x)$ 是奇函數，並且兩個都是週期函數。當給定 ε 時，依照以上的證明，存在有這樣的多項式 $P(t)$，使得 $|\varphi(x)-P(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 若是我們可以證明，存在有這樣的多項式$Q(t)$，使得

(36) $$|\psi(x)-\sin x Q(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant+\pi),$$

則三角多項式

$$T(x)=P(\cos x)+\sin x\,Q(\cos x)$$

就滿足條件(34)。像上面是的，引用新變量 $t=\cos x$，並在區間 $-1\leqslant t\leqslant+1$ 上考慮函數 $\psi(x)=\psi(\arccos t)$。函數 $\psi(x)$ 既是連續的週期的奇函數，當 $x=0$ 以及 $x=\pi$ 時它等於零，於是推知在區間的端點，就是當 $t=\pm1$ 時 $\psi(\arccos t)$ 等於零。由公式(30)推出，若 $f(x)$ 在區間 (0, 1) 的端點等於零，就是 $f(0)=f(1)=0$，則多項式 $P_n(x)$ 具有同樣的性質。利用變換 $t=2x-1$，可以化區間 (0,1) 爲區間 (−1, +1)，於是肯定了可以求得這樣一個函數 $R(t)$，當 $t=\pm1$ 時它等於零，並且使得

$$當\ -1\leqslant t\leqslant+1\ 時，\ |\psi(\arccos t)-R(t)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

這時我們可以寫成 $R(t)=(1-t^2)R_1(t)$，其中 $R_1(t)$ 也是一個多項式，於是上面這不等式可以寫成下面的形狀：

(37) $$當\ 0\leqslant x\leqslant\pi\ 時，\ |\psi(x)-\sin^2 x R_1(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

對於在區間 (−1, +1) 上的連續函數 $\sin x\,R_1(\cos x)=\sqrt{1-t^2}\,R_1(t)$，可以作這樣一個多項式 $Q(t)$，使得

$$當\ -1\leqslant t\leqslant+1\ 時，\ |\sqrt{1-t^2}\,R_1(t)-Q(t)|<\frac{\varepsilon}{4},$$

就是

$$\text{當 } 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ 時，} \quad |\sin x\, R_1(\cos x) - Q(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

於是

$$(37_1) \qquad |\sin^2 x\, R_1(\cos x) - \sin x\, Q(\cos x)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

因爲 $|\sin x| \leqslant 1$。由 (37) 與 (37_1) 推知:

$$|\psi(x) - \sin x\, Q(\cos x)| \leqslant |\psi(x) - \sin^2 x\, R_1(\cos x)| +$$

$$+ |\sin^2 x\, R_1(\cos x) - \sin x\, Q(\cos x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

也就是在區間 $(0, \pi)$ 上我們證明了不等式 (36)。又因爲函數 $\psi(x)$ 與 $\sin x\, Q(\cos x)$ 是奇函數，所以在整個區間 $(-\pi, +\pi)$ 上這個不等式是正確的。

以上我們所講的定理 I 與 II 的證明是屬於 C. H. 別爾史坦院士的。

155.封閉性公式 只由我們已經證明過的定理，可以很簡單的推出 [147] 中對於三角函數組的封閉性公式的正確性。先設給定的函數 $f(x)$ 在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上連續，而且 $f(-\pi) = f(\pi)$。

按照週期性把 $f(x)$ 延續到這個區間之外， 就得到一個連續的週期函數，當給定 ε 時，就存在一個滿足不等式(34)的三角多項式 $T(x)$。

由這不等式推出:

$$(38) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon^2.$$

設 n 是這三角多項式的級，就是公式 (33) 中 m 的值。不過，當選定任何的級數不超過 n 的三角多項式時，積分 (38) 的大小有個最小值 ε_n^2，就是當取函數 $f(x)$ 的福里哀級數的前 $(2n+1)$ 項之和作三角多項

式時這個積分的值。由此推出 $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$，由於正數 ε 隨意選擇多小都可以，而且當 n 增大時 ε_n 不增大，由此就推出，當 $n \longrightarrow \infty$ 時，ε_n 應當趨向零，由［147］知道，這就相當於關於 $f(x)$ 的封閉性公式。

現在我們考慮比較一般的情形，就是當 $f(x)$ 在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上連續，而它的值 $f(-\pi)$ 與 $f(\pi)$ 不相同時。像以前一樣，存在有這樣一個正數 M，使得當 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 時 $|f(x)| \leqslant M$. 設 η 是任意給定的一個正數，再設 δ 是一個正數，它滿足下列不等式

$$\delta < \frac{\pi\eta}{8M^2}; \qquad \delta < \pi. \tag{39}$$

依照下述法則作一個新的函數 $f_1(x)$。在區間 $(-\pi, \pi-\delta)$ 上 $f_1(x)$ 與 $f(x)$ 全同，在區間 $(\pi-\delta, \pi)$ 上 $f_1(x)$ 是一個線段，它連接點 $x=\pi-\delta$, $y=f(\pi-\delta)$ 與點 $x=\pi$ $y=f(-\pi)$（圖 126）。函數 $f_1(x)$ 在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上是連續函數，而且當 $x=\pm\pi$ 時它有相同的值 $f(-\pi)$，於是像對於 $f(x)$ 一樣，我們有 $|f_1(x)| \leqslant M$.

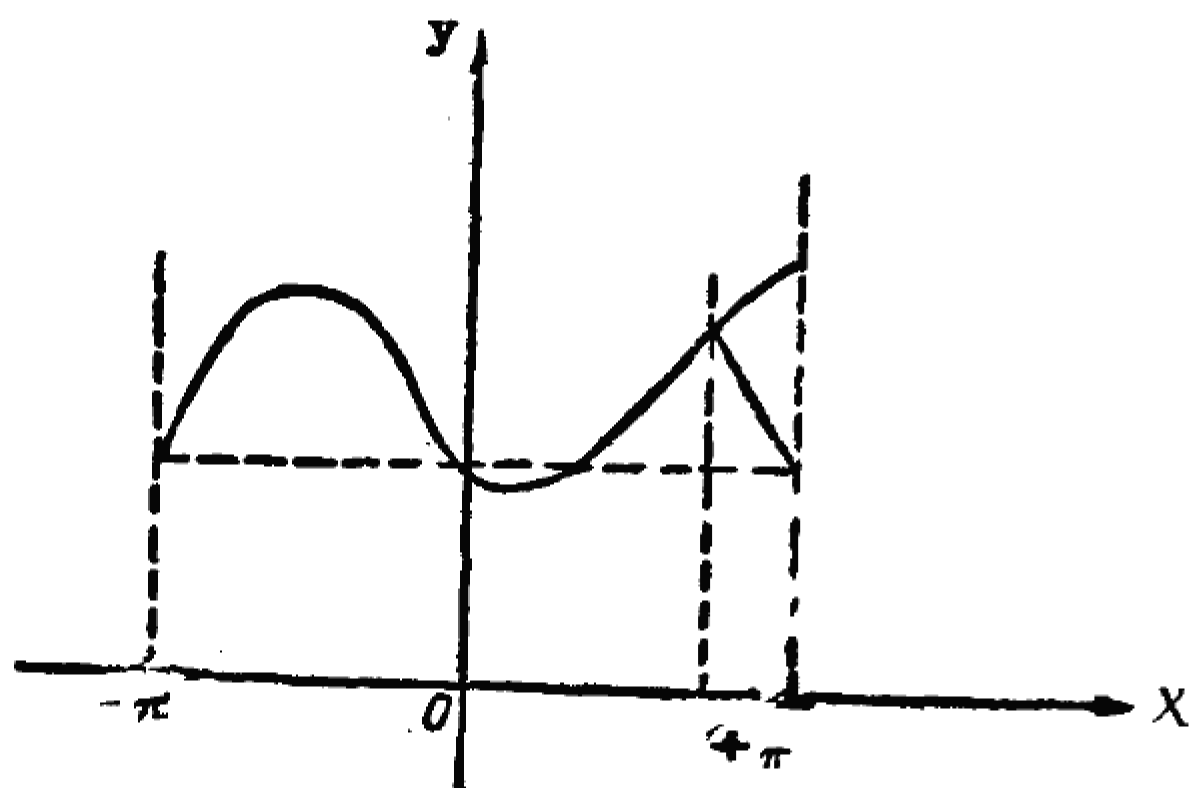


圖 126

根據以上所證，對於任何的給定的正數 η，可以求得這樣一個三角多項式，使得

(40) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\,dx<\frac{\eta}{4}.$$

注意，在區間 $(-\pi,\ \pi-\delta)$ 上 $f(x)=f_1(x)$，就有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx.$$

由此，注意 $|f(x)-f_1(x)|\leqslant|f(x)|+|f_1(x)|\leqslant 2M$，可以寫成：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx\leqslant\frac{2M^2}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}dx=\frac{2M^2\delta}{\pi},$$

或，根據 (39)：

(41) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx<\frac{\eta}{4}.$$

作積分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{[f(x)-f_1(x)]+[f_1(x)-T(x)]\}^2dx.$$

注意顯然的不等式 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$，可以寫成：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\,dx,$$

根據 (40) 與 (41)，由此推知：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\eta.$$

用 n 記三角多項式 $T(x)$ 的級數，像以上一樣考慮，就得到 $\epsilon_n^2 \leqslant \eta$，由於 η 的任意小性，就有當 $n \longrightarrow \infty$ 時 $\varepsilon_n \longrightarrow 0$，就是說，對於具有上述性質的 $f(x)$，封閉性公式成立。同樣也可以證明，當 $f(x)$ 在區間 $(-\pi, +\pi)$ 上有界而有有限多個間斷點時，封閉性公式成立。若所有的間斷點都是第一類間斷點，則無須再說函數是有界的。爲要作證明，只須在各個間斷點附近選擇一個足够窄的區間，在區間 $(-\pi,$ $+\pi)$ 上作一個新的連續函數 $f_1(x)$，在所選出的區間之外它與 $f(x)$ 全同，而在這些區間內它有直線圖形。對於 $f_1(x)$ 可以依照以上所述作出一個滿足不等式 (40) 的三角多項式 $T(x)$，而所選出的區間可以作的足够窄以使得滿足不等式 (41)。其餘的證明可以像以上一樣作。於是，對於具有有限多個第一類間斷點的所有的函數，我們證明了封閉性公式。我們提出，對於非常廣泛的函數類這個公式是成立的。

156. 函數組的封閉性質　現在我們講幾個封閉性公式的推理，這裏我們所作的討論不僅是對於三角函數組講的，而是對於任何的在區間 (a, b) 上正交而且是標準的函數組

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x), \cdots,\ \psi_n(x), \cdots \tag{42}$$

來講的。設就這個函數組來講，對於任何的具有有限多個第一類間斷點的函數，封閉性公式成立。以下我們就只談這樣的函數。引用函數 $f(x)$ 的廣義福里哀係數：

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx.$$

封閉性公式就有下面的形狀：

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{43}$$

現在我們講這個公式的幾個重要推理。

1. 若 $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 是隨意兩個函數，而 c_k 與 d_k 是它們的福里哀係數：

(44) $$c_k=\int_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx,\quad d_k=\int_a^b \varphi(x)\psi_k(x)\,dx.$$

則

(45) $$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_kd_k,$$

並且右邊這級數絕對收斂。

事實上，在等式(43)中用$f(x)+\xi\varphi(x)$來替代$f(x)$，其中ξ是任意的常數參數，我們就有：

$$\int_a^b [f(x)+\xi\varphi(x)]^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_a^b [f(x)+\xi\varphi(x)]\psi_k(x)\,dx\right]^2,$$

或，根據(44)：

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx+2\xi\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx+\xi^2\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2+2\xi\sum_{k=1}^{\infty}c_kd_k+\xi^2\sum_{k=1}^{\infty}d_k^2.$$

比較ξ的同次冪的係數，就得到(45)。

至於公式(45)中的級數的絕對收斂性，是由於

$$|c_kd_k|\leqslant\frac{1}{2}(c_k^2+d_k^2),$$

而我們知道級數 $\sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2+d_k^2)$ 是收斂的。

2.若$\varphi(x)$依賴於某一個參變數，不過對於這變數所有的值

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2<M,$$

其中常數M不依賴於這參變數，則對於這參變數來講，級數

(46)
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k$$

一致收斂。

證明的基礎在於一個簡單而是很重要的不等式：無論

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_m; \qquad \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_m$$

是什麼實常數，總有

(47)
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 ,$$

並且只是當 α_i，β_i 的大小互相成比例

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{\beta_m}{\alpha_m}$$

時，等號成立。

事實上，設 ξ 是隨意一個實數。作和

(48)
$$S_m = \sum_{k=1}^{m} (\xi\alpha_k - \beta_k)^2,$$

它顯然 $\geqslant 0$。這裏當

$$\xi\alpha_k - \beta_k = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

就是

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{\beta_m}{\alpha_m} = \xi$$

時等號成立，並且只有這時等號才成立，在這情形下，顯然：

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 .$$

一般說來，乘開表達式(48)中的括號，我們就得一個二次三項式

$$S_m = A\xi^2 - 2B\xi + C,$$

其中

$$A=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2;\quad B=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k;\quad C=\sum_{k=1}^{m}\beta_k^2,$$

這個二次三項式總保持是正的。這時,由初等代數已知,應當是 $B^2-AC<0$,就是 $B^2<AC$,這就給出不等式(47)。

回到我們的肯定2。作和

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k d_k;$$

依照不等式(47),我們有:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k d_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p}d_k^2}.$$

另一方面,若在(43)中用 $\varphi(x)$ 來替代 $f(x)$,並用 d_k 來替代 c_k,顯然得到下面的推理:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}d_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}d_k^2=\int_a^b[\varphi(x)]^2\,dx<M.$$

依照條件,級數 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$ 的項不依賴於參變數,所以當預先給定隨意多麼小的 ε 時,可以選擇一個不依賴於參變數的 N,使得對於任何的 $n>N$ 以及任何的 $p>0$,下面這不等式成立:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k^2<\frac{\varepsilon^2}{M}.$$

這就得到,

$$\text{當 } n>N\text{ 時},\quad\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k d_k\right|<\varepsilon$$

從而推出級數(46)的一致收斂性。

3.若 x_1 與 x_2 是在區間 (a, b) 上的隨意兩個值，則

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\,dx, \tag{49}$$

並且對於在區間 (a, b) 上的所有的值 x_1 與 x_2，右邊這個級數一致收斂。

若我們知道了函數 $f(x)$ 可以展開成福里哀級數

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\psi_k(x) \tag{50}$$

並且這級數一致收斂，則公式(49)就顯然成立 [I,146]。

不過值得注意的是，縱然級數(50)不收斂，這個公式總是正確的，就是說，這個級數可以逐項積分，就像是它一致收斂而和等於 $f(x)$ 似的。

為要証明公式(49)，在公式(45)中設

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ 0 & \text{若 } a \leqslant x < x_1 \text{ 或 } x_2 < x \leqslant b. \end{cases}$$

這裏 x_1 與 x_2 是函數 $\varphi(x)$ 所依賴的參變數。在2中所述的數 M 存在，因為

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \leqslant \int_a^b dx = b - a.$$

再者，由於在區間 (x_1, x_2) 之外 $\varphi(x)$ 是0，所以

$$d_k = \int_a^b \varphi(x)\,\psi_k(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\,dx$$

根據(45)就有：

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\,dx.$$

於是證完。

附註1. 在應用中，對於普通的福里哀級數，可以證明它們可以逐項積分，就像它們

是一致收斂而和等於被展開的函數$f(x)$似的，而且不僅對於區間$(-\pi, +\pi)$內是如此，對於隨意的區間都是如此。這時，像我們在[143]中所作過的一樣，函數$f(x)$應當是週期性的延續到區間$(-\pi, +\pi)$之外。

附註 2. 我們提出，不等式(47)不僅是對於和可以用，對於積分也可以用，那時它有下面的形狀(布尼亞柯夫斯基不等式)：

$$(51)\quad \left[\int_a^b f_1(x)\ f_2(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f_1(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [f_2(x)]^2 dx.$$

事實上，作表達式：

$$\int_a^b [f_1(x)+\xi f_2(x)]^2 dx = \int_a^b [f_1(x)]^2 dx + 2\xi\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$$

$$+\xi^2\int_a^b [f_2(x)^2 dx.$$

其中ξ是任何一個實數。由左邊的形狀推知，對於任何的實的ξ，這表達式不可能是負的。不過若三項式$A+2B\xi+C\xi^2$對於任何的實的ξ不是負的，則$B^2-AC\leqslant 0$，就是$B \leqslant AC$。應用於上面右邊的三項式就得到不等式(51)。

157. 福里哀級數收斂性的特徵 我們在[144]中得到的級數有些缺點，就是它們收斂的不太好。其中有些不是絕對收斂而且一致收斂的，例如[144]中級數(10)當$x=\frac{\pi}{2}$時成爲

$$2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)$$

它不是絕對收斂的；此外，級數(10)也不可能是一致收斂的，因爲它表示的不是連續函數[1,146]。表示值爲c_1與c_2的不連續函數的級數也有同樣的缺點，被展開的函數的連續性與不連續性這個特徵，與它的福里哀級數是有關係的。我們現在比較仔細的來討論這個關係，以下我們總假定$f(x)$自己以及我們所談到的它的相繼的各級微商都是滿足狄義赫利條件的函數，並且在區間$(-\pi, \pi)$之外作週期性的延續。用

$$x_1^{(0)},\quad x_2^{(0)},\cdots,\ x_{r_0-1}^{(0)}$$

記函數$f(x)$在$(-\pi,\ \pi)$內的間斷點，用

$$x_1',\quad x_2',\cdots,\ x_{\tau_1-1}'$$

記它的微商在$(-\pi,\ \pi)$內的間斷點，並且一般的用

$$x_1^{(k)},\quad x_2^{(k)},\cdots,\ x_{\tau_{k-1}}^{(k)}$$

記微商$f^{(k)}(x)$的間斷點。如果下列各對極限值

$$f(\mp\pi\pm 0),\quad f'(\mp\pi\pm 0),\cdots,\quad f^{(k)}(\mp\pi\pm 0)$$

之間有不相同的，那末區間$(-\pi,\ \pi)$的端點就也是間斷點。

爲對稱起見，記作$x_0^{(0)}=-\pi$，$x_{\tau_0}^{(0)}=\pi$，對於微商用類似的記法。由以上關於微商的條件，知道在任何區間$(x_s^{(k)},\ x_{s+1}^{(k)})$內存在有連續的微商$f^{(k)}(x)$。根據狄義赫利條件，這個微商在這區間的端點有確定的極限值。

現在我們來改變關於函數$f(x)$的福里哀係數的形狀，先看係數：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

把積分區間$(-\pi,\ \pi)$分爲下列各部分區間，

$$(-\pi,\ x_1^{(0)}),\quad (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}),\cdots,\ (x_{\tau_0-1}^{(0)},\ \pi),$$

在其中每一個區間上函數$f(x)$連續。應用分部積分法，就有：

$$\int f(x)\cos nx\,dx=\frac{\sin nx}{n}f(x)-\frac{1}{n}\int f'(x)\sin nx\,dx.$$

另一方面，因爲

$$\int_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx=\lim_{\varepsilon',\ \varepsilon''\to 0}\int_{x_{i-1}^{(0)}+\varepsilon'}^{x_i^{(0)}-\varepsilon''} f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon',\ \varepsilon''\to 0}\frac{\sin nx}{n}f(x)\Bigg|_{x=x_{i-1}^{(0)}+\varepsilon'}^{x=x_i^{(0)}-\varepsilon''}-\frac{1}{n}\int_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx,$$

所以，注意到函數 $\sin nx$ 的連續性，我們就得到：

$$\int_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx=\frac{\sin nx_i^{(0)}}{n}f(x_i^{(0)}-0)-\frac{\sin nx_{i-1}^{(0)}}{n}f(x_{i-1}^{(0)}+0)-$$

$$-\frac{1}{n}\int_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx.$$

依照 i 由 1 到 τ_0 求和，結果就有：

$$a_n=-\frac{1}{\pi n}\{\sin nx_1^{(0)}[f(x_1^{(0)}+0)-f(x_1^{(0)}-0)]+\ldots+\sin nx_{\tau_0}^{(0)}[f(x_{\tau_0}^{(0)}+0)-$$

$$-f(x_{\tau_0}^{(0)}-0)]\}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

其中 $x_0^{(0)}=-\pi$，$x_{\tau_0}^{(0)}=\pi$，並且根據 $f(x)$ 的週期性，$f(x_{\tau_0}^{(0)}+0)=f(x_0^{(0)}+0)$。在所給的情形下 $\sin nx_{\tau_0}^{(0)}=0$，不過爲了與以下的公式對稱起見，我們保留對應的項。

爲簡短起見，把函數 $f(x)$ 在各間斷點 $x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}$，…，$x_{\tau_0}^{(0)}$ 的躍度分別記作：

$$\delta_1^{(0)}=f(x_1^{(0)}+0)-f(x_1^{(0)}-0);\ \ldots,\ \delta_{\tau_0}^{(0)}=f(x_{\tau_0}^{(0)}+0)-f(x_{\tau_0}^{(0)}-0).$$

上面這公式就可以寫成下面的形狀

$$a_n=-\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_0}\delta_i^{(0)}\sin nx_i^{(0)}-\frac{b_n'}{n}, \tag{52}$$

我們用 a_n' 與 b_n' 記微商 $f'(x)$ 的福里哀係數。同樣，由公式

$$\int f(x)\sin nx\,dx=-\frac{\cos nx}{n}f(x)+\int f'(x)\cos nx\,dx,$$

求得

$$b_n=\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_0}\delta_i^{(0)}\cos nx_i^{(0)}+\frac{a_n'}{n}. \tag{53}$$

公式(52)與(53)是很重要的，因爲它們說明：若週期函數 $f(x)$ 具有躍度，則它的福里哀係數，當 $n\to\infty$ 時，是與 $\frac{1}{n}$ 同級的無窮小，並且係數 a_n 與 b_n 的主要部分就分別等於

$$(54)\qquad -\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_0}\delta_i^{(0)}\sin nx_i^{(0)};\quad \frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_0}\delta_i^{(0)}\cos nx_i^{(0)},$$

其餘部分是比 $\frac{1}{n}$ 較高級的無窮小。

事實上，其餘部分具有下面的形狀

$$-\frac{b'_n}{n},\quad \frac{a'_n}{n}$$

而 a'_n 與 b'_n 是函數 $f'(x)$ 的福里哀係數，當 $n\to\infty$ 時，它們趨向零，就是說，當 $n\to\infty$ 時它們是無窮小。公式(52)與(53)重要的另一個原因是，利用它們我們可以把當 $n\to\infty$ 時趨向零的福里哀係數與 $\frac{1}{n}$ 比較，分離爲各級無窮小。

爲了這個目的，一般的，用 $a_n^{(k)}$，$b_n^{(k)}$ 記 k 級微商 $f^{(k)}(x)$ 的福里哀係數，而用 $\delta_1^{(k)},\cdots,\delta_{\tau k}^{(k)}$ 記它在點 $x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)},\cdots,x_{\tau k}^{(k)}=\pi$ 的躍度：

$$\delta_1^{(k)}=f^{(k)}(x_1^{(k)}+0)-f^{(k)}(x_1^{(k)}-0);\ \cdots,\quad \delta_{\tau k}^{(k)}=f^{(k)}(\pi+0)-f^{(k)}(\pi-0).$$

應用公式(52)與(53)於係數 a_n'，b_n'，這時只是要用 $f'(x)$ 換 $f(x)$，$\delta_i^{(1)}$ 換 $\delta_i^{(0)}$，$x_i^{(1)}$ 換 $x_i^{(0)}$，τ_1 換 τ_0；於是得到：

$$(55)\qquad \begin{cases} a_n'=-\dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\sum_{i=1}^{\tau_1}\delta_i^{(1)}\sin nx_i^{(1)}-\dfrac{b_n''}{n},\\ b_n'=\dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\sum_{i=1}^{\tau_1}\delta_i^{(1)}\cos nx_i^{(1)}+\dfrac{a_n''}{n}, \end{cases}$$

其中 a_n'' 與 b_n'' 是 $f''(x)$ 的福里哀係數。

同樣繼續這樣作法，就得到：

$$
(56)\quad \begin{cases} a_n'' = -\dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\sum_{i=1}^{\tau_2}\delta_i^{(2)}\sin nx_i^{(2)} - \dfrac{b_n'''}{n} \\[2ex] b_n' = \dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\sum_{i=1}^{\tau_2}\delta_i^{(2)}\cos nx_i^{(2)} + \dfrac{a_n'''}{r}. \end{cases}
$$

. . . .

為簡短起見，設

$$
A_k = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\tau_k}\delta_i^{(k)}\sin nx_i^{(k)};\qquad B_k = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\tau_k}\delta_i^{(k)}\cos nx_i^{(k)}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots),
$$

由以上的公式我們就有：

$$
(57)\quad \begin{cases} a_n = -\dfrac{A_0}{n} - \dfrac{B_1}{n^2} + \dfrac{A_2}{n^3} + \dfrac{B_3}{n^4} - \cdots + \dfrac{\rho_k'}{n^k}, \\[2ex] b_n = \dfrac{B_0}{n} - \dfrac{A_1}{n^2} - \dfrac{B_2}{n^3} + \dfrac{A_3}{n^4} + \cdots + \dfrac{\rho_k'}{n^k}, \end{cases}
$$

其中 k 取不同形狀的數目時，ρ_k' 與 ρ_k' 有不同的表達式，我們把這些表達式列在下表中：

k	$4m$	$4m+1$	$4m+2$	$4m+3$
ϱ_k'	$a_n^{(k)}$	$-b_n^{(k)}$	$-a_n^{(k)}$	$b_n^{(k)}$
ϱ_k'	$b_n^{(k)}$	$a_n^{(k)}$	$-b_n^{(k)}$	$-a_n^{(k)}$

這裏 $a_n^{(k)}$ 與 $b_n^{(k)}$ 是函數 $f^{(k)}(x)$ 的福里哀係數。

由 A_k 與 B_k 的表達式看出，它們依賴於 n，不過 n 這個數出現在三角函數的記號之下，所以當 n 增加時，對於固定的 s，A_s 與 B_s 保持是有界的。在 A_s 與 B_s 的表達式中三角函數的係數是微商 $f^{(s)}(x)$ 的躍度。若沒有這些躍度，則 $A_s = B_s = 0$。另一方面，若微商 $f^{(k)}(x)$ 是滿足狄義赫利條件的函數，則不論符號時因子 ϱ_k' 與 ϱ_k'' 各是函數

$f^{(k)}(x)$ 的福里哀係數之一，當 n 增大時它的級不低於 $\frac{1}{n}$ 的級，因爲在 [151] 中我們講過，滿足狄義赫利條件的函數的福里哀係數的級不低於 $\frac{1}{n}$ 的級。如此我們得到下面這定理：

若連續週期函數 $f(x)$ 的直到 $(k-1)$ 級微商存在而且連續，而且 k 級微商是滿足狄義赫利條件的函數，則函數 $f(x)$ 的福里哀係數 a_n、b_n 的級不低於 $\frac{1}{n^{k+1}}$ 的級，就是說，它們有估計值：

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}}; \qquad |b_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}},$$

其中 M 是某一個正數。

我們提出，當 $k \geqslant 1$ 時，函數 $f(x)$ 的福里哀級數一致收斂。實際上，由上面證明的定理推知，在這情形下係數 a_n 與 b_n 滿足不等式：

$$|a_n| < \frac{M}{n^2}; \qquad |b_n| < \frac{M}{n^2},$$

這級數的一般項就有估計值：

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \frac{2M}{n^2},$$

由此推知這級數絕對收斂而且一致收斂，因爲級數 $\sum_{n=1}^{a} \frac{1}{n^2}$ 是收斂級數 [I, 122]。

對於在區間 $(-l, l)$ 的情形下的福里哀級數，公式(57)保持有效。只是應當設：

$$(58)\qquad \begin{cases} A_k = \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\tau_k} \delta_i^{(k)} \sin \frac{n\pi x_i^{(k)}}{l} \\ B_k = \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\tau_k} \delta_i^{(k)} \cos \frac{n\pi x_i^{(k)}}{l} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots\cdots)$$

而在式中所寫的關於 ρ'_k，ρ''_k 的表達式要乘以 $\left(\frac{l}{\pi}\right)^k$，並且這裏

$$(59)\qquad \delta_{\tau k}^{(k)} = f^{(k)}(l+0) - f^{(k)}(l-0)$$

$$= f^{(k)}(-l+0) - f^{(k)}(-l-0).$$

158. 福里哀級數收斂性的改善 由以上我們看到，在函數 $f(x)$ 的福里哀係數 a_n 與 b_n 的表達式中所存在的與 $\frac{1}{n}$ 同級的項，使得福里哀級數收斂得不好，而這種項是由函數 $f(x)$ 有躍度產生的。有的函數可以在區間 $(-\pi, \pi)$ 內有任何級的微商，而只在這區間的端點有一個躍度，規矩的說法就是極限值 $f(\mp\pi\pm 0)$ 不相同，就能使得這函數的福里哀級數在計算時實際上不適用。再者，在應用中時常是重要的研究不在於展開成的福里哀級數的函數 $f(x)$，而在於它的一級，二級甚至於三級微商。那時，若函數 $f(x)$ 的福里哀係數與 $\frac{1}{n^{k+1}}$ 同級，則求出級數的微商時，係數就與 $\frac{1}{n^k}$ 同級，這可以由下面的等式顯見：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx - a_n\sin nx),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(-a_n\cos nx-b_n\sin nx).$$

反之，求積分時，每求一次積分，係數就高一級，因爲

$$\int\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos nx+a_n\sin nx}{n},$$

其中 C 是任意常數。

如此，求微商後福里哀級數的收斂性可以變壞，例如，若函數 $f(x)$ 的福里哀係數與 $\frac{1}{n^2}$ 同級，這就是這函數是連續的週期函數而 $f'(x)$ 可以有間斷點的情形，則由逐項求微商所得到的關於 $f'(x)$ 的級數的係數就與 $\frac{1}{n}$ 同級；而關於 $f''(x)$ 的級數就完全沒有意義了，因爲它的係數就不再趨向零了。如此可以說，無論 x 取什麼值，函數 $f(x)$ 的福里哀級數不適用於計算這函數的各級微商，縱然是只在區間上一點沒有微商，而在其餘的點都有任何級微商，也是如此。

於是引起福里哀級數收斂性的改善問題，就是把它換成這樣的級數，使得係數是足夠高級的無窮小，以至於求微商時收斂性的惡化不會妨礙到計算微商；例如，如果我們希望

不妨擬用逐項求微商法計算直到三級的微商，就要希望這級數的係數的級不低於 $\frac{1}{n^5}$ 的級，因爲那時關於三級微商我們得到的級數的係數的級才不低於$\frac{1}{n^2}$的級，而這個一致收斂級數的計算實際上才適用。

函數 $f(x)$ 的福里哀級數的收斂性的改善可以用下述的方式。設在公式 (57) 中有與$\frac{1}{n}$同級的項，就是說，函數 $f(x)$ 有躍度 $\delta_i^{(0)}$.

總可以作出一個輔助函數 $\varphi_0(x)$，使它與 $f(x)$ 具有相同的躍度。那時，差

$$f_1(x)=f(x)-\varphi_0(x)$$

就沒有躍度，於是函數 $f_1(x)$ 的福里哀級數的係數至少與 $\frac{1}{n^2}$ 同級。總是取兩種函數作爲 $\varphi_0(x)$ 比較簡單，或者這函數的圖形是階形線，就是由平行於 OX 軸的線段所組成的，或者圖形是由一般的直線段組成的，在第一種情形:

$$\varphi'_0(x)=0,\ \text{就是}\ f_1'(x)=f'(x),$$

在第二個情形，若我們算作所有的線段的斜率相同而都等於 m_0，則

$$f'_1(x)-f'(x)=-m_0,$$

如此，函數 $f'_1(x)$ 與 $f(x)$ 有相同的躍度。

由以上任何一種方法確定了 $\varphi_0(x)$，就得到:

$$f(x)=\varphi_0(x)+f_1(x),$$

其中 $\varphi_0(x)$ 是一個已知的非常簡單的函數，它的圖形是由平行的直線段組成的，而 $f_1(x)$ 具有的福里哀級數的係數的級不低於$\frac{1}{n^2}$的級。現在我們矯正函數 $f_1(x)$. 我們有:

$$f'(x)=f'_1(x)+m_0.$$

像以上對 $f(x)$ 所作的一樣再對 $f'_1(x)$ 這樣作，我們可以寫成:

$$f'_1(x)=f_2(x)+\varphi_1(x),$$

其中 $\varphi_1(x)$ 是一個由平行的直線段組成的函數，並且 $f_2(x)$ 展成的福里哀級數的係數的級不低於 $\frac{1}{n^2}$ 的級。由最後這等式求積分，就得到 $f_1(x)$ 的一個表達式，它的形狀是一段段的二次拋物線與一個福里哀級數之和，並且這級數的係數的級不低於$\frac{1}{n^3}$ 的級。如果我們以後再

矯正 $f''(x)$，則得到一個關於 $f(x)$ 的表達式，它的形狀是一段段的三次拋物線與每一個福里哀級數之和，並且這個級數的係數的級不低於 $\frac{1}{n^4}$ 的級；以下類推。

以上所講的方法，主要是應用於函數是未知的可是知道它的福里哀級數，並且這級數的係數具有(57)的形狀時。這時需要依照係數的形狀來確定函數 $f(x)$ 的間斷點，躍度以及它的微商，以後再應用上述改善收斂性的方法。

可以換一個作法，就是：可以先把由係數 a_n 與 b_n 的表達式(57)中前幾項所產生的福里哀級數的一部分加起來。也就是這些項使得福里哀級數的收斂性不好。求出這一部分的和之後，餘下的福里哀級數就比以前收斂得較好了。

求上述的和時需要利用下面的公式：

$$(60_1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{-\pi-x}{2} & (-2\pi<x<0)\\[2mm] \dfrac{\pi-x}{2} & (0<x<2\pi)\\[2mm] 0 & (x=0 \text{ 與 } x=\pm 2\pi)\end{cases}$$

$$(60_2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{2\pi^2+6\pi x+3x^2}{12} & (-2\pi\leqslant x\leqslant 0)\\[2mm] \dfrac{2\pi^2-6\pi x+3x^2}{12} & (0\leqslant x\leqslant 2\pi)\end{cases}$$

$$(60_3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\begin{cases}\dfrac{2\pi^2x+3\pi x^2+x^3}{12} & (-2\pi\leqslant x\leqslant 0)\\[2mm] \dfrac{2\pi^2x-3\pi x^2+x^3}{12} & (0\leqslant x\leqslant 2\pi).\end{cases}$$

如果把函數 $\frac{\pi-x}{2}$ 在區間 $(0,\pi)$ 上展開成正弦級數就直接得到所寫的第一個公式。第一個公式由 0 到 π 對 x 求積分就得第二個公式，這裏需要利用下面這等式〔144〕

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

同樣由第二個公式求積分就得到第三個公式。繼續求積分我們就得到上面所寫的理想的相繼的公式。這裏我們算作區間的長度等於 π。這總可以由自變量的簡單變換達到。

以上所講的福里哀級數收斂性改善的觀念，利用逐步矯正函數 $f(x)$ 及其微商的方法，或像下面例中所講的方法，是屬於 A.H. 克雷樓夫的。[1]

159 例 考慮福里哀級數：

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi) \tag{61}$$

這裏我們有

$$b_n=-\frac{2n\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi(n^2-1)}.$$

爲要把 b_n 表示成 (53) 的形狀，依照 $\frac{1}{n}$ 的冪展開分式

$$\frac{n}{n^2-1},$$

我們展開到與 $\frac{1}{n^4}$ 同級的項。

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}},$$

於是

$$b_n=-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n}-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n^3}-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n^3(n^2-1)}. \tag{62}$$

如此我們需要先求兩個級數之和：

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n} \text{ 與 } -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n^3}. \tag{63}$$

用 $S_1(x)$ 記第一個和，可以把它寫成下面的形狀

1)"О некотрых дифференциальных уравнениях математической физики".

$$S_1(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

對於這兩個和中每一個都可應用公式(60_1)。我們先考慮第一個和。當 x 由 0 改變到 π 時，變量 $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 改變到 $\frac{3\pi}{2}$，於是由公式(60_1)得到:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n} = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{2x-\pi}{4\pi} \quad (0\leqslant x\leqslant \pi).$$

再看第二個和，注意，當 x 由 0 改變到 $\frac{\pi}{2}$ 時，變量 $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 改變到 0，當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 改變到 π 時，變量 $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 由 0 改變到 $\frac{\pi}{2}$。

在這情形下由公式(60_1)得到:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n} = \begin{cases} \dfrac{2x+\pi}{4\pi} & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{2x-3\pi}{4\pi} & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant \pi\right) \\ 0 & \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

相加就得到關於 $S_1(x)$ 的最後表達式如下:

$$(64) \qquad S_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n} = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{x-\pi}{\pi} & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant \pi\right) \\ 0 & \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

(63)中第二個和可以利用公式(60_3)來計算，不過也可用另一個作法。用 $S_2(x)$ 記這個和。不難看出，由 $S_1(x)$ 對 x 求積分兩次就得到 $S_2(x)$，不過可能差一個一次多項式。由表達式(64)求積分兩次，我們得到:

$$\frac{x^3}{6\pi}\ \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right);\quad \frac{(x-\pi)^3}{6\pi}\ \left(\frac{\pi}{2}<x\leqslant \pi\right),$$

於是推知：

(65)
$$S_2(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{6\pi}+C'_1x+C'_2 & \left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\dfrac{(x-\pi)^3}{6\pi}+C''_1x+C''_2 & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right).\end{cases}$$

為要確定常數 C，我們注意，$S_2(x)$ 的福里哀級數的係數與 $\frac{1}{n^3}$ 同級，而 $S'_2(x)$ 的級數的係數與 $\frac{1}{n^2}$ 同級，於是推知，這兩個級數一致收斂並且當 $x=\frac{\pi}{2}$ 時給出連續函數。由此推知，當 $x=\frac{\pi}{2}$ 時，(65) 中的兩個表達式以及它們的微商應當相等：

(66)
$$-\frac{\pi^3}{48\pi}+C'_1\cdot\frac{\pi}{2}+C'_2=\frac{\pi^3}{48\pi}+C''_1\cdot\frac{\pi}{2}+C''_2;$$

$$-\frac{\pi^2}{8\pi}+C'_1=-\frac{\pi^2}{8\pi}+C''_1.$$

此外，由 (63) 中第二個和的形狀推知 $S_2(0)=S_2(\pi)=0$，根據 (65) 就得到：

(67)
$$C'_2=0;\quad C''_1\pi+C''_2=0.$$

由方程 (66) 與 (67) 可以確定出全部四個常數：

$$C'_1=C''_1=\frac{\pi}{24};\quad C'_2=0;\quad C''_2=-\frac{\pi^2}{24};$$

代入到 (65) 中，就得到 $S_2(x)$ 的表達式：

$$S_2(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{24}x & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\dfrac{(x-\pi)^3}{6\pi}+\dfrac{\pi}{24}(x-\pi) & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\right).\end{cases}$$

最後結果，關於級數 (61) 我們得到表達式：

(68)
$$f(x)=S_1(x)+S_2(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx,$$

這就解決了我們的問題。我們用由一段段的直線與拋物線組成的已知函數 $S_1(x)$ 與 $S_2(x)$，以及一個福里哀級數表達出函數 $f(x)$，並且這個級數的係數與 $\frac{1}{n^3(n^2-1)}$ 同級，也就是

與 $\frac{1}{n^5}$ 同級。

這樣我們就可以無困難的計算函數 $f(x)$ 的前三級微商，利用公式(61)的話，不僅是它的微商，就是這級數本身也不一致收斂。

§3 福里哀積分及重福里哀級數

159. 福里哀公式 我們講一種極限的情形以結束福里哀級數的討論，就是當研究福里哀級數所在的區間 $(-l,l)$ 趨向 $(-\infty,+\infty)$ 時，也就是 $l\to\infty$ 時。

設函數 $f(x)$ 滿足狄義赫利條件，在任何有限區間上它是連續的，並且在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上可以求絕對值的積分，就是下面的積分存在：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=Q.$$

依照狄義赫利定理，在區間 $(-l,l)$ 內，我們有：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

注意

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt,$$

由此我們得到：

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{+l}f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}dt.$$

當 $l\to\infty$ 時這個公式變成怎樣？第一項顯然趨向 0。因為

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}|f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt = \frac{Q}{2l} \to 0.$$

引用新的變量 α，在區間 $(0, \infty)$ 上它取等距離的值：

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l},\quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \cdots, \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \cdots$$

每次得到一個改變量 $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l}$，剩下的和可以寫成下面的形狀：

$$\frac{1}{\pi}\sum_{(\alpha)}\Delta\alpha\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\alpha(t-x)dt.$$

當 l 很大時，求和號下的積分與

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt$$

差的很少，於是可以想到，當 $l \to \infty$ 時，全部的和趨向極限

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt.$$

如此，我們就有：

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \tag{1}$$

若是有間斷點的話，在這樣的點只須用

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

來替代 $f(x)$。

這個公式是當 $l \to \infty$ 時由福里哀級數得來的，它叫做福里哀公式。如此我們引出一個命題：**若函數 $f(x)$ 在任何的有限區間上滿足**

狄義赫利條件 並且在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上可以求絕對值的積分，則對於所有的 x，下面這等式成立：

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

這個定理叫做**福里哀定理**，而這公式左邊的積分叫做函數 $f(x)$ 的**福里哀積分**，以上的理由不十分嚴格，利用一些補充的理由，可以把它作得嚴格。我們現在不這樣作，而以 [152] 中的結果爲基礎給福里哀公式一個嚴格的證明。

爲要證明公式 (2) 只須証明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

把左邊的積分記作 $J(\lambda,x)$，我們可以寫成：

$$(3)\qquad J(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_0^\lambda\cos\alpha(t-x)\,d\alpha,$$

就是說可以交換對 t 與對 α 求積分的次序。

這是根據可以求函數 $f(x)$ 的絕對值的積分，於是積分

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt$$

對於所有的 α 的值一致收斂。實際上，積分

$$(5)\qquad \int_N^{N'}f(t)\cos\alpha(t-x)dt,\ \int_{-N'}^{-N}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\quad (N<N')$$

的絕對值不超過

$$(6)\qquad \int_N^{N'}|f(t)|\,dt,$$

於是當給定ε時，可以求得這樣一個不依賴於α的N_0，使得對於所有的N及$N'>N_0$，積分(5)的絕對值小於ε，因爲根據可以求$f(x)$的絕對值的積分，積分(6)就具有這個性質。

這時積分(4)可以在積分號下對參變量α求積分[84]，於是給出：

$$J(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_0^{\lambda}\cos\alpha(t-x)d\alpha.$$

公式(3)右邊裏面的對α的積分可以直接計算，於是得到：

$$J(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}dt, \tag{7}$$

剩下我們要求：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}dt,$$

把積分區間$(-\infty,+\infty)$分爲兩個區間$(-\infty,x)$，$(x,+\infty)$，在第一個區間上引用新的變量$(-z)$來替代$(t-x)$，在第二個區間上用z來替代$(t-x)$，可以把(7)寫成下面的形狀：

$$J(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x+z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz.$$

這兩個積分都是狄義赫利積分的形狀，只不過具有無窮積分限。然而不難證明，它們具有普通狄義赫利積分的性質，就是說，當$\lambda\to\infty$時，應當得到：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz\to\frac{1}{2}f(x-0)\\[2ex]\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}f(x+z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz\to\frac{1}{2}f(x+0),\end{cases} \tag{8}$$

證明了這個之後就實際上求得

$$J(\lambda,x)\to\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

也就證明了福里哀定理。

現在我們證明公式(8)。我們只證明其中第一個公式。設 ε 是一個任何的給定的小正數。當 $z>1$ 時，對於任何的實 λ，因子 $\frac{\sin \lambda z}{z}$ 的絕對值 <1，而依照條件，函數 $f(x-z)$ 在區間 $(0,\infty)$ 上可以求絕對值的積分。所以我們可以求得這樣一個數 $N>1$，使得，對於任何的 λ

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_N^\infty |f(x-2z)|\,dz<\frac{\varepsilon}{2}.$$

在有限區間上考慮狄義赫利積分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz,$$

可以肯定，當 $\lambda\to\infty$ 時它趨向 $\frac{1}{2}f(x-0)$，就是說，對於所有的足够大的 λ 的值

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

顯然就有:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\int_0^N f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right]+\frac{1}{\pi}\int_N^\infty f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz,$$

由此，根據最後一個不等式，對於所有的足够大的 λ 的值就有:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-2z)\frac{\sin \lambda z}{z}dz-\frac{1}{2}f(x-0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由於 ε 的任意小性，這就給出(8)中第一個公式。第二個的證明與這完全相同。

若函數 $f(x)$ 是偶函數或奇函數，可以變換公式(2)。

事實上，展開 $\cos\alpha(t-x)$，就有：

$$(9)\qquad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\cos\alpha x\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\sin\alpha x\,dt,$$

根據 $f(t)$ 在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上可以求絕對值的積分，這裏的對 t 的兩個積分顯然是有意義的。

若函數 $f(t)$ 是偶函數，則函數 $f(t)\cos\alpha t$ 是偶函數，而函數 $f(t)\sin\alpha t$ 是奇函數，於是推知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt=2\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt=0,$$

所以

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$$

若函數 $f(x)$ 是奇函數，則同樣可以得到：

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

若函數 $f(x)$ 只確定於區間 $(0,\infty)$ 上，它可延續到區間 $(-\infty,0)$ 上，或者成爲偶函數，或者成爲奇函數，那時我們對於同一個函數 $f(x)$，得到兩個公式：

(10) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\quad (x>0)$$

(11) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\quad (x>0),$$

這裏爲簡單起見我們算作 $f(x)$ 連續。

只是應當注意，對於第一個公式，函數 $f(x)$ 延續爲偶函數，於是給出 x 的連續函數，所以當 $x=0$ 時第一個公式正確；在第二個公式中，若 $f(0)\neq 0$，我們得到間斷點，並且當 $x=0$ 時，右邊不等於 $f(0)$，而等於零。

在公式 (9) 中先對 t 求積分，我們引用兩個函數

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\quad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

可以把公式 (9) 寫成下面的形狀

$$f(x)=\int_0^\infty[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha,$$

爲簡單起見算作 $f(x)$ 連續。在這公式中，我們得到在無窮區間 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 依調和振動的展開式，這裏這些振動的頻率由 0 連續改變到 $+\infty$，而函數 $A(\alpha)$ 與 $B(\alpha)$ 給出振幅分佈的規律以及初相對頻率 α 的依賴關係。對於有限區間 $(-l,+l)$，我們有頻率 $\alpha_n=\frac{n\pi}{l}$ $(n=0,1,\cdots)$，形成等差級數。

若在公式 (10) 中設

(12_1) $$f_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

則可以把它寫成

$$(12_2)\qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha.$$

在這兩個公式中，$f(x)$ 與 $f_1(\alpha)$ 完全同樣的相互表達。

若在公式 (12_2) 中算作 $f(x)$ 是給定的，而 $f_1(\alpha)$ 是未知的，則公式 (12_2) 所表示的，叫做**關於 $f_1(\alpha)$ 的積分方程**，因爲這個函數出現在積分號下(福里哀積分方程)。公式 (12_1) 給出這個積分方程的解。完全同樣的可以把公式 (11) 表示成下面形狀的公式：

$$(13_1)\qquad f_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

$$(13_2)\qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha.$$

例 1.在公式 (10) 中設

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{當 } 0\leqslant x<1 \text{ 時} \\ 0 & \text{當 } x>1 \text{ 時.}\end{cases}$$

這時對於等式 (10) 右邊的積分我們得到：

$$\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt=\int_0^\infty\cos\alpha x\,d\alpha\int_0^1\cos\alpha t\,dt=\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}d\alpha,$$

於是推知：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}1 & \text{當 } 0\leqslant x<1 \text{ 時.} \\ \frac{1}{2} & \text{當 } x=1 \text{ 時.} \\ 0 & \text{當 } x>1 \text{ 時.}\end{cases}$$

2.在公式 (11) 中讓

$$f(x)=e^{-\beta x}\qquad (\beta>0),$$

在右邊就有積分：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}d\alpha,$$

如此就得到:

$$\int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\,e^{-\beta x} & \text{當 } x>0 \text{ 時}\\ 0 & \text{當 } x=0 \text{ 時.}\end{cases}$$

5.同樣，在公式(10)中讓

$$f(x)=e^{-\beta x}\qquad\qquad(\beta>0),$$

求得:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha=\frac{\pi}{2\beta}\,e^{-\beta x}$$

有時把福里哀公式寫成複數式

$$\text{(14)}\qquad\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha(t-x)i}\,dt.$$

由公式(2)不難得到這個公式。在積分號下代入以

$$e^{\alpha(t-x)i}=\cos\alpha(t-x)+i\sin\alpha(t-x),$$

就得到兩個積分:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\text{ 與 }\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt.$$

在第二積分中，變量 α 出現在正弦號下，所以被積函數是 α 的奇函數，於是推知，在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上對 α 求積分時我們得到 0。反之，在第一個積分中是 α 的偶函數，在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上求積分時可以用區間 $(0,\infty)$ 上的積分來替代，再乘以因子 2。由此看出，公式(14)相當於公式(2)。

算作$f(x)$連續，把(14)寫成下面的形狀:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha xi}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha ti}\,dt,$$

由此看出，像對於公式(10)與(11)一樣，我們可以把它寫成下面形狀的兩個公式:

$$(15_1)\qquad f_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,l^{\alpha ti}\,dt.$$

$$(15_2)\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\alpha)\,l^{-\alpha xi}d\alpha.$$

對於新的複數式福里哀積分我們作一個附註。在普通意義之下[82]，我們不可以肯定對變量α來講具有無窮限的積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt$$

是有意義的。我們只可以肯定，當M取任何的有限正值時

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M}d\alpha\int_{-M}^{+M}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt=0,$$

於是，嚴格說來，複數式的福里公式應當寫成下面的形狀:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{+M}e^{-\alpha xi}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha ti}dt.$$

在這情形下，下限趨向$(-\infty)$，上限趨向$(+\infty)$，而上下限的絕對值相同。在一般意義下，爲要反常積分存在必須當下限依照任何規律趨向$(-\infty)$而上限依照任何規律趨向$(+\infty)$時極限存在。

160.複數式福里哀級數 像我們對於福里哀積分所作的一樣，福

里哀級數也可以寫成複數式。

回憶 [146] 中的公式：

$$(16)\qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi;\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.$$

我們證明，這些公式相當於下面的公式：

$$(17)\qquad f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}};\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)e^{-i\frac{n\pi\xi}{l}}d\xi.$$

這裏附標 n 不僅取正整數，而且也取負值。我們來分別確定 c_0，c_k 與 c_{-k}，其中 k 是正整數。依照 (17) 與 (16) 我們有：

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)d\xi=\frac{a_0}{2}$$

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi\xi}{l}-i\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi=\frac{a_k-ib_k}{2}$$

$$c_{-k}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi\xi}{l}+i\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi=\frac{a_k+ib_k}{2}.$$

代入到級數 (17) 中，依照附標的正負分別求和，就得到：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}$$

所寫的兩個和中的項，當 k 取相同的值時，是共軛量把它們結合成一項，就得到實量

$$\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}=a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

於是上面的關於 $f(x)$ 的表達式與福里哀級數 (16) 全同，由此推知 (17) 與 (16) 的相當性。

162. 重福里哀級數 福里哀級數與福里哀積分可能用來表示兩個或多個自變量的函數。例如考慮週期函數 $f(x, y)$，對 x 來講以 $2l$ 爲週期，對 y 來講以 $2m$ 爲週期。把函數 $f(x, y)$ 考慮作 x 的函數，我們就有 [161]:

$$(18)\qquad f(x,y)=\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} c_\sigma(y)\, e^{i\frac{\sigma\pi x}{l}},$$

其中

$$c_\sigma(y)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi, y)\, e^{-i\frac{\pi\xi\sigma}{l}}\, d\xi.$$

函數 $c_\sigma(y)$ 依次可以展開成下面的級數形狀:

$$c_\sigma(y)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma\tau}\, e^{i\frac{\tau\pi y}{m}},$$

其中

$$(19)\qquad c_{\sigma\tau}=\frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m} c_\sigma(\eta)\, e^{-i\frac{\tau\pi\eta}{m}}\, d\eta=\frac{1}{4lm}\int_{-l}^{+l}\int_{-m}^{+m} f(\xi, \eta)\, e^{-i\pi\left(\frac{\sigma\xi}{l}+\frac{\tau\eta}{m}\right)}\, d\xi\, d\eta.$$

把所得到的關於 $c_\sigma(y)$ 的表達式代入到公式 (18) 中，就得到:

$$f(x,y)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma\tau}\, e^{i\frac{\tau\pi y}{m}}\right) e^{i\frac{\sigma\pi x}{l}},$$

由此，去掉括號，就有公式:

$$(20)\qquad f(x, y)=\sum_{\sigma,\tau=-\infty}^{\infty} c_{\sigma\tau}\, e^{i\pi\left(\frac{\sigma x}{l}+\frac{\tau y}{m}\right)},$$

它把福里哀級數推廣到兩個變量的情形。

同樣方法，對於三個自變量的週期函數 $f(x_1,x_2,x_3)$，設對 x_1 來講以 $2\omega_1$ 爲週期，對 x_2 來講以 $2\omega_2$ 爲週期，對 x_3 來講以 $2\omega_3$ 爲週期，我們就有：

$$(21)\quad f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}e^{i\pi\left(\frac{\sigma_1x_1}{\omega_1}+\frac{\sigma_2x_2}{\omega_2}+\frac{\sigma_3x_3}{\omega_3}\right)},$$

其中

$$(22)\quad c_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}=\frac{1}{8\omega_1\omega_2\omega_3}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}\int_{-\omega_2}^{\omega_2}\int_{-\omega_3}^{\omega_3}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)e^{-i\pi\left(\frac{\sigma_1\xi_1}{\omega_1}+\frac{\sigma_2\xi_2}{\omega_2}+\frac{\sigma_3\xi_3}{\omega_3}\right)}d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3.$$

在公式(20)或(21)中分離出實部，就得到實數式的福里哀級數展開式。

藉助於積分可以得到類似的表示法

$$(23)\quad f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)\,e^{i[\alpha_1(\xi-x)+\alpha_2(\eta-y)]}d\alpha_1d\alpha_2d\xi d\eta,$$

$$(24)\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int\int f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)e^{i[\alpha_1(\xi_1-x_1)+\alpha_2(\xi_2-x_2)+\alpha_3(\xi_3-x_3)]}d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3d\xi_1d\xi_2d\xi_3.$$

索 引

索 引

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等数学教程　　第二卷　第一、二分册
作者＝Ｂ．и．СМиРНОВ
页数＝５４３
ＳＳ号＝１０５２８７２１
出版日期＝１９５３年０５月第１版

前言
目录